Модель конфликта

I. Структура конфликта:

1. Участники конфликта (игроки): $N = \{\overline{1,n}\}$.
2. Возможности игроков: $u_i \in U_i$, $i \in N$.
3. Интересы игроков: $f_i(u)$, $i \in N$.
4. Характер конфликтного взаимодействия: коалиционная структура: коалиции интересов + коалиции действия.

II. Принцип оптимальности – описание правил рационального поведения игроков

Д.б. учтены (отражены):

- индивидуальная рациональность;
- устойчивость;
- эффективность.

$$\Gamma = \left\langle N, P, \{U^K\}_{K \in P}, \{F^K(u)\}_{K \in P} \right\rangle. \quad (1)$$

$N = \{\overline{1,n}\}$ - мн-во игроков;

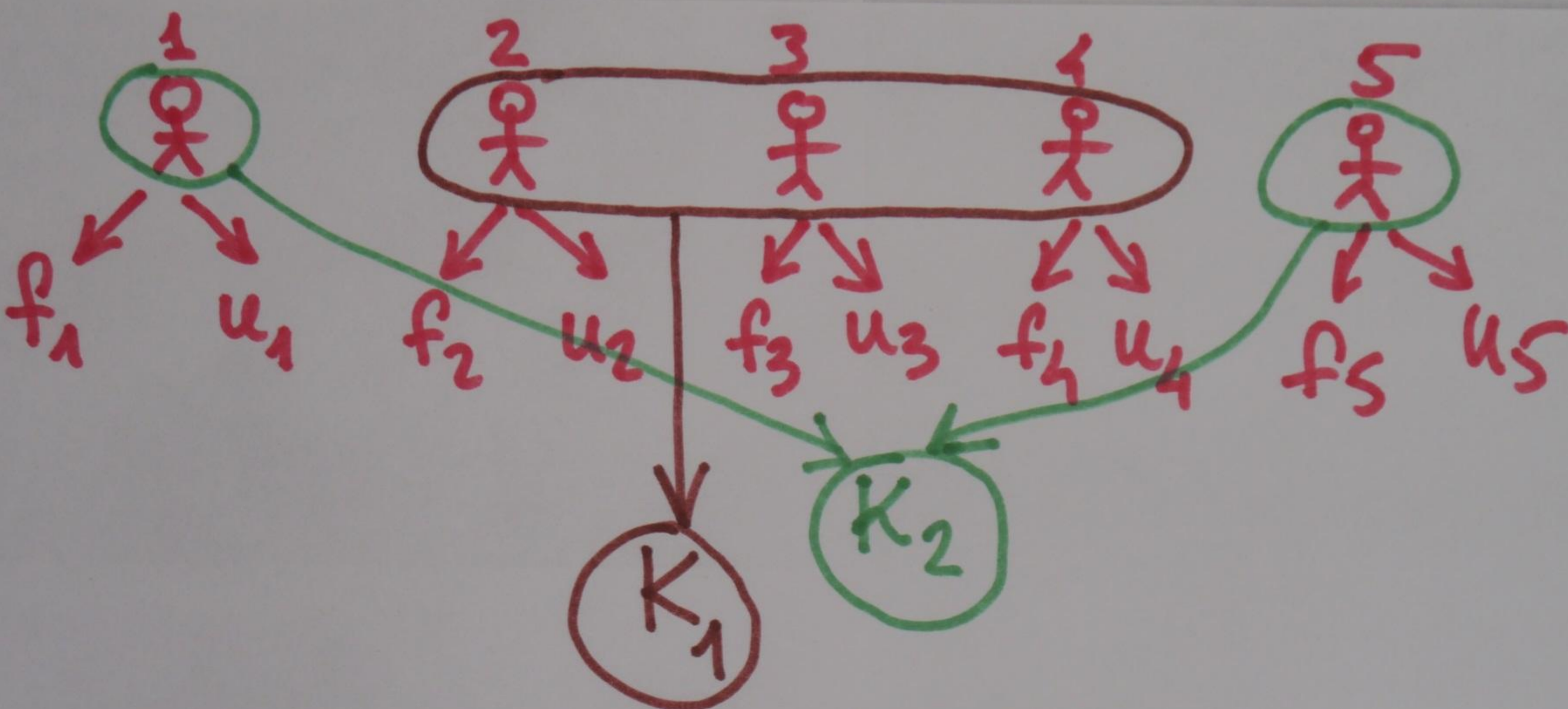
$P = \{K_1, \ldots, K_l \mid K_i \underset{i \neq j}{\cap} K_j = \varnothing \; ; \; \bigcup\limits_{i=1}^{l} K_i = N\}$ -

- коалиционная структура;

$K = \{K_д, K_и\}$ - коалиция;

$K_д$ - коалиция действия; $K_д \Rightarrow u^K$ - стратегия коалиции.

$K_и$ - коалиция интересов; $K_и \Rightarrow F^K$ - эффективность коалиции.



$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $P = \{K_1, K_2\}$

$K_1 = \{2, 3, 4\}$; $K_2 = \{1, 5\}$

$K_{1g} \Rightarrow u^{K_1} = [u_2, u_3, u_4]^T$; $K_{2g} \Rightarrow u^{K_2} = [u_1, u_5]^T$

$K_{1n} \Rightarrow F^{K_1} = [f_2, f_3, f_4]^T$, $K_{2n} \Rightarrow F^{K_2} = [f_1, f_5]^T$

Классификация игровых моделей ПР

Признак	Виды моделей		
По количеству игроков	1 игрока	2х игроков	N игроков
По количеству стратегий	Конечные	Бесконечные	
По характеру конфликтного взаимодействия	Антагонистические Бескоалиционные Коалиционные Кооперативные Иерархические		

Признак	Виды моделей	
По характеру выигрышей	С нулевой суммой	С ненулевой суммой
По виду ф-ций выигрышей	Матричные Биматричные Непрерывные Выпуклые Сепарабельные Типа дуэлей и др.	
По учету неопределенных факторов	Неопределенность цели Неопределенность среды Неопределенность "активного партнера"	
По колич. ходов	Одношаговые	Многошаговые

Матричная игра

Это игра Г вида (1), в которой:

U_1, U_2 – конечные мн-ва;

$f(u_1, u_2)$ – ф-ция дискретного аргумента.

Г:

I \ II	B_1	...	B_j	...	B_n
A_1	a_{11}		a_{1j}		a_{1n}
...					
A_i	...	...	a_{ij}	...	...
...					
A_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

$A = [a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}]$

$f(A_i, B_j) = a_{ij}$

Нижняя цена игры (чистая цена):

$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}, \ i = \overline{1,m}; \quad \alpha = \max\limits_i \alpha_i.$

$$\boxed{\alpha = \max_i \min_j a_{ij}} \Rightarrow \text{стратегия игрока I.}$$

(max min)

Верхняя цена игры (чистая цена):

$\beta_j = \max\limits_i \alpha_{ij}, \ j = \overline{1,n}; \quad \beta = \min\limits_j \beta_j$

$$\boxed{\beta = \min_j \max_i \alpha_{ij}} \Rightarrow \text{стратегия игрока II}$$

(min max)

Теорема 1. В матричной игре нижняя чистая цена НЕ превосходит верхней чистой цены игры.

Опр. Если для чистых стратегий A_i и B_j имеет место $\alpha = \beta = v$, то число v наз. чистой ценой игры. Пара чистых стратегий (A_i, B_j) наз. седловой точкой матричной игры, а элемент a_{ij} матрицы A наз. седловым элементом платежной матрицы.

Пример 1.

Две IT-компании продают услуги на телекоммуникационном рынке. Для увеличения своей доли на рынке компании используют рекламу:

A_1, B_1 – на TV;

A_2, B_2 – на радио;

A_3, B_3 – по Интернет;

A_4, B_4 – в прессе.

a_{ij} – доля рынка, которую выиграет компания I у компании II при использ. стратегий A_i и B_j

Платежная матрица:

$$
\begin{array}{cc|c}
A = & \begin{bmatrix} 8 & -2 & 9 & -3 \\ 6 & 5 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -9 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \alpha_i \\ -3 \\ 5 \\ -9 \\ 0 \end{array} \\
\hline
\beta_j & \begin{array}{cccc} 8 & 5 & 9 & 8 \end{array} &
\end{array}
$$

Найти решение игры.

$\alpha_1 = \min_j a_{1j} = -3$

$\alpha_2 = 5$

$\alpha_3 = -9$

$\alpha_4 = 0$

$\alpha = \max_i \alpha_i = 5$

$\beta_1 = \max_i a_{i1} = 8$

$\beta_2 = 5$

$\beta_3 = 9$

$\beta_4 = 8$

$\beta = 5 = \min_j \beta_j$

$\alpha = \beta = \nu = 5$ - чистая цена игры

$\Downarrow$

(A_2, B_2) - оптимальные стратегии.
(седловая точка).

<u>Вывод</u>: рекламу надо вести по радио
!

Всегда выигрывает компания I.

это точка равновесия
!

<u>Пример 2</u>. Каждый из игроков I и II может записать независимо от другого цифру: 1, 2, 3.

Платежная матрица формируется в соответствии с алгоритмом: $a_{ij} = n_1 - n_2$

<u>Цель</u> каждого игрока – максимизация своего выигрыша.

Составить платежную матрицу.
Найти оптимальные стратегии.

$$
\begin{array}{cc}
 & \alpha_i \\
A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ 0 \end{array} \\
\begin{array}{cccc} \beta_j & 2 & 1 & 0 \end{array} &
\end{array}
$$

(A_3, B_3) – оптимальные стратегии – седловая точка игры.

Пример 3. Каждый из игроков I и II может записать независимо от другого цифру: 1, 2, 3, 4.

Платежная матрица имеет вид:

$$A = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \alpha_i \\ -3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \\ \hline \beta_j \quad 5 \quad 7 \quad 8 \quad 9 & \end{array}$$

$\alpha = \max\limits_i a_i = 3$

$\beta = \min\limits_j \beta_j = 5$

Вопрос: Для кого правила игры являются более выгодными?

Ответ: Правила игры явл. более выгодными для игрока I.

Нижняя чистая цена игры: $\alpha = 3$.

т.е. при выборе стратегии A_2 (т.е. будет записывать число 2) игрок I получит выигрыш ≥ 3 ед.

Верхняя цена игры: $\beta = 5$.

т.е. при выборе B_1 (будет записывать 1) игрок II проиграет не более ($\leq$) 5 ед.

Замечание. Решение игры в чистых стратегиях отсутствует.

Игры без седловых точек

Опр. Смешанной стратегией игрока I наз. вектор $p = [p_1, \dots, p_m]^T$, где $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$. Аналогично, $q = [q_1, \dots, q_n]^T$ – смешанная стратегия игрока II, где $q_j \geq 0$,

$$\sum_j q_j = 1.$$

p_i, q_j – вероятности применения чистых стратегий A_i и B_j, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$.

<u>Опр</u>. Ф-ция $f(p,q)$:

$$f(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,p_i\,q_j \qquad (2)$$

называется платежной ф-цией матричной игры с матрицей $A=[a_{ij}]_{m\times n}$

<u>Обозначим</u>:

$S_m=\{p=[p_1,\dots,p_m]^T \mid p_i\geq 0,\ i=\overline{1,m};\ \sum_{i=1}^{m} p_i=1\}$.

$S_n=\{q=[q_1,\dots,q_n]^T \mid q_j\geq 0,\ j=\overline{1,n};\ \sum_{j=1}^{n} q_j=1\}$.

Игра:

$$\Gamma = \langle S_m, S_n, f(p,q) \rangle \quad (3)$$

называется <u>смешанным расширением</u> матричной игры с матрицей A.

<u>Замечание</u>. Чистые стратегии игроков явл. подмножествами S_m и S_n: чистой стратегии A_i соотв. вектор $p = [0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0 \dots 0]^T$ с компонентами:

$$[p_i = 1, p_k = 0, k = \overline{1,m}, k \neq i]^T.$$

<u>Опр.</u> Смешанные стратегии:

$p^* = [p_1^*, \dots, p_m^*]^T$ и $q^* = [q_1^*, \dots, q_n^*]^T$

в игре (3) наз. оптимальными, если

$\forall p \in S_m, q \in S_n$ выполняется условие:

$$f(p, q^*) \leq f(p^*, q^*) \leq f(p^*, q)$$

<u>Опр.</u> Нижняя цена матричной игры в смешанных стратегиях: $\alpha = \max\limits_{p \in S_m} \min\limits_{q \in S_n} f(p, q)$

Верхняя цена в смешанных стратегиях:

$$\beta = \min_{q \in S_n} \max_{p \in S_m} f(p, q).$$

Теорема (Дж. фон Нейман) - Основная теорема матричных игр.

Любая матричная игра имеет цену в смешанных стратегиях, т.е.

$$v = \max_{p\in S_m}\min_{q\in S_n} f(p,q) = \min_{q\in S_n}\max_{p\in S_m} f(p,q) =$$

$$= f(p^*,q^*).$$

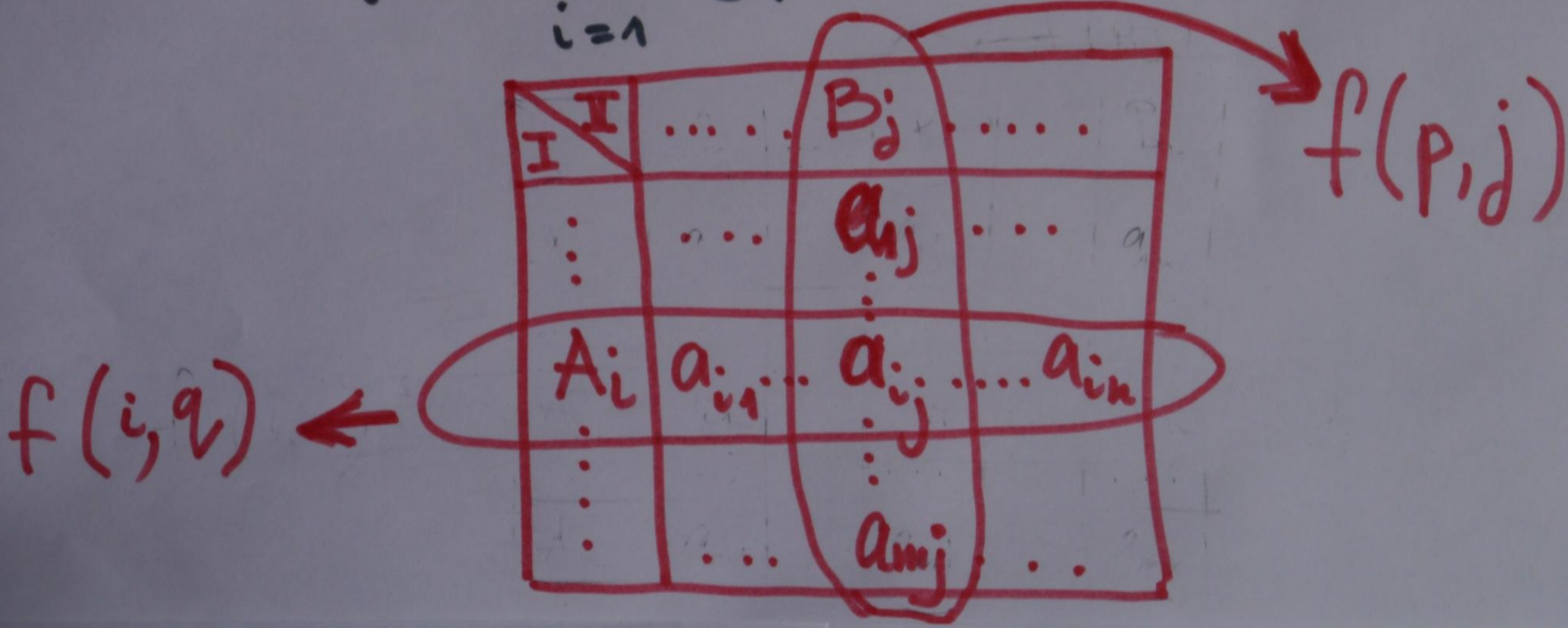
Это означает:

$$f(p^*,q^*) = \min_{q\in S_n} f(p^*,q) = \max_{p\in S_m} f(p,q^*)$$

Введем обозначения:

$$f(i,q) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \; ; \quad q = [q_1, \dots, q_n]^T$$

$$f(p,j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \; ; \quad p = [p_1, \dots, p_m]^T$$



Следствие 1. Пусть v – цена матричной игры. Тогда для того, чтобы (p^*, q^*) были оптимальными стратегиями игроков, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$f(i, q^*) \leq v \leq f(p^*, j), \ \forall i, j.$$

Опр. Чистые стратегии, входящие в оптимальную смешанную стратегию игрока с вероятностью $\neq 0$, называются <u>активными стратегиями</u>.

Следствие 2 (свойство оптимальных стратегий).

Пусть (p^*, q^*) – оптимальные стратегии матричной игры, а v – цена игры.

Тогда если $p_i^* > 0$, то $f(i, q^*) = v$;

если $q_j^* > 0$, то $f(p^*, j) = v$.

Кроме того, имеет место:

$$\min_{j=\overline{1,n}} f(p^*, j) = \max_{p \in S_m} \min_{j=\overline{1,n}} f(p, j) = \qquad (*)$$

$$= \min_{q \in S_n} \max_{i=\overline{1,m}} f(i, q) = \max_{i=\overline{1,m}} f(i, q^*) = v$$

Смысл следствия 2:

Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии (смешанной), то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры, независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

Методы решения матричных игр

<u>Пример</u> (2×2). $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Пусть решение игры в <u>чистых стратегиях</u> отсутствует $\Longrightarrow$ надо искать решение в смешанных стратегиях.

По теореме фон Неймана:

$$p^* = [\underset{\neq 0}{p_1^*}, \underset{\neq 0}{p_2^*}] \; ; \; q^* = [\underset{\neq 0}{q_1^*}, \underset{\neq 0}{q_2^*}].$$

– все стратегии игроков активные.

Аналитический метод.

Игрок II применяет B_1:

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v \qquad (1)$$

Игрок II применяет B_2:

$$a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v \qquad (2)$$

Учитываем:

$$p_1^* + p_2^* = 1 \qquad (3).$$

Получили систему линейных ур-ний (1), (2), (3) с 3-мя неизвестными: p_1^*, p_2^*, v.

$$p_2^* = 1 - p_1^* \longrightarrow \text{в (1) и (2)}.$$

$$\Downarrow$$

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \qquad (4).$$

<u>Определяем q^*</u>:

$$\begin{cases} a_{11} q_1^* + a_{12} q_2^* = v & \underline{\mathrm{I}} \text{ применяет } A_1: \\ a_{21} q_1^* + a_{22} q_2^* = v & \mathrm{I} \text{ применяет } A_2: \\ q_1^* + q_2^* = 1 & \text{Учитываем :} \end{cases}$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad q_2^* = 1 - q_1^*.$$

Пример.

$$A = \begin{array}{cc} & \alpha_i \\ \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 5 & 4 \end{array} & \beta_j \end{array} \qquad \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \end{array} \Big\} \; \alpha \neq \beta.$$

$$\begin{array}{l} B_1: \\ B_2: \\ \\ \end{array} \begin{cases} 5p_1^* + 2p_2^* = v \Longrightarrow 5p_1^* + 2(1 - p_1^*) = v \\ -p_1^* + 4p_2^* = v \Longrightarrow -p_1^* + 4(1 - p_1^*) = v \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases}$$

$$5p_1^* + 2 - 2p_1^* = -p_1^* + 4 - 4p_1^*$$

$$8p_1^* = 2; \quad p_1^* = \frac{1}{4}; \quad p_2^* = \frac{3}{4}$$

Аналогічно:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1: & 5q_1^* - q_2^* = v \\ A_2: & 2q_1^* + 4q_2^* = v \\ & q_1^* + q_2^* = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} 5q_1^* - (1-q_1^*) = v \\ 2q_1^* + 4(1-q_1^*) = v \end{array}$$

$$5q_1^* - 1 + q_1^* = 2q_1^* + 4 - 4q_1^*$$

$$8q_1^* = 5; \quad q_1^* = \frac{5}{8}; \quad q_2^* = \frac{3}{8}$$

$$v = 5p_1^* + 2p_2^* = 5\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$v = 5q_1^* - q_2^* = 5\cdot\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}.$$

Проверим, что решение (p^*, q^*) явл. <u>равновесным</u>: $f(p, q^*) \le f(p^*, q^*) \le f(p^*, q)$

Зададим $\forall\, p = (p_1, p_2)$ и $\forall\, q = (q_1, q_2)$

$$p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad q = \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)$$

$$f(p, q) = a_{11} p_1 q_1 + a_{12} p_1 q_2 + a_{21} p_2 q_1 + a_{22} p_2 q_2$$

$$f(p^*, q) = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{3}{4}\right)\frac{7}{8} =$$

$$= \frac{5}{32} - \frac{7}{32} + \frac{6}{32} + \frac{84}{32} = \frac{88}{32} = \frac{11}{4} = v_0$$

$$f(p, q^*) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{25 - 3 + 10 + 12}{16} =$$

$$= 44/16 = 11/4$$

Геометрический метод

$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; Воспользуемся следствием 2.

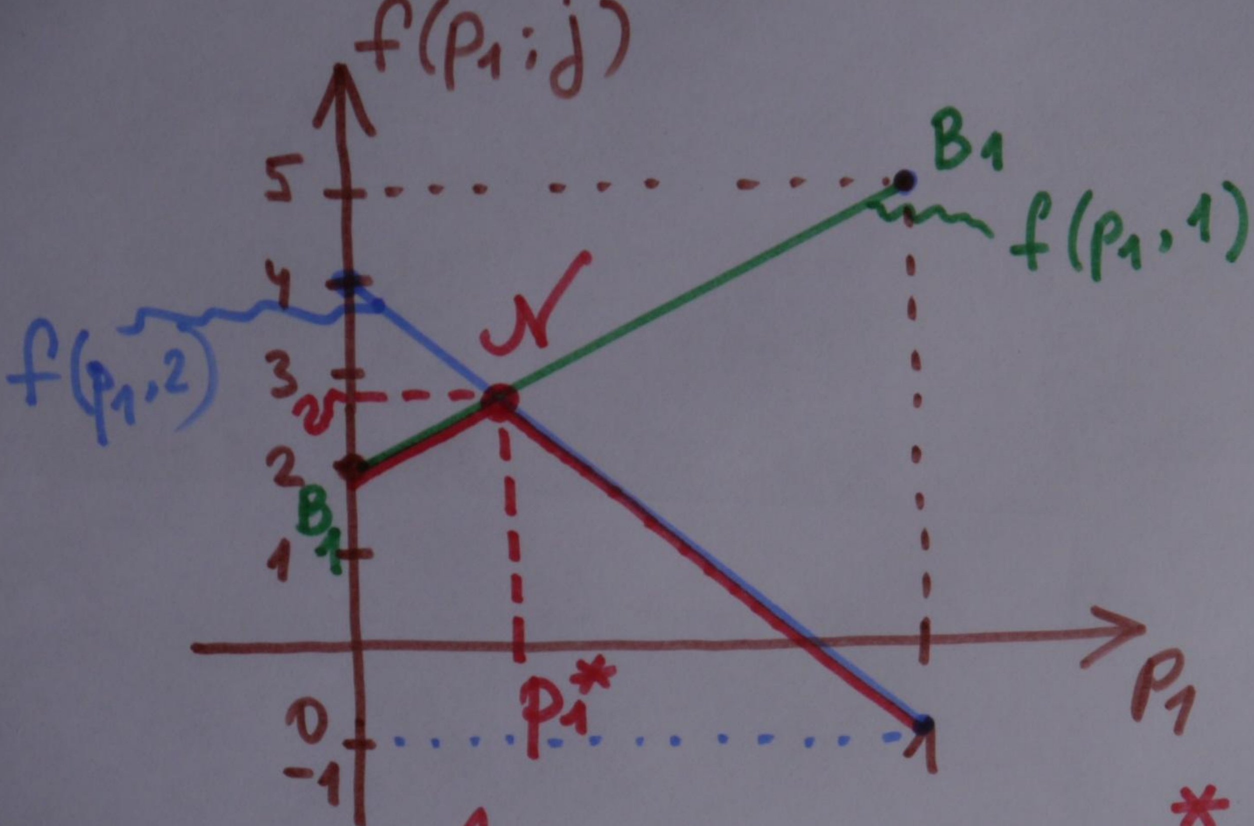
$$v = \max_{p \in S_m} \min_{j=\overline{1,n}} f(p, j)$$

При фиксир. B_1: $\left. \begin{array}{l} f(p,1) = 5p_1 + 2p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow$

$$\rightarrow f(p,1) = 3p_1 + 2$$

При фиксир. B_2: $\left. \begin{array}{l} f(p,2) = -p_1 + 4p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow$

$$\rightarrow f(p,2) = -5p_1 + 4$$



N - седловая точка $\Rightarrow p^*$

$$\left.\begin{aligned} f(p_1^*,1) &= 3p_1^*+2 = v \\ f(p_1^*,2) &= -5p_1^*+4 = v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3p_1^* - v &= -2 \\ -5p_1^* - v &= -4 \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta_{p_1^*} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

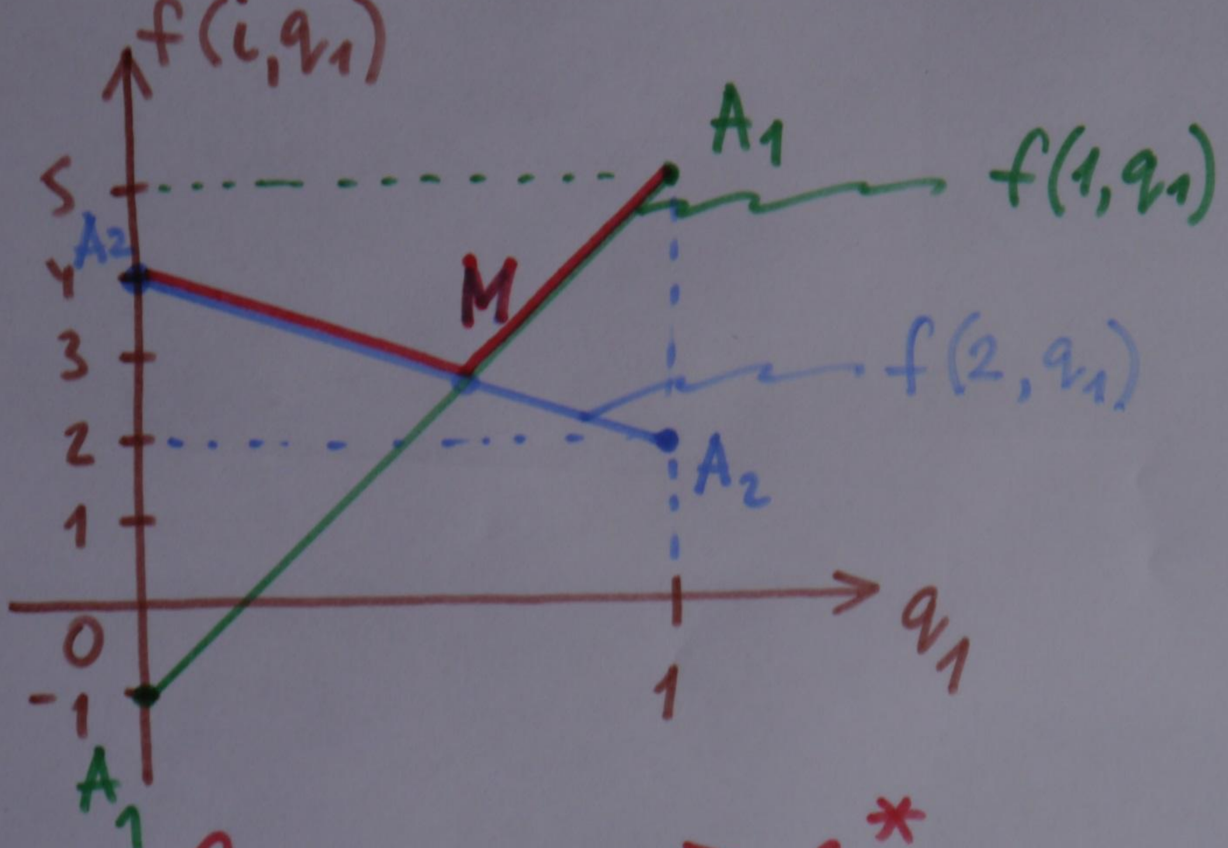
$$\Delta_v = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -22; \quad \begin{cases} p_1^* = \dfrac{1}{4}; & v = \dfrac{11}{4} \\ p_2^* = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Определим q^*: По Следствию 2:

$$\min_{q \in S_n} \max_{i=\overline{1,m}} f(i,q) = v$$

При фиксир. A_1: $f(1,q) = \begin{cases} 5q_1 - q_2 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow f(1,q_1) = 6q_1 - 1$

При фиксир A_2: $\left. \begin{matrix} f(2,q) = 2q_1 + 4q_2 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(2,q_1) = -2q_1 + 4$



M – седловая точка $\Rightarrow q^*$.

$$\left.\begin{aligned} f(1, q_1^*) &= 6q_1^* - 1 = v \\ f(2, q_1^*) &= -2q_1^* + 4 = v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 6q_1^* - v &= 1 \\ -2q_1^* - v &= -4 \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta_{a_1^*} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -22; \quad \begin{cases} a_1^* = \dfrac{5}{8} \\ a_2^* = \dfrac{3}{8} \end{cases} ; \quad v = \frac{11}{4}$$

Матричные игры $2\times n$ и $m\times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix}$$

$2\times n$ $\qquad\qquad$ $m\times 2$

Теорема. Любая матричная игра с матрицей $[m\times n]$ имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока $\leq \ell$, где $\ell = \min\{m, n\}$.

Следствие. Матричная игра $2\times n$ или $m\times 2$ всегда имеет решение, содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков.

Пример.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & & & & \alpha_i \\ A = & 1 & 4 & 7 & 1 \\ & 6 & 3 & 2 & 2 \\ \hline \beta_j & 6 & 4 & 7 & \end{array}$$

α_i: 1, 2 $\longrightarrow$ $\alpha = 2$

β_j: 6, 4, 7 $\longrightarrow$ $\beta = 4$

$\alpha \neq \beta$