

# Модель конфлікта

10

## I. Структура конфлікта :

1. Учасники конфлікта (гроки):  $N = \{1, n\}$ .
2. Возможности гроков:  $u_i \in U_i, i \in N$ .
3. Інтереси гроков:  $f_i(u), i \in N$ .
4. Характер конфліктного взаємодія:  
коаліційна структура: коаліції інтересов + коаліції діявдя.

- ## II. Принцип оптимальности — описание правил рационального поведения игроков
- Ф.Б. угієны (ображены) :
- индивидуальная рациональность ;
  - устойчивость ;
  - эффективность .

$$\Gamma = \left\langle N, P, \{U^k\}_{k \in P}, \{F^k(u)\}_{k \in P} \right\rangle. \quad (1)$$

$N = \{1, \bar{n}\}$  - мн-во игроков;

$P = \{K_1, \dots, K_e \mid K_i \cap K_j = \emptyset; \bigcup_{i=1}^e K_i = N\}$  -

- коалиционная структура;

$K = \{K_d, K_n\}$  - коалиция;

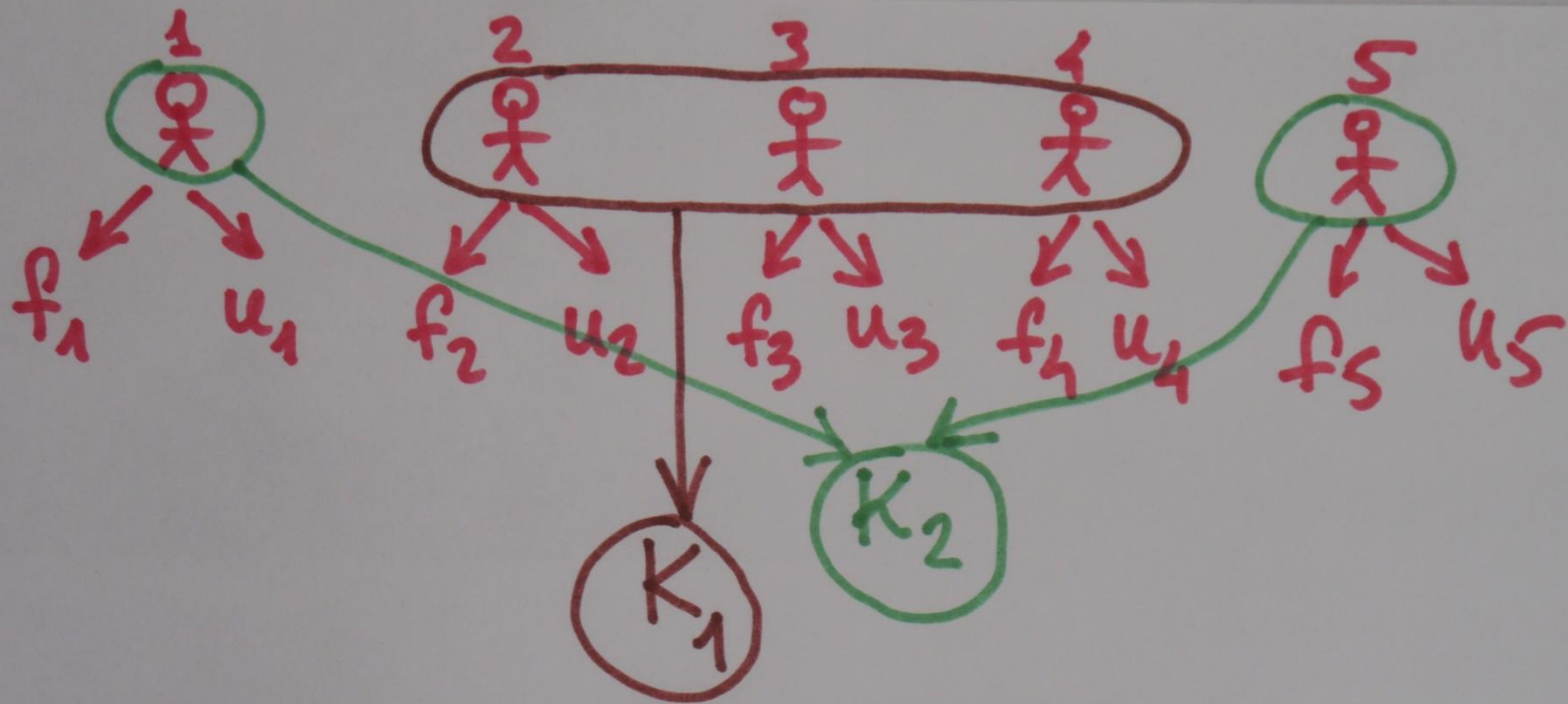
$K_d$  - коалиция действия;

$K_d \Rightarrow u^k$  - стратегия коалиции.

$K_n$  - коалиция интересов;

$K_n \Rightarrow F^k$  - эффективность коалиции.





$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\} ; P = \{K_1, K_2\}$$

$$K_1 = \{2, 3, 4\} ; K_2 = \{1, 5\}$$

$$K_{1g} \Rightarrow u^{K_1} = [u_2, u_3, u_4]^T$$

$$K_{2g} \Rightarrow u^{K_2} = [u_1, u_5]^T$$

$$K_{1n} \Rightarrow f^{K_1} = [f_2, f_3, f_4]^T$$

$$K_{2n} \Rightarrow f^{K_2} = [f_1, f_5]^T$$

# Классификация игровых моделей ПР.

3

Признак	Виды моделей
По количеству игроков	1 игрока   2х игроков   N игроков
По количеству стратегий	Конечные   Бесконечные
По характеру конфликтного взаимодействия	Антагонистические Бескоалиционные Коалиционные Кооперативные Иерархические



Признак

Виды моделей

По характеру выигрышей

С нулевой суммой

С ненулевой суммой

По виду функции выигрышей

Матричные  
Биматричные  
Непрерывные  
Выпуклые  
Сепарабельные  
Типа Шуэлей и др.

По учету неопределенных факторов

Неопределенность цели  
Неопределенность среды  
Неопределенность "активного партнера"

По колич. ходов

Одношаговые | Многошаговые

## Матричная игра

Это игра  $\Gamma$  вида (1), в которой:

$U_1, U_2$  - конечные мн-ва;

$f(u_1, u_2)$  - ф-ция дискретного аргумента.

$\Gamma$ :

I \ II	$B_1$	...	$B_j$	...	$B_n$
$A_1$	$a_{11}$		$a_{1j}$		$a_{1n}$
...					
$A_i$	...	...	$a_{ij}$	...	...
...					
$A_m$	$a_{m1}$	...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$

$$A = [a_{ij}, \begin{matrix} i = \overline{1, m} \\ j = \overline{1, n} \end{matrix}]$$

$$f(A_i, B_j) = a_{ij}$$

Нижняя цена игры (чистая цена):

6

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}; \quad \alpha = \max_i \alpha_i.$$

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

$\Rightarrow$  стратегия игрока I.  
(max min)

Верхняя цена игры (чистая цена):

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \quad j = \overline{1, n}; \quad \beta = \min_j \beta_j$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

$\Rightarrow$  стратегия игрока II.  
(min max)



Теорема 1. В матричной игре

7

нижняя чистая цена НЕ превосходит  
верхней чистой цены игры.

Опр. Если для чистых стратегий

$A_i$  и  $B_j$  имеет место  $\alpha = \beta = \gamma$ , то  
число  $\gamma$  наз. чистой ценой игры.

Пара чистых стратегий  $(A_i, B_j)$  наз. седловой  
точкой матричной игры, а элемент  $a_{ij}$   
матрицы  $A$  наз. седловым элементом  
платежной матрицы.



Пример 1.

Две IT-компании продают услуги на телекоммуникационном рынке. Для увеличения своей доли на рынке компании используют рекламу:

$A_1, B_1$  - на TV;

$A_2, B_2$  - на радио;

$A_3, B_3$  - по Интернету;

$A_4, B_4$  - в прессе.

$a_{ij}$  - доля рынка, которую выигрывает компания I у компании II при использовании стратегии  $A_i$  и  $B_j$ .

Платежная матрица:

				$\alpha_i$
	8	-2	9	-3
	6	5	6	8
	-2	4	-9	-9
	2	3	6	0
$\beta_j$	8	5	9	8

Найти решение игры.

$$\alpha_1 = \min_j a_{1j} = -3$$

$$\alpha_2 = 5$$

$$\alpha_3 = -9$$

$$\alpha_4 = 0$$

$$\alpha = \max_i \alpha_i = 5$$

$$\beta_1 = \max_i a_{i1} = 8$$

$$\beta_2 = 5$$

$$\beta_3 = 9$$

$$\beta_4 = 8$$

$$\beta = 5 = \min_j \beta_j$$



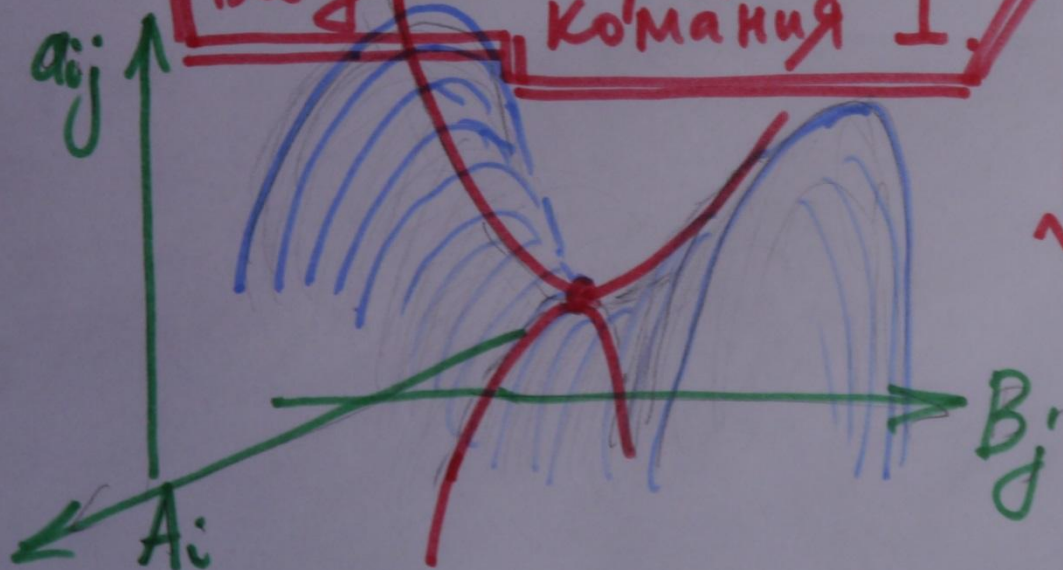
$\alpha = \beta = \gamma = 5$  - гисая  
цена игры

10

$(A_2, B_2)$  - оптимальные стратегии.  
(седловая точка).

Вывод: рекламу надо вести по радио

▽  
0



это точка  
равновесия

▽  
0

Пример 2. Каждый из игроков I и II может записать независимо от другого цифру: 1, 2, 3.

Платежная матрица формуется в соответствии с алгоритмом:  $a_{ij} = n_1 - n_2$

Цель каждого игрока — максимизация своего выигрыша.

Составить платежную матрицу.

Найти оптимальные стратегии.



$$A = \begin{matrix} & & & \alpha_i \\ \begin{matrix} \beta_j \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

$(A_3, B_3)$  - оптимальные стратегии - седловая точка игры.

Пример 3. Каждый из игроков I и II может записать независимо от другого цифру: 1, 2, 3, 4.

Платёжная матрица имеет вид:

$$A = \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & 5 & \alpha_i \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 9 & 2 \\ \hline \beta_j & 5 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

$$\alpha = \max_i \alpha_i = 3$$

$$\beta = \min_j \beta_j = 5$$

Вопрос:

Для кого правила игры являются более выгодными?



Ответ: Правила игры явл. более  
выгодными для игрока I.

Нижняя граница цены игры:  $\alpha = 3$ .

Т.е. при выборе стратегии  $A_2$  (т.е.  
будет записываться число 2) игрок I  
получит выигрыш  $\geq 3$  ед.

Верхняя цена игры:  $\beta = 5$ .

Т.е. при выборе  $B_1$  (будет записываться 1)  
игрок II проиграет не более ( $\leq$ ) 5 ед.

Замечание. Решение игры в чистых  
стратегиях отсутствует.

## Игры без седловых точек

15

Опр. Смешанной стратегией игрока I наз. вектор  $p = [p_1, \dots, p_m]^T$ , где  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_i p_i = 1$ . Аналогично,  $q = [q_1, \dots, q_n]^T$  - смешанная стратегия игрока II, где  $q_j \geq 0$ ,

$$\sum_j q_j = 1.$$

$p_i, q_j$  - вероятности применения листов стратегий  $A_i$  и  $B_j$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n}$ .



Опр. Ф-ция  $f(p, q)$  :

$$f(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j \quad (2)$$

называется платежной ф-цией матричной игры с матрицей  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

Обозначим:

$$S_m = \{ p = [p_1, \dots, p_m]^T \mid p_i \geq 0, i = \overline{1, m}; \sum_{i=1}^m p_i = 1 \} .$$

$$S_n = \{ q = [q_1, \dots, q_n]^T \mid q_j \geq 0, j = \overline{1, n}; \sum_{j=1}^n q_j = 1 \} .$$

Игра:

17

$$\Gamma = \langle S_m, S_n, f(p, q) \rangle \quad (3)$$

называется смешанным расширением  
матричной игры с матрицей  $A$ .

Замечание. Игры стратегий игроков  
явл. подмножествами  $S_m$  и  $S_n$ :

Игрой стратегий  $A_i$  соотв. вектор  
 $p = [0, \dots, 0, \underset{\textcircled{i}}{1}, 0, \dots, 0]^T$  с компонентами:

$$[p_i = 1, p_k = 0, k = \overline{1, m}, k \neq i]^T$$



Опр. Смешанные стратегии:

18

$$p^* = [p_1^*, \dots, p_m^*]^T \text{ и } q^* = [q_1^*, \dots, q_n^*]^T$$

в игре (3) кар. оптимальными, если  
 $\forall p \in S_m, q \in S_n$  выполняется условие:

$$f(p, q^*) \leq f(p^*, q^*) \leq f(p^*, q)$$

Опр. Нижняя цена матричной игры в смешанных стратегиях:  $\alpha = \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} f(p, q)$

Верхняя цена в смешанных стратегиях:

$$\beta = \min_{q \in S_n} \max_{p \in S_m} f(p, q).$$

# Теорема (Днн. фон Нейман) - Основная 19

## Теорема матричных игр.

Любая матричная игра имеет цену в смешанных стратегиях, т.е.

$$v = \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} f(p, q) = \min_{q \in S_n} \max_{p \in S_m} f(p, q) =$$

$$= f(p^*, q^*).$$

Это означает:

$$f(p^*, q^*) = \min_{q \in S_n} f(p^*, q) = \max_{p \in S_m} f(p, q^*)$$

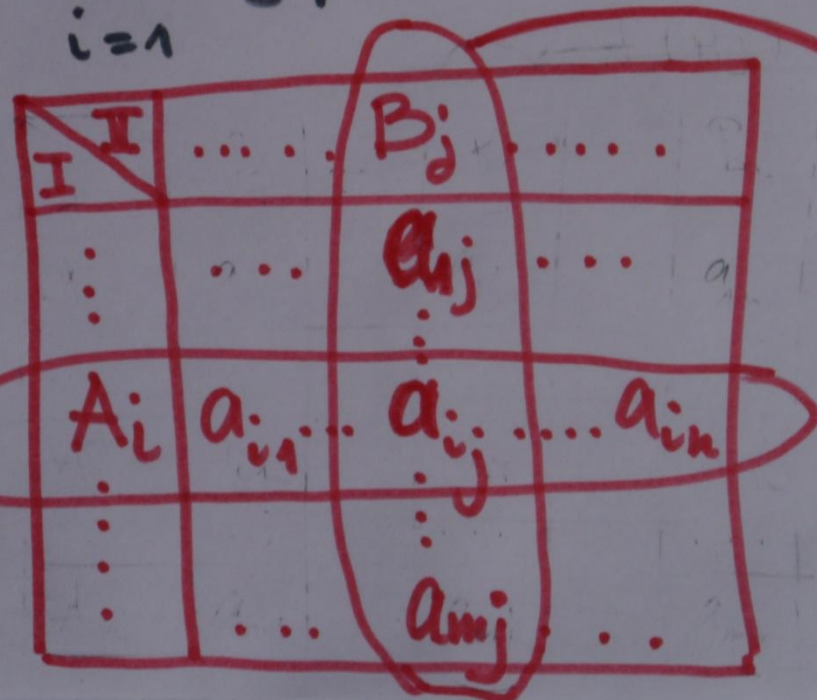


Введем обозначения:

11

$$f(i, q) = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j ; \quad q = [q_1, \dots, q_n]^T$$

$$f(p, j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i ; \quad p = [p_1, \dots, p_m]^T$$



$f(i, q)$  ←

→  $f(p, j)$

∇ Следствие 1. Пусть  $\nu$ -цена матричной <sup>12</sup> игры. Тогда для того, чтобы  $(p^*, q^*)$  были оптимальными стратегиями игроков, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$f(i, q^*) \leq \nu \leq f(p^*, j), \quad \forall i, j.$$

Отпр. Числовые стратегии, входящие в оптимальную смешанную стратегию игрока с вероятностью  $\neq 0$ , называются активными стратегиями.



Следствие 2 (свойство оптимальных стратегий).

3

Пусть  $(p^*, q^*)$  - оптимальные стратегии матричной игры, а  $v$  - цена игры.

Тогда если  $p_i^* > 0$ , то  $f(i, q^*) = v$ ;

если  $q_j^* > 0$ , то  $f(p^*, j) = v$ .

Кроме того, имеет место :

$$\min_{j=\overline{1, n}} f(p^*, j) = \max_{p \in S_m} \min_{j=\overline{1, n}} f(p, j) =$$

(\*)

$$= \min_{q \in S_n} \max_{i=\overline{1, m}} f(i, q) = \max_{i=\overline{1, m}} f(i, q^*) = v$$

## Смысл Следствия 2 :

14

Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегией (смешанной), то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры, независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.



# Методы решения матричных игр

15

Пример  $(2 \times 2)$ .  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ .

Пусть решение игры в чистых стратегиях отсутствует  $\Rightarrow$  надо искать решение в смешанных стратегиях.

По теореме фон Неймана:

$$p^* = [p_1^*, p_2^*]; \quad q^* = [q_1^*, q_2^*].$$

~~||~~ ~~||~~  
0 0

~~||~~ ~~||~~

т.е. игроки активны.  $\downarrow$   
0 0 - все стратег.

## Аналитический метод.

16

Игрок I применяет  $B_1$ :

$$a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* = v \quad (1)$$

Игрок II применяет  $B_2$ :

$$a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^* = v \quad (2)$$

Учитываем:

$$p_1^* + p_2^* = 1 \quad (3).$$

Получили систему линейных ур-ний (1), (2), (3)  
с 3-мя неизвестными:  $p_1^*$ ,  $p_2^*$ ,  $v$ .



$$P_2^* = 1 - P_1^* \rightarrow \text{в (1) и (2)}. \quad \boxed{7}$$

$$P_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \quad (4).$$

Определяем  $q_i^*$ :

$$\begin{array}{l} \text{I применяет } A_1: \\ \text{II применяет } A_2: \\ \text{Учитываем:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = \sigma \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = \sigma \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{array} \right.$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad q_2^* = 1 - q_1^*.$$

Пример.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha_i \\ -1 \end{matrix}$$

18

$$\xi_j: \quad 5 \quad 4 \longrightarrow \beta = 4 \quad \left. \begin{matrix} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \end{matrix} \right\} \alpha \neq \beta.$$

$$\begin{cases} B_1: & 5p_1^* + 2p_2^* = v \implies 5p_1^* + 2(1-p_1^*) = v \\ B_2: & -p_1^* + 4p_2^* = v \implies -p_1^* + 4(1-p_1^*) = v \\ & p_1^* + p_2^* = 1 \longrightarrow \end{cases}$$

$$5p_1^* + 2 - 2p_1^* = -p_1^* + 4 - 4p_1^*$$

$$8p_1^* = 2; \quad p_1^* = \frac{1}{4}; \quad p_2^* = \frac{3}{4}$$



Аналогично:

19

$$\left. \begin{array}{l} A_1: \quad 5q_1^* - q_2^* = v \\ A_2: \quad 2q_1^* + 4q_2^* = v \\ \quad \quad q_1^* + q_2^* = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5q_1^* - (1 - q_1^*) = v \\ 2q_1^* + 4(1 - q_1^*) = v \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$5q_1^* - 1 + q_1^* = 2q_1^* + 4 - 4q_1^*$$

$$8q_1^* = 5; \quad q_1^* = \frac{5}{8}; \quad q_2^* = \frac{3}{8}$$

$$v = 5p_1^* + 2p_2^* = 5 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$v = 5q_1^* - q_2^* = 5 \cdot \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$$

Проверим, что решение  $(p^*, q^*)$  является равновесным:  $f(p, q^*) \leq f(p^*, q) \leq f(p^*, q^*)$  10

Зададим  $\forall p = (p_1, p_2)$  и  $\forall q = (q_1, q_2)$

$$\downarrow \\ p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\downarrow \\ q = \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)$$

$$f(p, q) = a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2$$

$$\begin{aligned} f(p^*, q) &= 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{8}\right) + 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \frac{7}{8} = \\ &= \frac{5}{32} - \frac{7}{32} + \frac{6}{32} + \frac{84}{32} = \frac{88}{32} = \frac{11}{4} = v_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(p, q^*) &= 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{25 - 3 + 10 + 12}{8} = \\ &= \frac{44}{8} = \frac{11}{2} \end{aligned}$$



# Геометрический метод

11

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix};$$

Востановляем следствие 2.

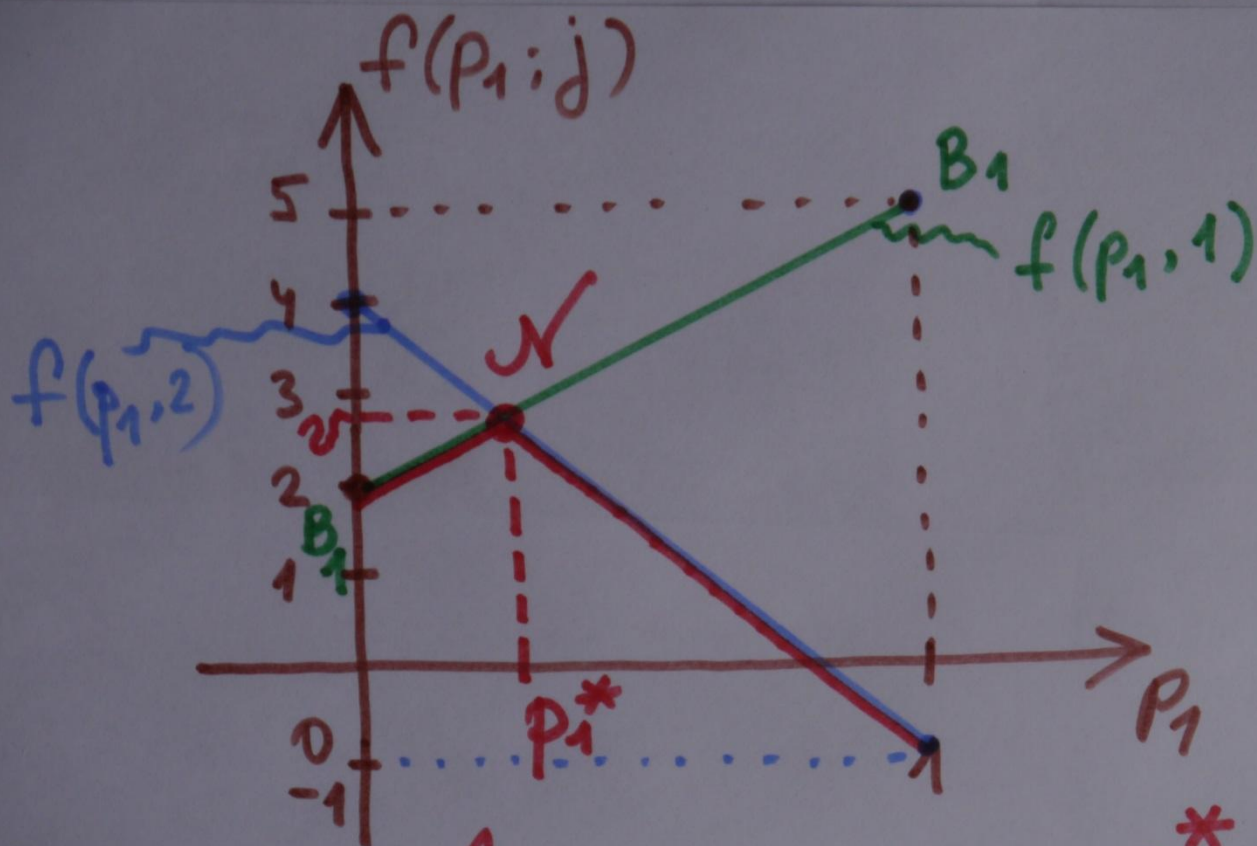
$$v = \max_{p \in S_m} \min_{j=1, n} f(p, j)$$

$$\text{При фиксир. } B_1: \left. \begin{array}{l} f(p, 1) = 5p_1 + 2p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(p, 1) = 3p_1 + 2$$

$$\text{При фиксир. } B_2: \left. \begin{array}{l} f(p, 2) = -p_1 + 4p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(p, 2) = -5p_1 + 4$$



$N$ -седловая точка  $\Rightarrow p^*$

$$\left. \begin{aligned} f(p_1^*, 1) &= 3p_1^* + 2 = v \\ f(p_1^*, 2) &= -5p_1^* + 4 = v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3p_1^* - v &= -2 \\ -5p_1^* - v &= -4 \end{aligned} \right\}$$



$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta_{P_1^*} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

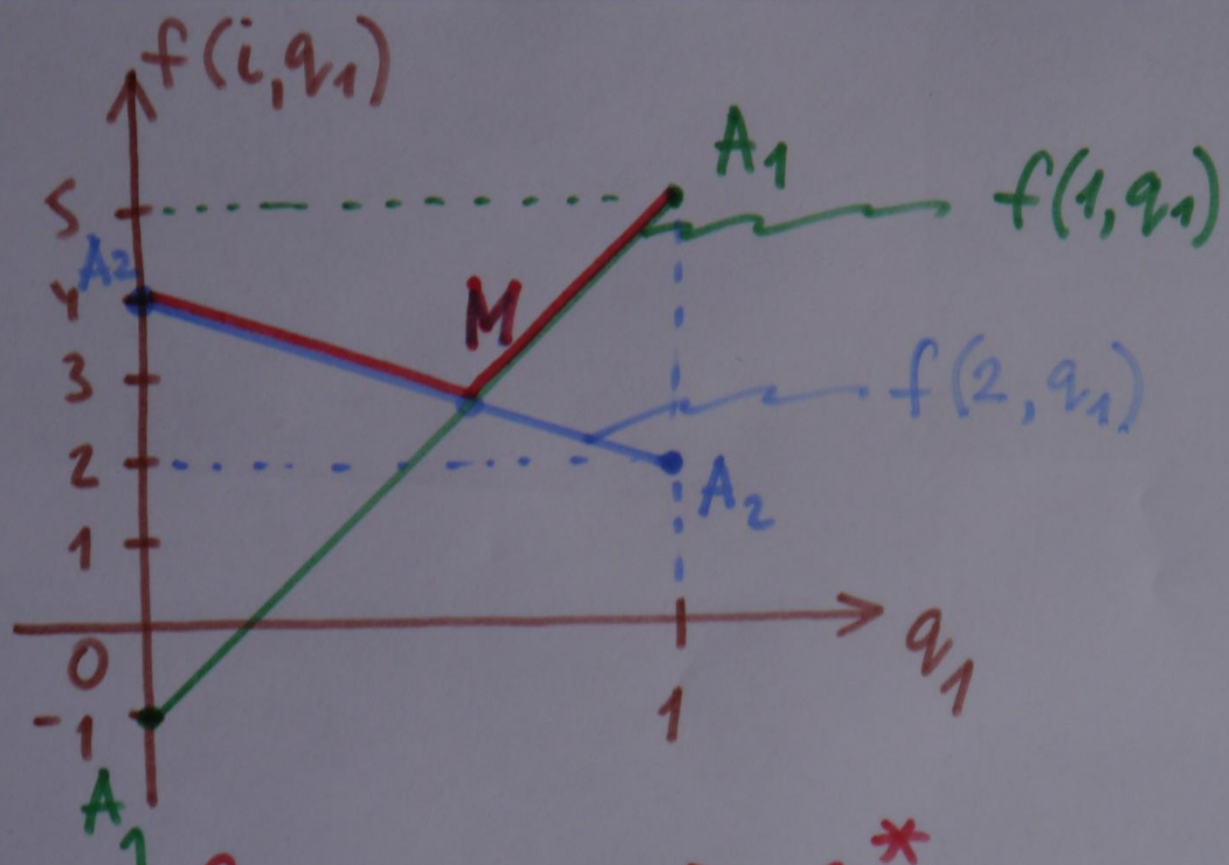
$$\Delta_{\sigma} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -22; \quad \begin{cases} P_1^* = \frac{1}{4}; & v = \frac{11}{4} \\ P_2^* = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Определим  $q_i^*$  По следствию 2:

$$\min_{q \in S_n} \max_{i=1, \dots, m} f(i, q) = v$$

При фиксир.  $A_1$ :  $f(1, q) = \begin{cases} 5q_1 - q_2 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow f(1, q_1) = 6q_1 - 1$

при фиксир  $A_2$ :  $f(2, q) = \begin{cases} 2q_1 + 4q_2 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow f(2, q_1) = -2q_1 + 4$



M-седловая точка  $\Rightarrow q^*$ .

$$\left. \begin{aligned} f(1, q_1^*) &= 6q_1^* - 1 = v \\ f(2, q_1^*) &= -2q_1^* + 4 = v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 6q_1^* - v &= 1 \\ -2q_1^* - v &= -4 \end{aligned} \right\}$$



$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta_{a_1^*} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

15

$$\Delta_{\sigma} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -22; \quad \begin{cases} a_{v_1}^* = \frac{5}{8} \\ a_{v_2}^* = \frac{3}{8} \end{cases}; \quad v = \frac{11}{4}$$

# Матричные игры $2 \times n$ и $m \times 2$

16

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix}$$

$2 \times n$

$m \times 2$

Теорема. Любая матричная игра с матрицей  $[m \times n]$  имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока  $\leq l$ , где  $l = \min \{m, n\}$ .



