Механика деформируемого твердого тела

https://vk.com/mehss

Литература

1. *Сапронова Т.Ю., Прядко И.Н. Кинематика. Учебное пособие, 2021.*
2. *Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва: ЧеРо, 1999.*
3. *Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: в 2–х ч. М.: Наука, 1965.*

(см. http://vk.com/t_meh)

§9. Критерий плоскопараллельного движения твердой среды

Пусть L_0 – двумерное подпространство в $\mathbb{R}^3$, $r_0 \in \mathbb{R}^3$.

Множество $L_0 + r_0 = \{q + r_0 \mid q \in L_0\}$ назовем ***арифметической плоскостью***, *параллельной подпространству* L_0.

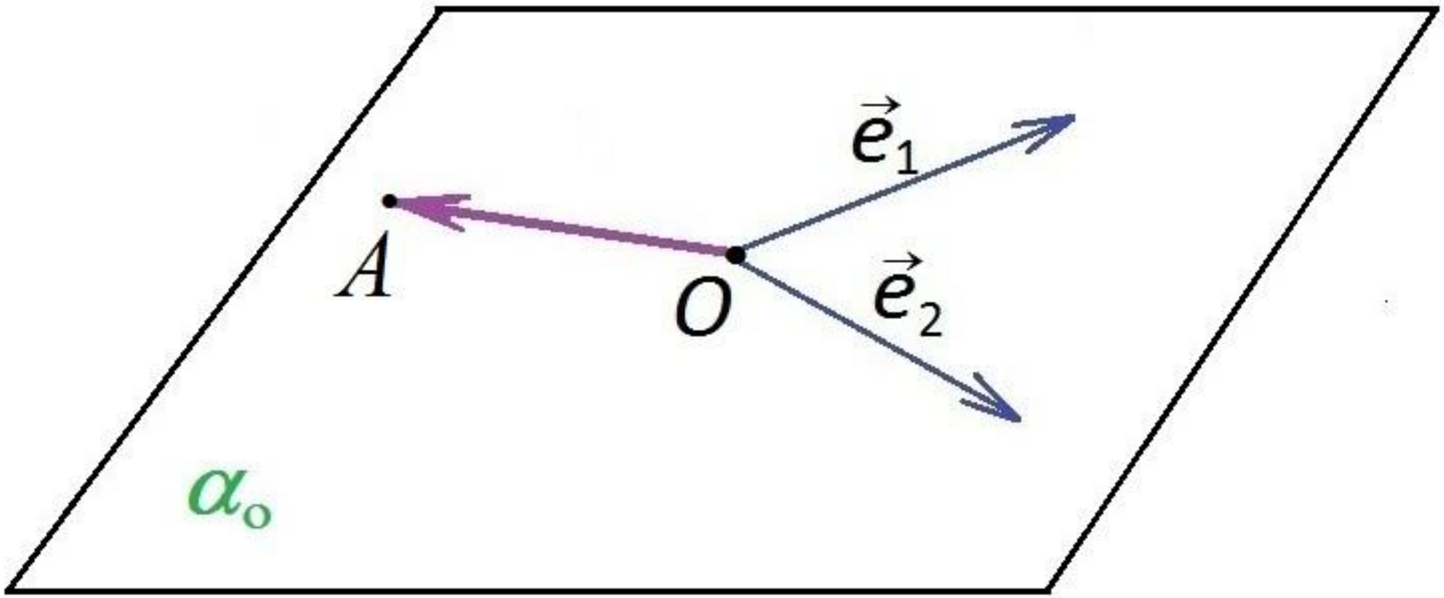
Пусть e_1 и e_2 – базисные векторы подпространства L_0.

Рассмотрим неподвижную декартову систему отсчета $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ в абсолютном пространстве E^3 и плоскость α_0 в E^3, проходящую через точку O и параллельную векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ ($\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ – геометрические векторы, координатные представления которых в системе S равны, соответственно, e_1 и e_2).

Пусть r_{OA} – координатный вектор точки $A\in E^3$ в системе S. Заметим, что $A\in\alpha_0 \Leftrightarrow r_{OA}\in L_0$. Действительно,

$$A\in\alpha_0 \Leftrightarrow \text{векторы } \overrightarrow{OA},\ \vec{e}_1 \text{ и } \vec{e}_2 \text{ компланарны } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\in \mathcal{L}in(\vec{e}_1,\vec{e}_2) \Leftrightarrow r_{OA}\in \mathcal{L}in(e_1,e_2)=L_0 .$$



$\vec{e}_1$
A
O
$\vec{e}_2$
α_o

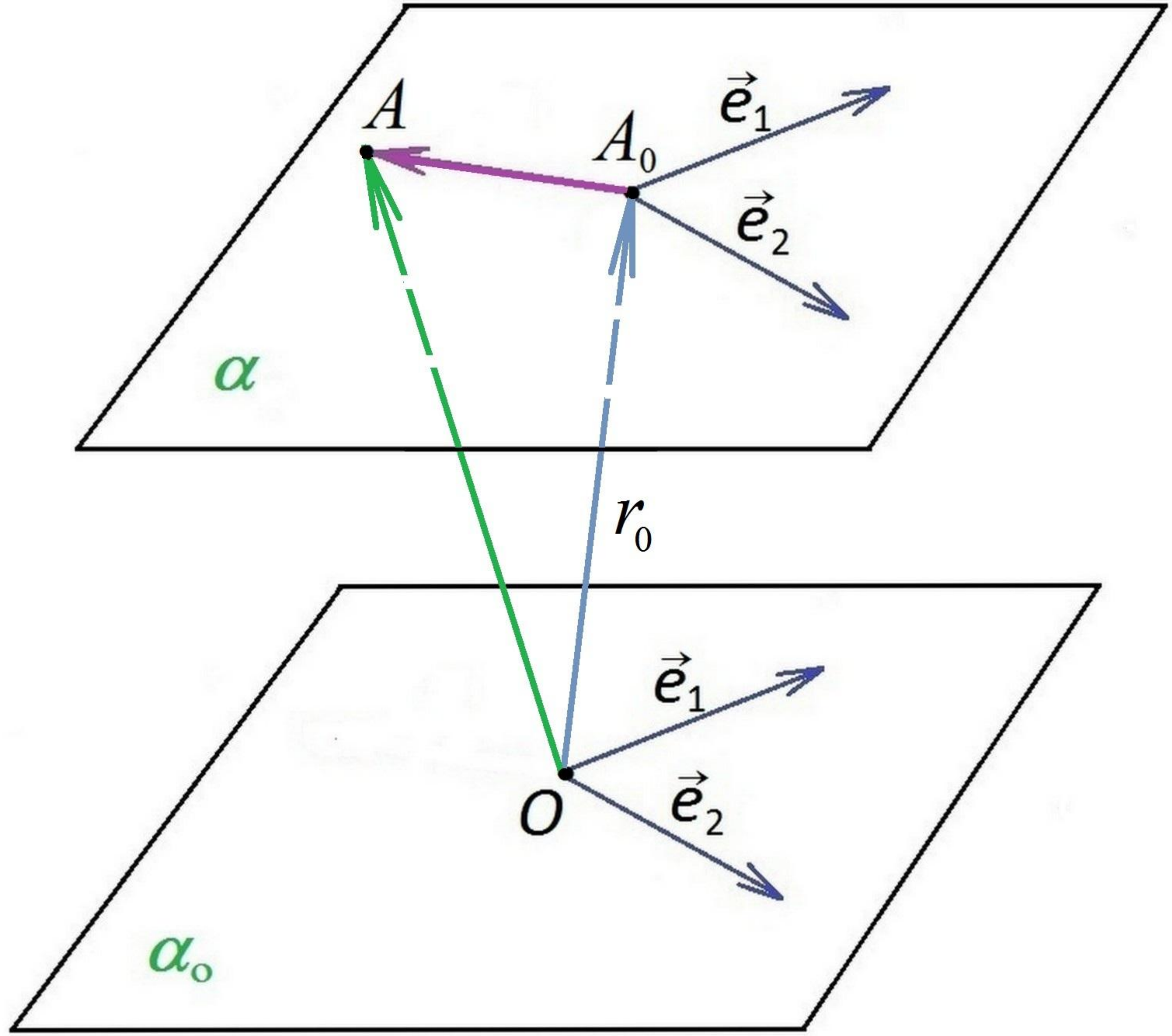
Арифметической плоскости $L_0 + r_0 \subset \mathbb{R}^3$ соответствует плоскость α в пространстве E^3, параллельная плоскости α_0 и проходящая через точку A_0, такую, что $r_{OA_0} = r_0$:

$$A \in \alpha \Leftrightarrow \text{векторы } \overrightarrow{A_0A},\ \vec{e}_1 \text{ и } \vec{e}_2 \text{ компланарны} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_0A} \in \mathcal{L}in(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \Leftrightarrow r_{A_0A} \in \mathcal{L}in(e_1, e_2) = L_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_{OA} - r_{OA_0} = r_{A_0A} \in L_0 \Leftrightarrow r_{OA} \in L_0 + r_{OA_0} = L_0 + r_0 .$$

Итак, $A \in \alpha \Leftrightarrow r_{OA} \in L_0 + r_0$.


A
A_0
$\vec{e}_1$
$\vec{e}_2$
α
r_0
$\vec{e}_1$
$\vec{e}_2$
O
α_o

Пусть $\mathcal{T}_A$ – арифметическая траектория точки A:

$$\mathcal{T}_A = \{\, r_{OA}(t) \mid t \in (t_1,\, t_2)\} .$$

Теорема. Движение среды Σ относительно системы S является плоскопараллельным тогда и только тогда, когда существует такое двумерное подпространство L_0 в $\mathbb{R}^3$, что

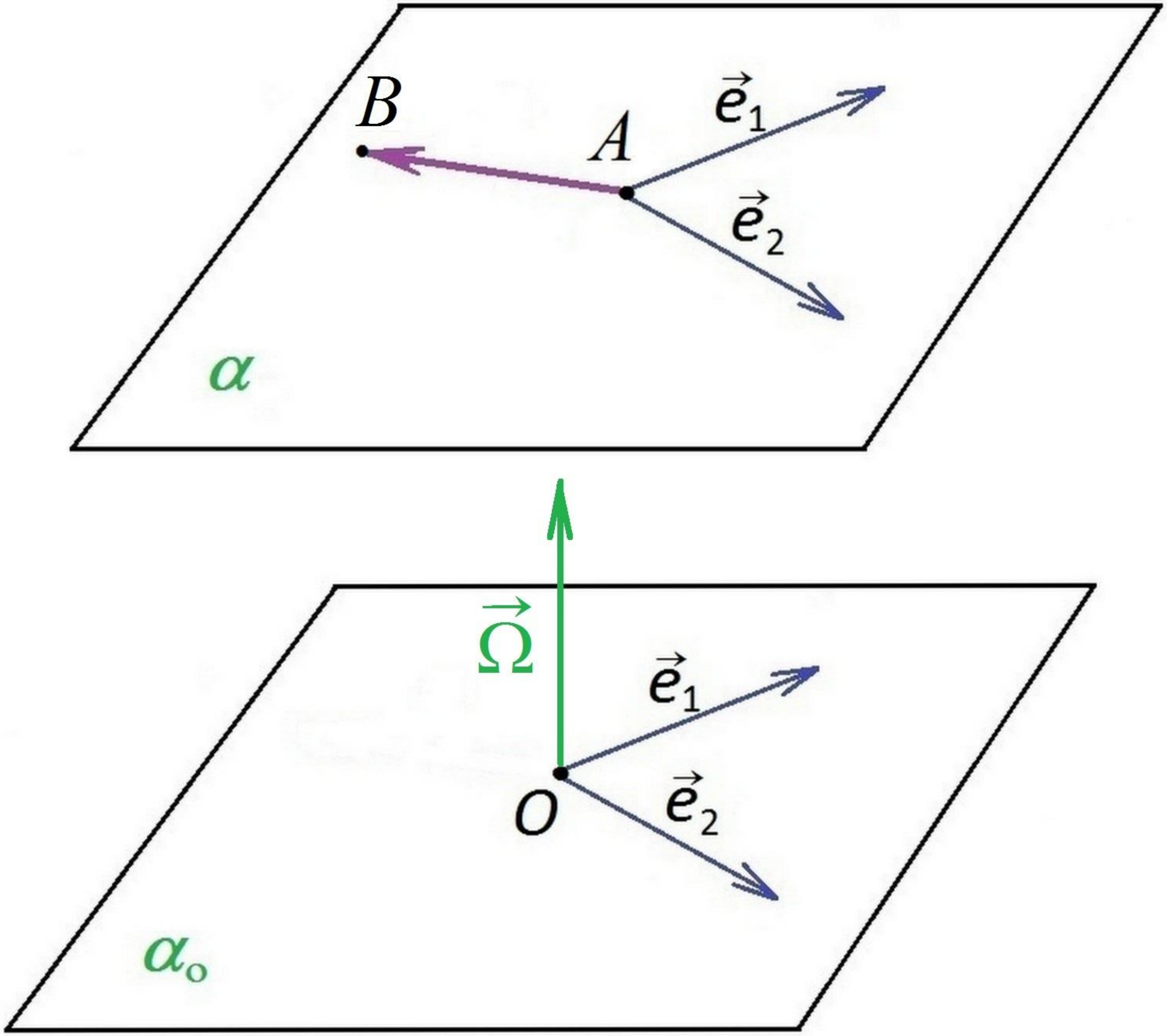
$$(\forall\, A \in \Sigma)(\exists\, p_A \in \mathbb{R}^3)\, [\mathcal{T}_A \subset p_A + L_0] .$$

§ 10. Вектор мгновенной угловой скорости при плоскопараллельном движении твердой среды

Пусть твердая среда Σ совершает плоскопараллельное движение относительно ДСО $S=(O,E_1,E_2,E_3)$, то есть существует такое двумерное подпространство L_0 (пространство скоростей) в $\mathbb{R}^3$, что $(\forall A\in\Sigma)(\forall t\in(t_1,\,t_2))[\,v_A(t)\in L_0\,]$. Рассмотрим также плоскость скоростей α_0: $(\forall A\in\Sigma)(\forall t\in(t_1,t_2))[\vec{v}_A(t)\parallel\alpha_0\,]$.

В силу теоремы Эйлера, в каждый момент времени t существует и единственен такой вектор $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t)$, что для любых точек $A, B \in \Sigma$ имеет место равенство $\vec{v}_{AB} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB}$. Вектор $\vec{\Omega}$ называется *вектором мгновенной угловой скорости твердой среды* Σ *по отношению к системе отсчета* S (см. § 7).

Зафиксируем произвольный момент времени $t = t_0$ и произвольную точку $A \in \Sigma$. Как доказано выше, точка $A \in \Sigma$ движется в некоторой плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$.



B
A
$\vec{e}_1$
$\vec{e}_2$
α
$\vec{\Omega}$
$\vec{e}_1$
$\vec{e}_2$
O
α_o

Рассмотрим точку $B \in \Sigma$, также движущуюся в плоскости α, такую, что в данный момент $t = t_0$ $\overrightarrow{AB} \perp \vec{\Omega}$. Из равенства $\vec{v}_{AB} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB}$ вытекает, что $\vec{v}_{AB} \perp \vec{\Omega}$ и $\vec{v}_{AB} \perp \overrightarrow{AB}$. Итак, вектор $\vec{\Omega}$ ортогонален двум неколлинеарным (ортогональным) векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$, параллельным плоскости α_0. Следовательно, в данный момент $t = t_0$ $\vec{\Omega} \perp \alpha_0$. С «арифметической» точки зрения это значит, что соответствующий арифметический (координатный) вектор $\Omega \perp L_0$.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. При плоскопараллельном движении твердой среды вектор мгновенной угловой скорости в каждый момент времени ортогонален пространству скоростей.

§ 11. Мгновенный центр скоростей при плоскопараллельном движении твердой среды

Пусть твердая среда Σ совершает плоскопараллельное движение относительно ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$, α_0 – плоскость скоростей среды Σ, то есть

$$(\forall A \in \Sigma)(\forall t \in (t_1, t_2))[\vec{v}_A(t) \parallel \alpha_0],$$

вектор $\Omega = \Omega(t)$ – вектор мгновенной угловой скорости среды Σ по отношению к системе отсчета S.

Теорема. Если в данный момент времени t вектор $\Omega(t) \neq 0$, то в каждой плоскости α, параллельной α_0, найдется единственная точка $C \in \Sigma \bigcap \alpha$, имеющая в данный момент времени t нулевую скорость.

Замечание 1. Точка $C \in \Sigma \bigcap \alpha$ с нулевой скоростью единственна для <u>данной плоскости</u> $\alpha \parallel \alpha_0$. В каждой плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$ существует <u>своя</u> точка $C = C_\alpha$ из среды Σ с нулевой скоростью (в данный момент времени t).

Замечание 2. В другой момент времени t' (при условии $\Omega(t') \neq 0$) в плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$ нулевую скорость будет иметь другая точка $C' \in \Sigma$, вообще говоря, отличная от C.

Определение. Точка $C \in \Sigma \bigcap \alpha$, имеющая в данный момент времени t нулевую скорость, называется ***мгновенным центром скоростей*** *твердой среды* Σ *в плоскости* α.

Замечание 3. Если в данный момент времени t $\Omega(t) = 0$, то для любых точек $A, B \in \Sigma$ $v_B - v_A = v_{AB} = \Omega \times r_{AB} = 0 \Rightarrow v_B = v_A$. В этом случае говорят, что среда Σ в данный момент времени совершает ***мгновенное поступательное движение.***

§12. Геометрический способ нахождения мгновенного центра скоростей

Пусть твердая среда Σ совершает плоскопараллельное движение относительно ДСО $S=(O,E_1,E_2,E_3)$, α_0 – плоскость скоростей среды Σ, $\Omega=\Omega(t)$ – вектор мгновенной угловой скорости среды Σ по отношению к системе отсчета S.

Рассмотрим две произвольные точки $A, B \in \Sigma$, движущиеся в некоторой плоскости $\alpha \parallel \alpha_0$. Пусть известны их векторы скоростей в данный момент времени (см. рис. 1). Построим на чертеже точку $C \in \Sigma \bigcap \alpha$ – мгновенный центр скоростей твердой среды Σ в плоскости α. По теореме Эйлера, $\vec{v}_A = \vec{v}_A - \vec{v}_C = \vec{v}_{CA} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CA}$, $\vec{v}_B = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CB}$ (так как $\vec{v}_C = \vec{0}$). Следовательно,

$$\vec{v}_A \perp \overrightarrow{CA}, \quad \vec{v}_B \perp \overrightarrow{CB}. \tag{14.1}$$

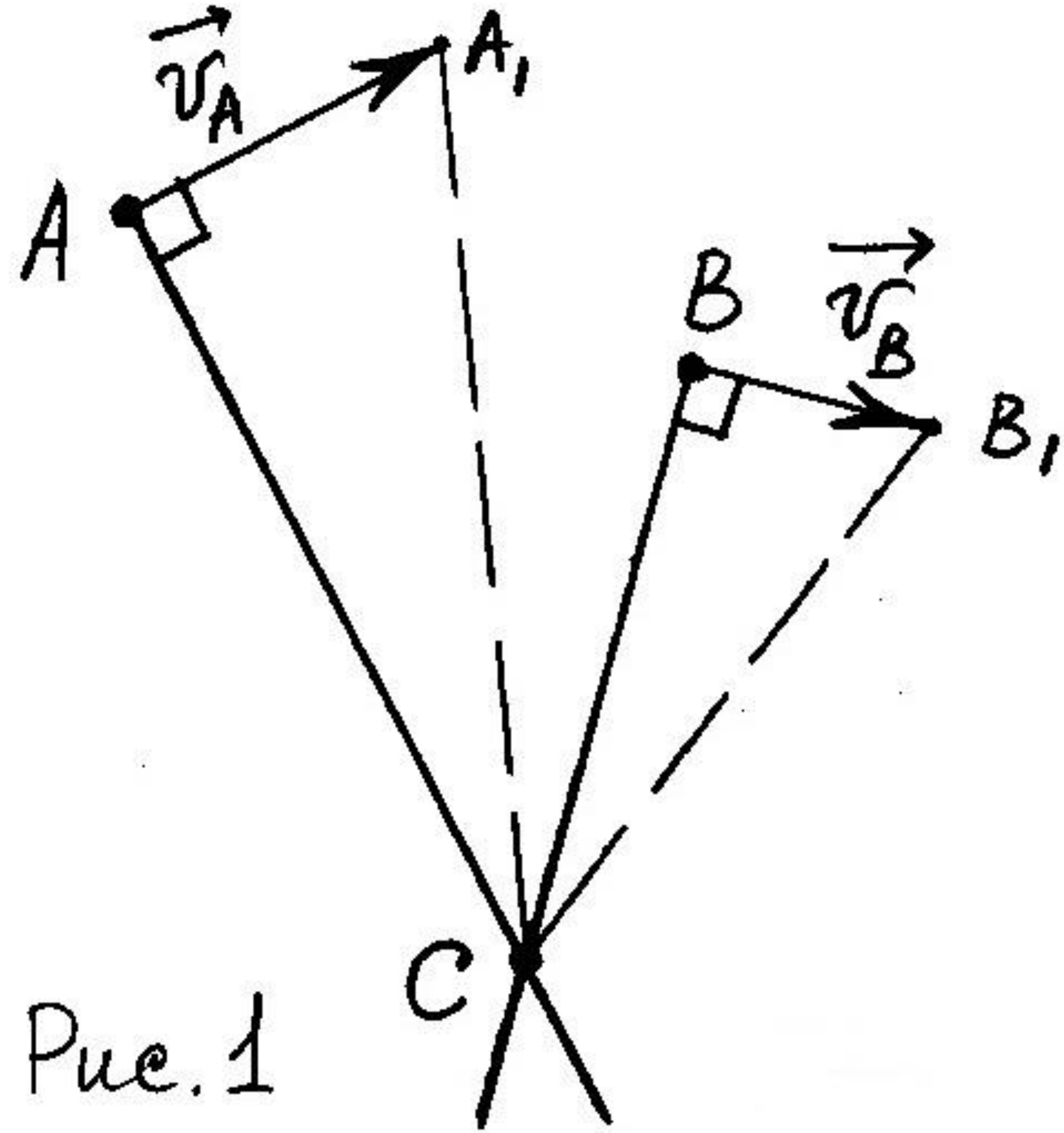


Рис. 1

Из равенств $\vec{v}_A = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{CA}$, $\vec{v}_B = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{CB}$ следует, что $|v_A| = |\Omega| \cdot |CA| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = |\Omega| \cdot |CA|$, $|v_B| = |\Omega| \cdot |CB|$, то есть

$$\frac{|AA_1|}{|BB_1|} = \frac{|v_A|}{|v_B|} = \frac{|CA|}{|CB|}. \qquad (14.2)$$

Итак, ***треугольники*** AA_1C ***и*** BB_1C ***подобны.***

Рассмотрим разные случаи расположения точек $A, B \in \Sigma$ и векторов $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$.

Случай 1 (рис. 1): векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ не коллинеарны. В силу (14.1), точка C – точка пересечения перпендикуляров к векторам $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, проведенных соответственно через точки A и B.

Случай 2 (рис. 2): $\vec{v}_A \uparrow\uparrow \vec{v}_B$, но $|v_A| \neq |v_B|$.

В этом случае точки A, B и C лежат на одной прямой. В силу подобия треугольников AA_1C и BB_1C, точки A_1, B_1 и C также лежат на одной прямой. Следовательно, точка C есть точка пересечения прямых (AB) и (A_1B_1).

Случай 3 (рис. 3): $\vec{v}_A \uparrow\downarrow \vec{v}_B$.

В этом случае точки A, B и C лежат на одной прямой и точки A_1, B_1 и C также лежат на одной прямой. Следовательно, точка C есть точка пересечения прямых (AB) и (A_1B_1).

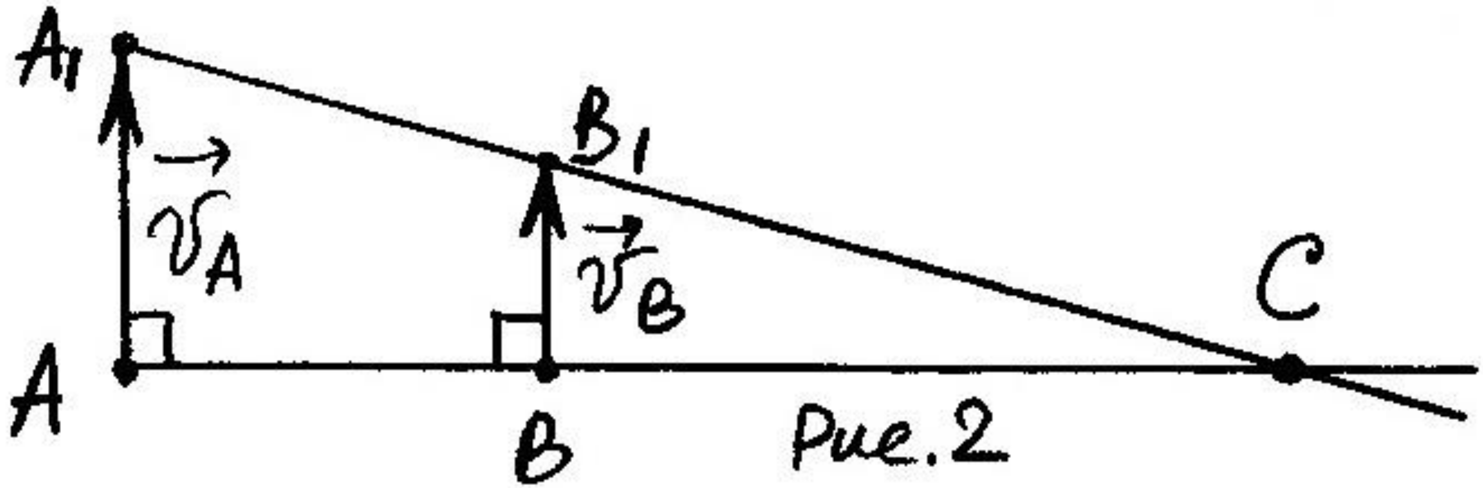


Рис.2

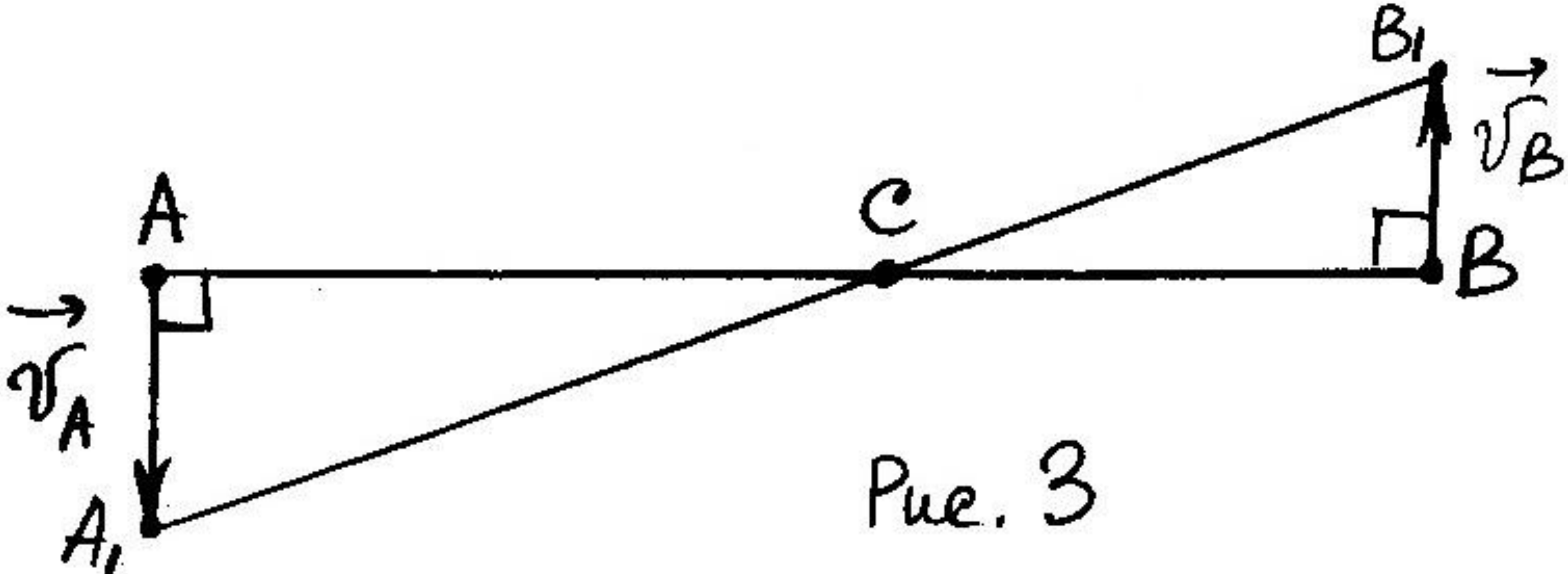


Рис. 3

Случай 4 : $\vec{v}_A = \vec{v}_B$. Тогда, в силу теоремы Эйлера,

$$0 = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_{AB} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB} \Rightarrow 0 = |\Omega| \cdot |AB| \Rightarrow \vec{\Omega} = \vec{0}.$$

В этом случае имеем мгновенное поступательное движение среды Σ (в данный момент в среде нет точки с нулевой скоростью).

Примеры

1. Рассмотрим недеформируемый стержень AB, движущийся в плоскости α. Точки A и B движутся по осям Oy и Ox соответственно (см. рис. 4). Отрезок AB можно считать частью некоторой твердой среды, совершающей плоскопараллельное движение относительно ПДСК $Oxyz$ ($Oz \perp \alpha$), для которой α – плоскость скоростей. Так как векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ не коллинеарны, то, согласно **случаю 1**, центр скоростей C стержня AB (или соответствующей твердой среды) – это точка пересечения перпендикуляров к векторам $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, проведенных соответственно через точки A и B.

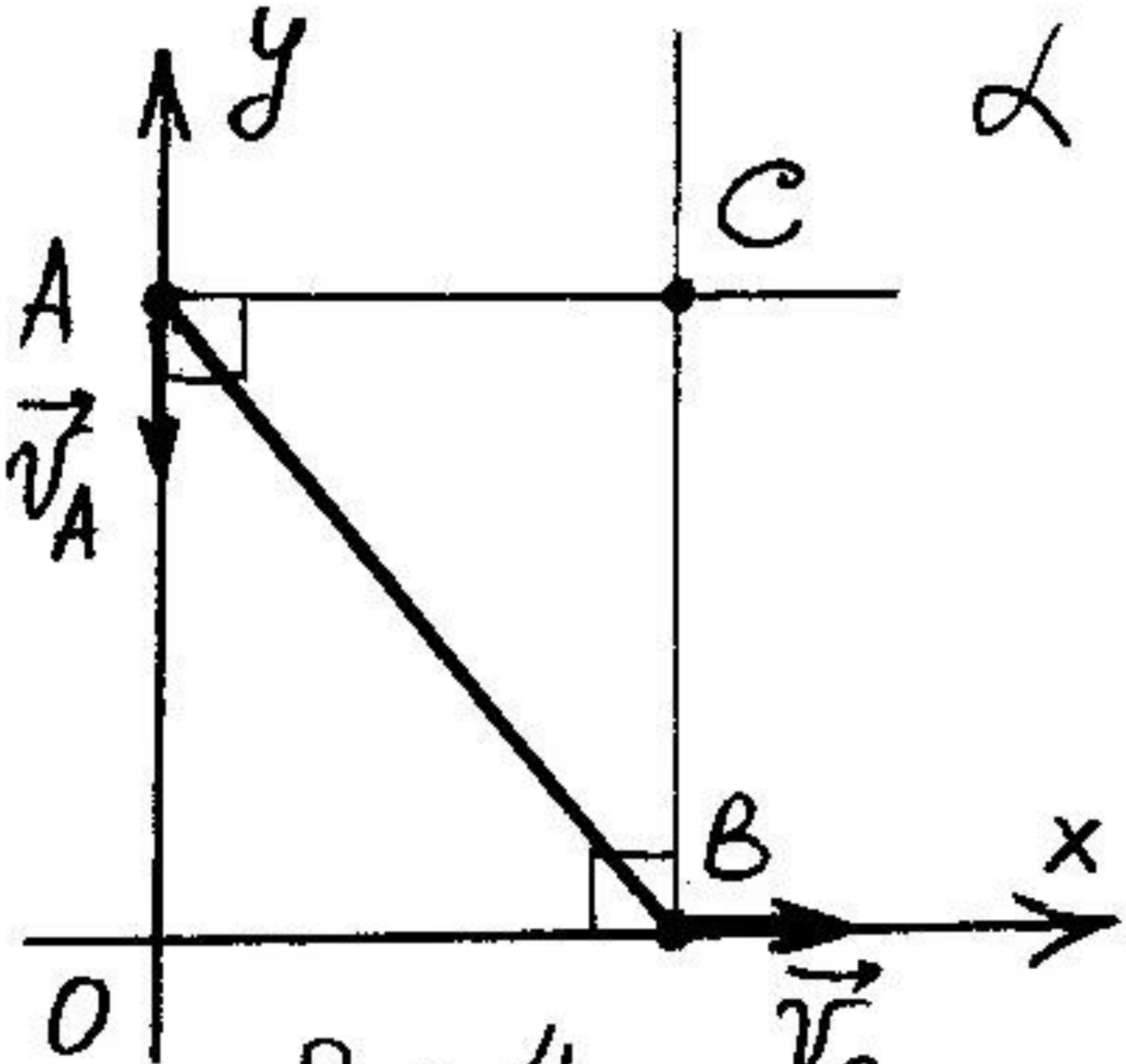


Рис. 4

2.

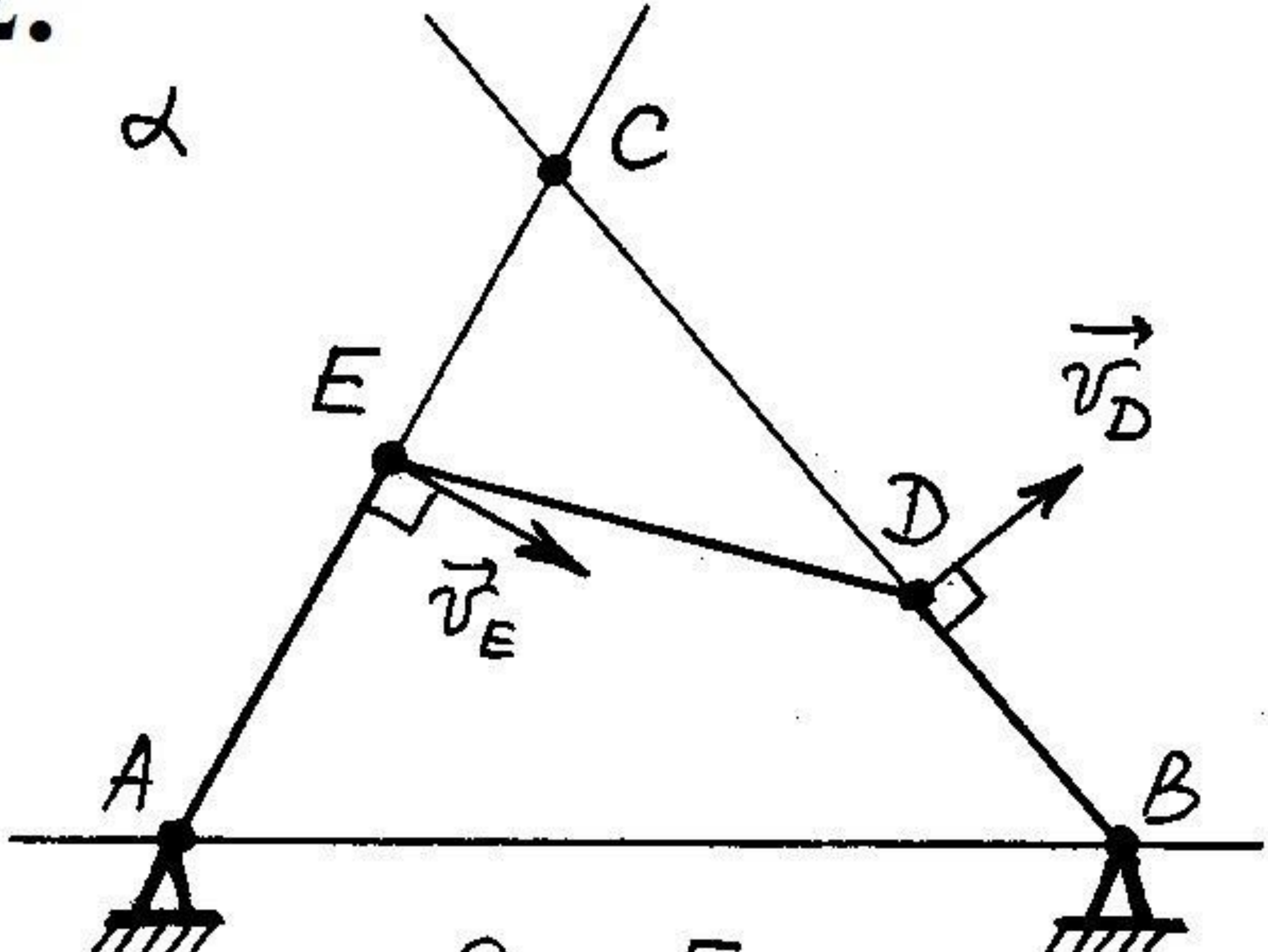


Рис. 5

AE, ED и DB – недеформируемые стержни, движущиеся в плоскости α, точки A и B – неподвижны (рис. 5). Найдем т. C – мгновенный центр скоростей стержня ED. Точки E и D движутся по окружностям (с центрами A и B соотв-но), следовательно, $\vec{v}_E \perp AE$, $\vec{v}_D \perp BD$. Согласно <u>случаю 1</u>, т. $C = (AE) \cap (BD)$.

Задачи

Задача (*). Докажите, что для любых двух точек A и B твердой среды проекции скоростей этих точек на прямую (AB) равны между собой.

Задачи из задачника И.В. Мещерского: 16.1, 16.7, 16.9, 16.11, 16.16, 16.18, 16.22

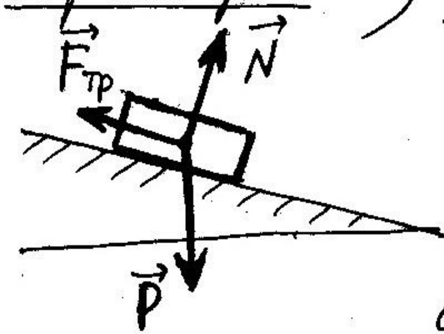
§ 13. Силы, действующие на точки материальной системы

Рассмотрим систему матер. точек $\Sigma_A = \{A_1, \dots, A_n\}$.
На точки Σ_A действуют силы двух видов:
внешние и внутренние.

<u>Внутренние силы</u> — силы, с которыми точки Σ_A действуют друг на друга (силы взаимодействия между точками системы Σ_A).

<u>Внешние силы</u> — силы, с которыми действуют на точки Σ_A посторонние точки (не входящие в Σ_A).

<u>Примеры.</u> 1) <u>Кирпич</u>, лежащий на наклонной шероховатой плоскости.



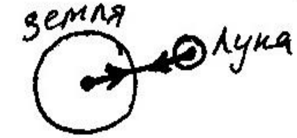
Кирпич = система мат. точек (молекул).

Внутренние силы системы "кирпич" — силы взаимодействия м/у молекулами кирпича.

Внешние силы — сила тяжести $\vec{P}$ (действует со стороны земли), сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

2) Система "Земля + Луна".

Внутренние силы системы — силы притяжения между этими небесными телами и силы взаимодействия м/у молекулами, образующими эти тела.

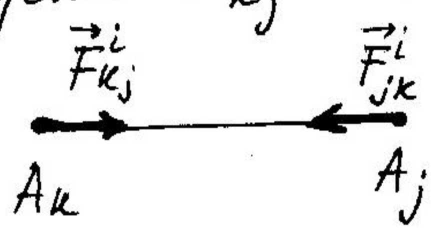


Силы притяжения со стороны Солнца и др. планет являются внешними.

Th Сумма всех внутренних сил системы матер. точек равна нулю.

Док-во.

Пусть $\vec{F}^{\,i}_{kj}$ — сила, с которой т. A_j действует на т. A_k;



В силу III закона Ньютона: $\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}$.

Тогда $$\sum_{1\le k,j\le n} \vec{F}^{\,i}_{kj} = \underbrace{\left(\vec{F}^{\,i}_{12} + \vec{F}^{\,i}_{21}\right)}_{\vec{0}} + \underbrace{\left(\vec{F}^{\,i}_{13} + \vec{F}^{\,i}_{31}\right)}_{\vec{0}} + \ldots + \underbrace{\left(\vec{F}^{\,i}_{1n} + \vec{F}^{\,i}_{n1}\right)}_{\vec{0}} + \ldots = \vec{0}.$$ ∎

<u>Замечание</u> Из внутренних сил системы можно составить кососимметрическую векторную матрицу:

$$\begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{F}^{i}_{12} & \vec{F}^{i}_{13} & \dots & \vec{F}^{i}_{1n} \\ \vec{F}^{i}_{21} & \vec{0} & \vec{F}^{i}_{23} & \dots & \vec{F}^{i}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{F}^{i}_{n1} & \vec{F}^{i}_{n2} & \vec{F}^{i}_{n3} & \dots & \vec{0} \end{pmatrix} \quad \left(\text{здесь мы полагаем: } \vec{F}^{i}_{kk} = \vec{0}\right).$$

§ 14. Импульс системы материальных точек

Пусть $\Sigma_A = \{A_1, \dots, A_n\}$ – система мат. точек,

$S = \{O, E_1, E_2, E_3\}$ – инерциальная ДСО,

m_k – масса A_k, $r_k = r_{OA_k} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$ – арифметический радиус-вектор т. A_k.

Тогда $v_k = \dot{r}_k = \begin{pmatrix} \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \\ \dot{z}_k \end{pmatrix}$ – скорость т. A_k,

а вектор $\underline{p_k = m_k v_k}$ наз-ся <u>импульсом т. A_k</u>.

Вектор $\underline{p = \sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} m_k v_k}$ называется <u>импульсом системы Σ_A</u>.

Рассмотрим скорость изменения импульса $\vec{p}(t)$:

$$\dot{\vec{p}}(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\vec{v}}_k(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\vec{r}}_k(t) \ominus$$

По II закону Ньютона $m_k \ddot{\vec{r}}_k$ есть сумма всех сил, действ-х на т. A_k, т.е. $m_k \ddot{\vec{r}}_k = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} F^i_{kj}}_{\text{сумма всех внутр-х сил, д-х на } A_k} + F^e_k$, где F^e_k – сумма всех внешних сил, действ-х на A_k.

$$\ominus \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} F^i_{kj}\right)}_{\substack{\text{сумма всех внутр. сил системы } \Sigma_A \\ = \vec{0}}} + \sum_{k=1}^{n} F^e_k = \sum_{k=1}^{n} F^e_k$$

– сумма всех внешних сил системы.

(см. §6)

Итак, мы доказали следующую теорему.

<u>**Th**</u> Скорость изменения импульса системы мат. точек равна сумме всех внешних сил, д-х на точки данной системы.

Следствие. Если сумма всех внешних сил системы мат. точек равна нулю, то импульс данной системы сохраняет постоянное значение.

(это следствие называется законом сохранения импульса системы мат. точек).

§ 15. Кинетический момент системы материальных точек

Рассм-м $\{A_1, \dots, A_n\}$ — систему мат. точек относит. непод. инерц. ДСО $S = \{O, E_1, E_2, E_3\}$; $m_1, \dots, m_n$ — массы т-к;

$r_k = r_{OA_k}$ — рад.-вектор. т. A_k в S.

<u>Опр.</u> <u>Кинетическим моментом</u> (моментом импульса, мом-м кол-ва движения) <u>т. A относит. начала к-т O</u> наз-ся вектор $M = r \times m v$, где $v = \dot{r}$ — скор. т. A.

<u>Кинетич. моментом сист. $\{A_1, \dots, A_n\}$ относ. т. O</u> наз-ся вектор $M = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k$, где $M_k = r_k \times m_k v_k$ — кин. мом-т т. A_k относ. O.

Рассм-м <u>скорость изменения</u> кин. мом. $M(t)$:

$$\dot{M}(t) = \sum \dot{M}_k = \underbrace{\sum \dot{r}_k \times m_k v_k}_{=0} + \sum r_k \times m_k \dot{v}_k =$$

(т.к. $\dot{r}_k = v_k$)

Рассм-м скорость изменения кин. мом. $M(t)$:

$$\dot M(t) = \sum \dot M_k = \sum \underbrace{\dot r_k \times m_k v_k}_{=0} + \sum r_k \times m_k \dot v_k =$$

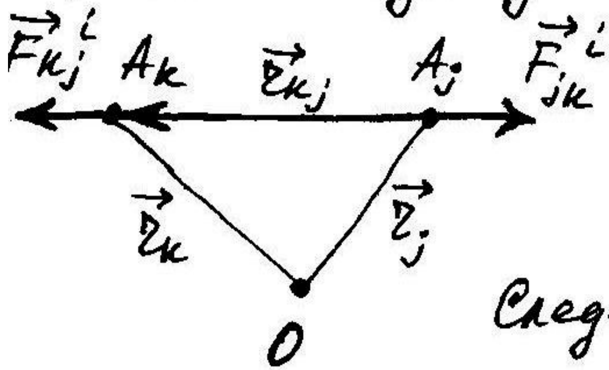
(т.к. $\dot r_k = v_k$)

$$= \sum r_k \times m_k \ddot r_k = \sum_{k=1}^{n} r_k \times \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} F_{kj}^{i} + F_k^{e}\right)}_{\text{сумма всех сил, д-х на т. } A_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} r_k \times \left(\sum_{j=1}^{n} F_{kj}^{i}\right) + \sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^{e} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} r_k \times F_{kj}^{i}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^{e} =$$

Рассм-м сумму $r_k \times F_{kj}^{i} + r_j \times \underset{-F_{kj}^{i}}{\underset{\parallel}{F_{jk}^{i}}} = r_k \times F_{kj}^{i} - r_j \times F_{kj}^{i} =$

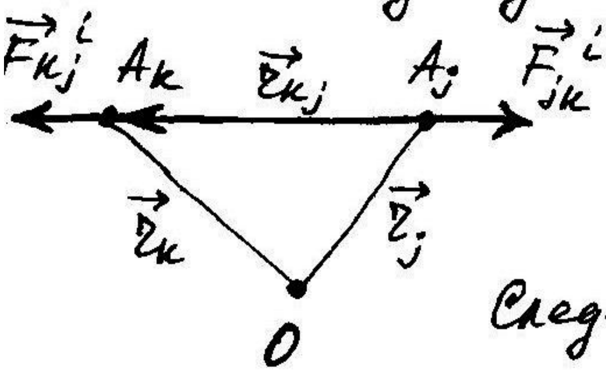


$$= \underbrace{(r_k - r_j)}_{r_{kj}} \times F_{kj}^{i} = \underbrace{r_{kj} \times F_{kj}^{i}}_{\text{колл-е}} = 0$$

След-но, $\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} r_k \times F_{kj}^{i}\right) = 0.$

$$= \sum_{k=1}^{n} r_k \times \left(\sum_{j=1}^{n} F_{kj}^{i}\right) + \sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^{e} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} r_k \times F_{kj}^{i}\right) + \sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^{e} =$$

Рассм-м сумму $r_k \times F_{kj}^{i} + r_j \times \overset{-F_{kj}^{i}}{\overset{\|}{F_{jk}^{i}}} = r_k \times F_{kj}^{i} - r_j \times F_{kj}^{i} =$



$$= \underbrace{(r_k - r_j)}_{r_{kj}} \times F_{kj}^{i} = \underbrace{r_{kj} \times F_{kj}^{i}}_{\text{колл-е}} = 0$$

След-но, $\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} r_k \times F_{kj}^{i}\right) = 0.$

$= \sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^{e}$. — сумма моментов внеш. сил относ. т. O.

Th Скорость изменения кинет. мом. системы равна сумме моментов внеш. сил системы (относ. т. O).

Следствие (закон сохранения кинетического момента)

Если сумма моментов всех внешних сил системы равна нулю, то кинетический момент системы сохраняет постоянное значение.

Пример. Система планет $\Sigma = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ движется вокруг звезды O; каждая планета P_k рассм-ся как матер. точка. Силы взаимодействия м/у планетами (силы притяжения) — это внутренние силы системы. Внешние силы системы — это силы притяжения, действующие на планеты со стороны центра O.

$\vec{F}_k^e$ (внеш. сила, действ-я на P_k) — центральная сила; $\vec{F}_k^e \parallel \vec{r}_k = \overrightarrow{OP_k} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ момент силы $\vec{F}_k^e$ относительно центра O

$$r_k \times F_k^e = 0.$$

След-но, $\sum\limits_{k=1}^{n} r_k \times F_k^e = 0 \Rightarrow \dot{M}(t) = 0 \Rightarrow \underline{M(t) = const}.$

Кинетический момент системы Σ сохр-ет постоянное знач-е.