3. RELAȚII. PROPRIETĂȚI. OPERAȚII. RELAȚII REMARCABILE

Ţîcău Vitalie,
Lector superior universitar

Produs cartezian

<u>Df</u>. Fiind date două mulțimi A și B vom numi ***produs cartezian*** și vom notă prin $A \times B$, mulțimea tuturor perechilor ordonate de elemente din A și B definită astfel:

$A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$.

Fiind dată o a treia mulțime C putem construi următoarele produse carteziene:

$(A \times B) \times C = \{((a, b), c): a \in A, b \in B, c \in C\}$

$A \times (B \times C) = \{(a, (b, c)): a \in A, b \in B, c \in C\}$

$A \times B \times C = \{(a, b, c): a \in A, b \in B, c \in C\}$

Elementele produslui cartezian de forma $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ se numesc ***n-upluri ordonate***.

Mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se numesc ***factorii produsului cartezian***, iar elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se numesc ***coordonatele*** (sau ***proiecțiile***) elementului $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

În cazul când $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ putem nota $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ cu A^n.

Adică, $A^2 = A \times A$; $A^3 = A \times A \times A$; $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (de n ori).

Submulțimi. Exemple

Fie $A = \{A, B, C, D\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

4 · . . .

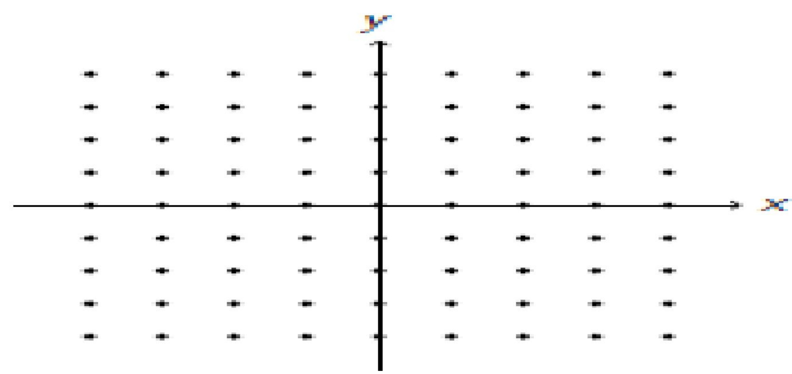
3 . · . .

2 . . · .

1 . . . ·

A B C D

$C = \{(A, 4), (B, 3), (C, 2), (D, 1)\} \subseteq A \times B$.



$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sau $\mathbb{Z}^2$

Relații binare, ternare, n-are

O ***relație binară*** este o submulțime a unui produs cartezian de forma $A \times B$.

Din acest motiv mai spunem că avem o ***relație binară*** de la A la B.

O ***relație*** între mulț imile A, B și C este o submulțime a $A \times B \times C$.

De exemplu,

$\{(0, 1), (1, 0)\} \subseteq Z2$;

$\{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\} \subseteq Z3$.

Relații binare, ternare, n-are

O ***relație n-ară*** între mulțimile A_1, A_2, ..., A_n este o structură ordonată de forma $\rho = (A_1, A_2, \ldots, A_n, R)$ unde $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$. Mulțimea R se numește *graficul relației* ρ.

În particular, dacă $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ spunem că avem o ***relație n-ară omogenă*** pe A.

Dacă $R = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ***relația*** se numește ***universală***.

Dacă R = $\varnothing$ – ***relație vidă***.

Dacă $\rho = (A, B, R)$ atunci înscierea $a \rho b$ este echivalentă cu $(a, b) \in R$.

De exemplu, fie $A = \{0, 1, 2\}$ atunci relaț ia “<” este $(A, A, \{(0, 1), (0, 2)\})$.

Imaginea directă. Imaginea inversă

Domeniul relației

$dom(\rho) = \{a \in A\colon \exists\ b \in B$ încât $(a, b) \in R\}$.

Codomeniul relației

$codom(\rho) = \{b \in B\colon \exists\ a \in A$ încât $(a, b) \in R\}$.

Imaginea directă a mulțimii $X \subseteq A$ prin relația ρ este

$\rho(X) = \{b \in B\colon \exists\ a \in X, a\, \rho\, b\}$.

Imaginea inversă a mulțimii $Y \subseteq B$ prin relația ρ este

$\rho^{-1}(Y) = \{a \in A\colon \exists\ b \in Y, a\, \rho\, b\}$.

Imaginea directă. Imaginea inversă

Fie $A = \{a, b, c, d\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Fie $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 4)\}$ și $\rho = (A, B, R)$.

Atunci $\rho(\{a\}) = \{1,2\}$; $\rho(\{a, b\}) = \{1,2,4\}$; $\rho(\{c, d\}) = \varnothing$;

$\rho^{-1}(\{1\}) = \{a\}$; $\rho^{-1}(\{1, 4\}) = \{a, b\}$; $\rho^{-1}(\{2\}) = \varnothing$.

Fie $A = \{Student1, Student2, Student3, Student4\}$ și

$B = \{Curs1, Curs2, ..., Curs_{\infty}\}$.

Fie $R = \{(Student1, Curs2), (Student2, Curs2), (Student2, Curs4), (Student3, Curs1)\}$ și

$\rho = (A,B, R)$. Utilizați diagrame.

Atunci:

$\rho(\{Student1, Student2\}) = \{Curs2\}$; $\rho(\{Student4\}) = \varnothing$;

$\rho^{-1}(\{Curs1, Curs2, Curs4\}) = \{Student1, Student2, Student3\}$; $\rho^{-1}(\{Curs3\}) = \varnothing$.

Relații surjective, injective, binare omogene

Relația ρ este ***surjectivă*** dacă $\rho(A) = B$.

Relația ρ este ***totală*** dacă $\rho^{-1}(B) = A$.

Relația este ***injectivă*** dacă pentru orice $a \in A$ este cel mult un element $b \in B$ încât $(a, b) \in R$.

Fie o ***relație binară omogenă*** $\rho = (A, A, R)$; În acest caz putem folosi expresiile:

"*ρ relație binară pe mulțimea A*"

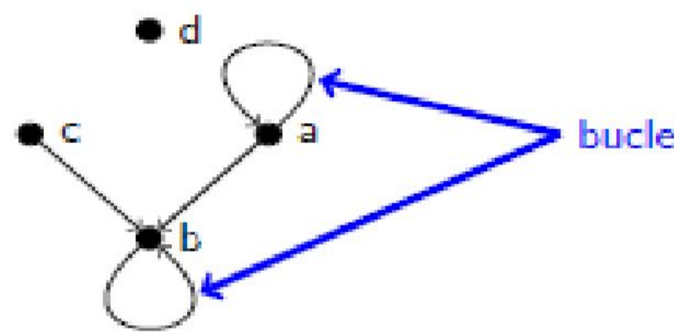
"*A este înzestrată cu o relație binară*"

Relații surjective, injective, binare omogene. Matricea binară

Fie $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, b)\}$ definită pe $A = \{a, b, c\}$;

Matricea binară (imaginar pe rânduri și pe coloane scrieți elementele mulțimii *a*):

$$A\rho = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Fie $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, b)\}$ definită pe $A = \{a, b, c\}$;

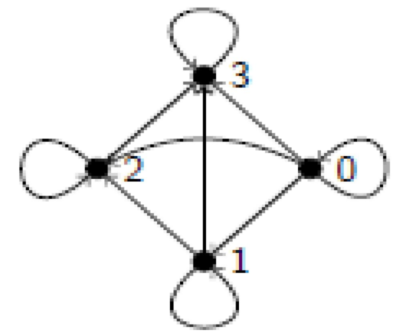
Graful orientat este prezentat în fig.

Proprietăți: reflexivitate, antireflexivitate

Relația ρ = *(A, A, R)* se numește ***reflexivă*** dacă pentru orice $a \in A$ avem $(a, a) \in R$ (sau $a \rho a$).

Reflexivitate. Fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și ρ = "$\leq$".

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

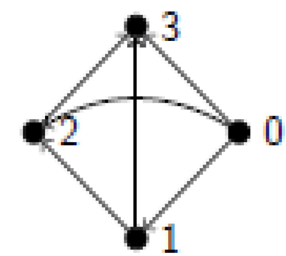


Diagonala principală este 1. Toate vârfurile au bucle.

Relația ρ = *(A, A, R)* se numește ***antireflexivă*** dacă pentru orice $a \in A$ avem $(a, a) \notin R$.

Fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și ρ = "$<$".

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Diagonala principală este 0. Nu sânt bucle.

Relații simetrie, asimetrie

Relația ρ = *(A, A, R)* se numește ***simetrică*** dacă pentru orice *(a, b)* ∈ *R* avem *(b, a)* ∈ *R*.

De exemplu,

A = {0,1,2,3} și *R = {(3, 2), (1, 1), (2, 3), (0, 2), (2, 0)}*.

Construiți matricea acestei relații. Construiți matricea transpusă. Matricea relației este simetrică. Construiți graful orientat.

Relația ρ = *(A, A, R)* se numește ***asimetrică*** dacă pentru orice *(a, b)* ∈ *R* avem *(b, a)* ∈ *R*.

De exemplu,

A = {0, 1, 2, 3} și *R = {(3, 2), (2, 3), (0, 2)}*.

Relații antisimetrie, tranzitivitate

Relația *ρ = (A, A, R)* se numește ***antisimetrică*** dacă pentru orice *(a, b)* $\in$ *R* avem *(b, a)* $\in$ *R* cu excepția cazurilor când $a = b$.

Relația antisimetrică este o relație asimetrică cu cel puțin o pereche de formatul (*a, a*).

De exemplu,

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \text{ și } R = \{(3, 2), (1, 1), (0, 2)\}.$$

Relația *ρ = (A, A, R)* se numește ***tranzitivă*** dacă pentru orice *(a, b), (b, c)* $\in$ *R* avem *(a, c)* $\in$ *R*.

De exemplu,

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \text{ și } R = \{(2, 1), (3, 2), (3, 1)\}.$$

Operații: reuniunea, intersecția, compunerea, inversarea

Fie relațiile $\rho_1 = (A, A, R_1)$ și $\rho_2 = (A, A, R_2)$, atunci ***reuniunea***:

$\rho_1 \cup \rho_2 = \{(a,b) \in A^2:$

$(a,b) \in R_1$ sau $(a,b) \in R_2\}$. $A_{\rho 1} \oplus A_{\rho 2}: a_{ij}$ OR b_{ij}

Fie relațiile $\rho_1 = (A, A, R_1)$ și $\rho_2 = (A, A, R_2)$, atunci ***intersecția***:

$\rho_1 \cap \rho_2 = \{(a, b) \in A^2:$

$(a, b) \in R_1$ și $(a, b) \in R_2\}$. $A_{\rho 1} \otimes A_{\rho 2} : a_{ij}$ AND b_{ij}.

Fie relațiile $\rho_1 = (A, A, R_1)$ și $\rho_2 = (A, A, R_2)$, atunci ***compunerea***:

$\rho_1 \cdot \rho_2 = \{(a, b) \in A^2: (a, c) \in R_1$ și $(c, b) \in R_2\}$. $A_{\rho 1} A_{\rho 2}$.

Fie relația $\rho = (A, A, R)$ atunci ***inversarea***:

$$\rho^{-1} = \{(a, b) \in A^2: (b, a) \in R\}.$$

Închiderea reflexivă

Fie relația $\rho = (A,A,R)$, dacă ρ nu este reflexivă atunci ea poate fi transformată într-o relație reflexivă adăugând perechi de forma (a, a) unde $a \in A$.

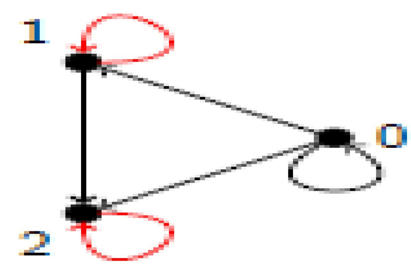
Relația finală se numește ***închiderea reflexivă*** a relației ρ.

Închiderea reflexivă este cea mai mică relație reflexivă care conține ρ. "*Cea mai mică*" în raport cu relația $\subseteq$. Exemplu de închidere reflexivă:

Fie $A = \{0, 1, 2\}$ și $R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$.

Relația $\rho = (A,A, R)$ nu este reflexivă. Închiderea reflexivă a relației ρ este:

Închiderea reflexivă a relației $<$ este $\leq$. Închiderea reflexivă a relației $\neq$ este relația universală.



Închiderea simetrică

Cea mai mică relație simetrică care conține relația $\rho = (A, A, R)$ se numește ***închiderea simetrică*** a lui ρ.

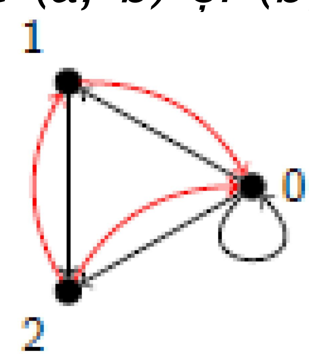
Închiderea simetrică se obține dacă pentru fiecare pereche (*a*, *b*) din *R* adăugăm perechea (*b*, *a*).

Închiderea simetrică a relației ρ este $\rho \cup \rho^{-1}$.

Fie $A = \{0, 1, 2\}$ și $R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$. Relația $\rho = (A, A, R)$ nu este simetrică.

Închiderea simetrică a relație ρ este prezentată în fig.

Fie relația $\rho = (A, A, R)$, dacă ρ nu este tranzitivă atunci ρ poate fi transformată într-o relație tranzitivă în felul următor: *adăugăm perechea (a, c) dacă ρ conține (a, b) și (b, c)*. Este un algoritm recursiv.



Închiderea tranzitivă

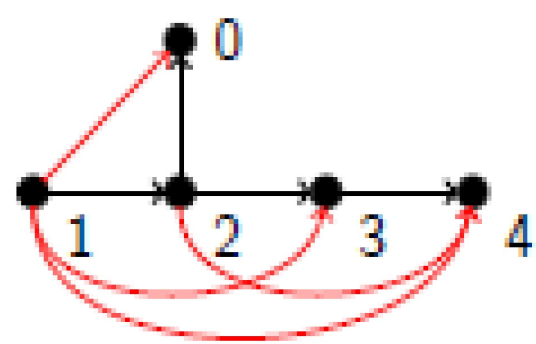
Relația finală se numește ***închiderea tranzitivă*** a relației ρ.

Exemplu de închidere tranzitivă: Fie $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ și $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 0)\}$.

Relația $\rho = (A, A, R)$ nu este tranzitivă.

Închiderea tranzitivă a relație ρ este prezentată în fig.

În graful orientat dacă de la un vîrf la altul există un drum atunci aceste vîrfuri trebuie unite printr-un arc în închiderea tranzitivă.



Ordine parțială

O relație binară omogenă se numește ***relație de ordine parțială,*** dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă. Exemple:

Relația ≤ pe *Z*;

Relația ⊆ pe *P(Z)*;

Relația ”*a divide b*“ pe *N*.

Pentru relațiile de ordine parțială se foloses simbolurile

$\preceq$ u . $\preceq$

O mulțime pe care este definită o relație de ordine parțială se numește ***mulțime parțial ordonată***.

Succesor. Predecesor

Fie $(A, \prec)$ o mulțime parțial ordonată. Fie $a, b \in A$; dacă $a \preceq b$ atunci fie $a = b$ fie $a \neq b$.

Dacă $a \preceq b$ și $a \neq b$, atunci notăm $a \prec b$ și spunem că a este ***predecesorul*** lui b;

sau b este ***succesorul*** lui a.

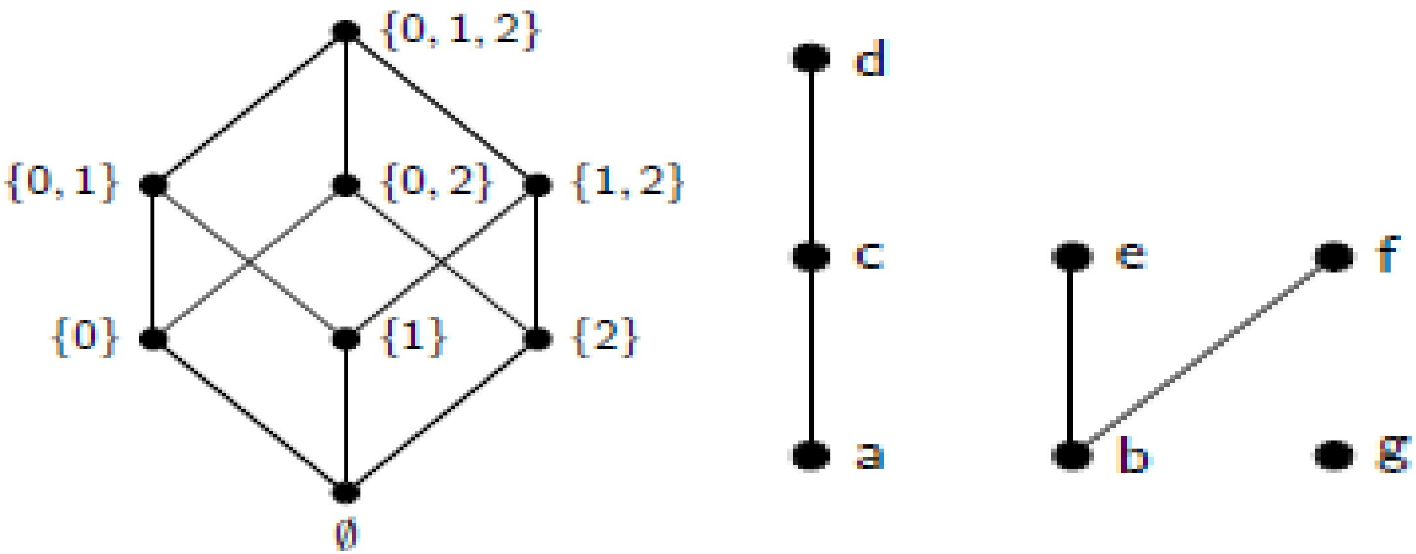
Dacă $a \prec b$ și nu există c încît $a \prec c \prec b$ spunem că a este ***predecesorul imediat*** (***nemijlocit***) al lui b.

<u>Exemplu</u>. Fie $A = \{0, 1, 2\}$; pe $P(A)$ considerăm relația $\subseteq$. Scrieți predecesorii lui $\{0, 1, 2\}$.

Care dintre aceștea sînt predecesori imediați?

Diagrame Hasse

Exercițiu. Descrieți relația de ordine parțială descrisă de deigrama Hasse de mai sus.



Maxim/minim. Comparabilitate

Fie (A, $\preceq$) o mulțime parțial ordonată. Dacă există $a \in A$ cu proprietatea că pentru orice $b \in A$ avem $a \in b$, atunci a se numește ***cel mai mic element***.

Dacă cel mai mic element există atunci el este unic.

Un element a este minimal dacă nu există b cu $b \preceq a$.

Într-o mulțime parțial ordonată (A,) două elemente a și b se numesc ***comparabile*** dacă $a \preceq b$ sau $b \preceq a$.

O relație de ordine parțială în care orice două elemente sînt comparabile se numește ***relație de ordine totală***.

Ordine lexicografică. Relații de echivalență, clase de echivalență

Fie $(A, \preceq_1)$ și $(B, \preceq_2)$ două mulțimi parțial ordonate. Putem defini pe $A \times B$ următoarea relație de ordine: $(a_1, \ b_1) \ (a_2, b_2)$ dacă: 1). $a_1 \ {}_1 \ a_2$ sau 2). $a_1 = a_2$ și $b_1 \ {}_2 \ b_2$.

Această ordine se numește ***ordine lexicografică***.

O relație binară omogenă este ***relație de echivalență*** dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Relații de echivalență: “=”. Relații care nu sînt de echivalența: “<”, “≠”.

Ce puteți spune despre matricea binară a relației de echivalență?

Ce puteți spune despre graful orientat a relației de echivalență?

Într-o relație de echivalență $\rho = (A, A, R)$ pentru fiecare

Ordine lexicografică

Fie $(A, \preceq_1)$ $(B, \preceq_2)$ două mulțimi parțial ordonate. Putem defini pe $A \times B$ următoarea relație de ordine: $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ dacă: 1). $a_1 \preceq_1 a_2$ sau 2). $a_1 = a_2$ și $b_1 \preceq_2 b_2$. Această ordine se numește ***ordine lexicografică***.

O relație binară omogenă este ***relație de echivalență*** dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Relații de echivalență, clase de echivalență

O relație binară omogenă este ***relație de echivalență*** dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Relații de echivalență: “=”. Relații care nu sînt de echivalența: “<”, “≠”.

Într-o relație de echivalență *ρ = (A, A, R)* pentru fiecare element $a \in A$ considerăm:

$[a]_\rho = \{b \in A: a \rho b\}$.

Aceste mulțimi nu sînt vide. Aceste mulțimi sînt disjuncte.

Mulțimea de forma $[a]_\rho$ se numește ***clasă de echivalență*** a elementului *a* în raport cu relația *ρ*.