

## 4. Кинематика жидкости

**Жидкая частица** – малый объём сплошной среды, который деформируется во время движения, но масса его неизменна.

**Жидкий объём** – конечный объём, состоящий во время движения из одних и тех же жидких частиц.

### 4.1. Два метода описания движения жидкой частицы.

#### Метод Лагранжа

$$\begin{aligned}x &= x(a, b, c; t) \\y &= y(a, b, c; t) \Leftrightarrow \text{т. е. } \vec{r} = \vec{r}(a, b, c; t), \\z &= z(a, b, c; t)\end{aligned}$$

где  $a, b, c$  – координаты точки в начальный момент времени.

Имея эти зависимости, можно выразить мгновенную скорость жидкой частицы.

$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \Leftrightarrow u_x = \frac{\partial x}{\partial t}; u_y = \frac{\partial y}{\partial t}; u_z = \frac{\partial z}{\partial t}$$

Ускорение и его проекции:

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \Leftrightarrow a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$a, b, c$  – переменные Лагранжа,

#### Метод Эйлера

Основан на понятии местной скорости.

$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$  – скорость жидкой частицы, находящейся в выбранной точке пространства в данный момент времени.

$$\text{или } u_x = u_x(x, y, z, t), \quad u_y = u_y(x, y, z, t), \quad u_z = u_z(x, y, z, t),$$

$\vec{r}$  – радиус-вектор точки с координатами  $(x, y, z)$ ;  $(x, y, z)$  – переменные Эйлера.

Если местная скорость зависит от времени, то такое движение называется неустановившемся (нестационарным). Если же  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ , то движение стационарное (установившееся).

## Режимы течений:

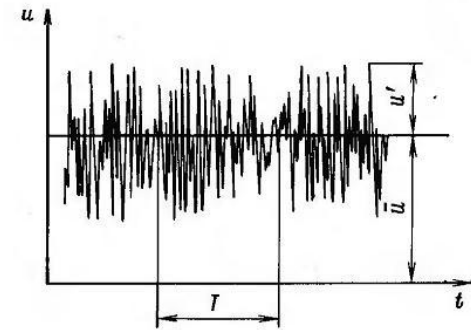
1) ламинарный (слои не перемешиваются между собой)

2) турбулентный (слои перемешиваются между собой)

$\vec{u} = \bar{\vec{u}} + \vec{u}'$ , где  $\bar{\vec{u}}$  - местная мгно. скорость,  $\bar{\vec{u}}$  - осреднённая скорость,  $\vec{u}'$  - пульсация скорости.

$\bar{\vec{u}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \vec{u} dt$ ;  $\bar{\vec{u}}' = 0$  - осреднённое значение пульсации равно 0.

Степень турбулентной пульсации:  $\varepsilon = \frac{\sqrt{(\overline{u'})^2}}{u}$



Если  $\bar{\vec{u}}$  не зависит от t, то говорим об осреднённо-установившемся течении:  $\bar{\vec{u}} = \bar{\vec{u}}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}; \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}}_{u_x} + \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}_{u_y} + \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}}_{u_z}$$

или:  $a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z}$

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$  - оператор Гамильтона  $\Rightarrow \vec{a} = \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}} + \underbrace{(\vec{u}\nabla)\vec{u}} = \underbrace{\frac{d\vec{u}}{dt}}$

Локальное уск-е (изменение скорости во времени в данной точке)  $\uparrow$  полная производная (индивидуальная, субстанциональная)

конвективное ускорение (изменение скорости в пространстве в данный момент времени)

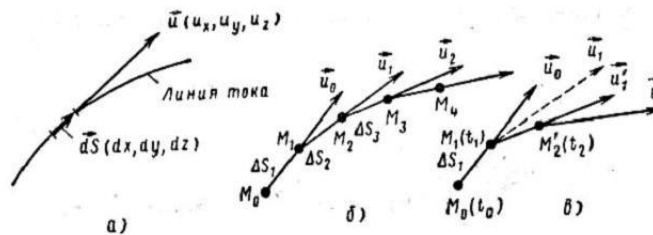
## 4.2. Линии и трубки тока; расход жидкости

**Линия тока** – линия, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной в данный момент времени

$$\vec{u} \parallel d\vec{l}, d\vec{l} \{dx, dy, dz\} \Rightarrow \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \quad \text{— уравнение линий тока}$$

**Траектория** – путь, проходимый одной жидкой частицей за некоторый интервал времени.

Для установившегося течения линии тока и траектории совпадают.



**Свойство линий тока:** Линии тока нигде не пересекаются между собой за исключением особых точек ( $u=0$ ;  $u=\infty$ ).

Предположим, что две линии тока пересеклись, тогда  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  – составляющие результирующего вектора  $\vec{u}$ , но  $\vec{u}$  не касается ни к одной из кривых  $\Rightarrow$  ни одна не является л.т.

Совокупность линий тока, проходящих через замкнутый контур, называется **трубкой тока**. Если этот контур мал, то трубка называется **элементарной**.

В пределах элементарной трубки скорость одинакова  $\vec{u} = idem$ .

**Свойство:** Трубка тока непроницаема (т.е. через их боковую поверхность жидкость не проникает)  $\Rightarrow$  единственна.

Совокупность жидких частиц, ограниченных элементарной трубкой тока, называется **струйкой** жидкости.

Принимаем струйную модель жидкости.

$\vec{u} \cdot d\vec{S} = \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dS = u_n \cdot dS \leq 0$  – в зависимости от направления скорости и ориентации площадки; поток вектора скорости.

$|u_n dS| = dQ$  - объём жидкости, протекающей через площадку  $dS$  за единицу времени (**объёмный расход**).

$Q = \left| \int_S u_n dS \right|$  - объёмный расход жидкости через поверхность  $S$ .

$Q_M = \left| \int_S \rho u_n dS \right|$  - массовый расход через поверхность  $S$ .

$Q_B = \left| \int_S \rho g u_n dS \right|$  - весовой расход через поверхность  $S$ .

### 4.3. Уравнение неразрывности

$\rho u_n dS \geq 0$  - секундная масса, вытекшая из объёма или втекающая в него.

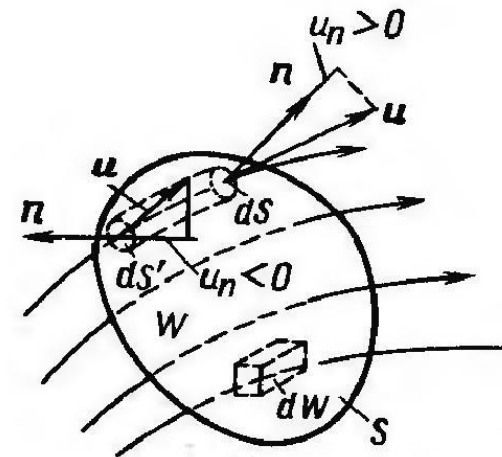
(1)  $\int_S \rho u_n dS$  - разность масс через поверхность  $S$  (секундное изменение массы).

Также:  $\rho dW$  - масса малого объёма.

$\frac{\partial}{\partial t} (\rho dW) \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dW \Rightarrow \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW$  (2) – изменение массы в объёме  $W$

изменение массы  
малого объёма

в единицу времени



Если нет источника/поглощения массы, то (1) = -(2):

$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW = - \int_S \rho u_n dS = 0$  – интегральная форма уравнения неразрывности (неустановившееся течение).

Для установившегося течения:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \int_S \rho u_n dS = 0$

Для несжимаемой жидкости:  $\rho = const \Rightarrow \int_S u_n dS = 0$

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_S \rho u_n dS = \int_W \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) \right] dW \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{получаем: } \int_W \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) \right]}_{\text{div} \rho \vec{u}} \right\} dW = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{u} = \mathbf{0}$  – дифференциальная форма уравнения неразрывности.

Для установившегося течения:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div}(\rho \vec{u}) = \mathbf{0}$

Для несжимаемой жидкости:  $\rho = const \Rightarrow \text{div}(\vec{u}) = \mathbf{0}$

$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \mathbf{0}$  – уравнение несжимаемости.

## Гидравлическая форма уравнения неразрывности

Рассмотрим установившееся течение жидкости в трубе с жесткими недеформируемыми стенками

$$S = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}}$$

$$\Rightarrow \int_S \rho u_n dS = \int_{S_1} \rho u_n dS + \int_{S_2} \rho u_n dS + \int_{S_{\text{бок}}} \rho u_n dS = 0$$

$S_{\text{бок}}$  - непроницаема  $\Rightarrow u_n = 0$  и  $\int_{S_{\text{бок}}} \rho u_n dS = 0$

На поверхности  $S_1$ :  $u_n = -u_n \Rightarrow \int_{S_1} \rho u_n dS = \int_{S_2} \rho u_n dS$  - гидравлическая форма уравнения неразрывности.

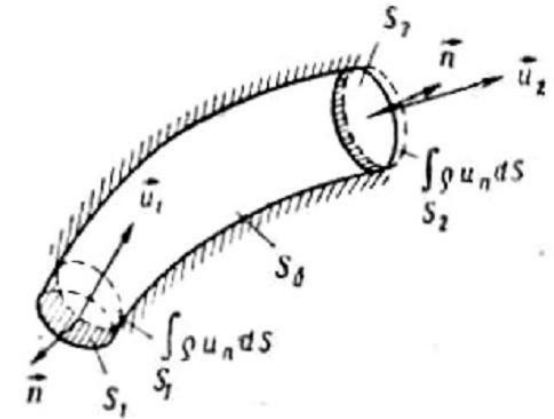
Если распределение  $u_i$  по  $S_i$  постоянно  $\Rightarrow \rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2$  - для живых сечений.

*Живое сечение* – сечение, в каждой точке перпендикулярное направлению скорости.

Для несжимаемой жидкости:  $\rho = const \Rightarrow u_1 S_1 = u_2 S_2$

$v = \frac{Q}{S}$  - средняя скорость по течению  $\Rightarrow v_1 S_1 = v_2 S_2$  или  $Q = vS = const$

Расход несжимаемой жидкости остаётся постоянным по длине трубы



#### 4.4. Сложное движение жидкой частицы.

Твёрдое тело (рис. 2.3.)

Вращательное движение:  $\vec{u}(u_x, u_y)$  – окружная скорость; т. М  $[\vec{r}(x, y)]$ ,  
 $\vec{\omega}(0, 0, \omega_z)$  – угловая скорость.

$$\begin{aligned} u_x &= -\omega_z y \left| \frac{\partial}{\partial y} \right. \\ u_y &= \omega_z x \left| \frac{\partial}{\partial x} \right. \end{aligned} \Rightarrow \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

В общем случае присутствуют ещё:

$$\begin{aligned} \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Поступательное и вращательное движение.

$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \Delta \vec{r}$ , где  $\Delta \vec{r}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  – радиус-вектор одной точки относительно другой.

$$u_x = u_{x_0} + \omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y; \quad u_y, u_z \dots$$

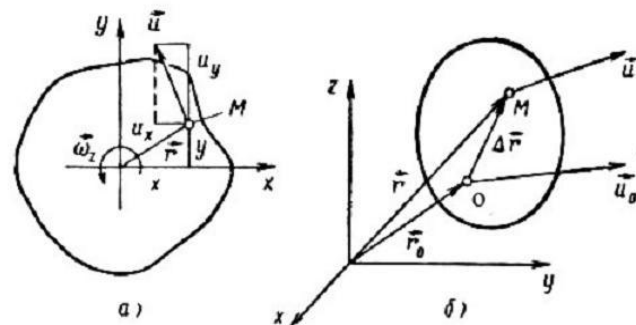
Жидкая частица (см. рис.).

Разложим в ряд Тейлора скорость  $\vec{u}$  в окрестности т. О:

$u_x = u_{x_0} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)_0 \cdot \Delta x + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_0 \cdot \Delta y + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)_0 \cdot \Delta z$ , где  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  – проекции  $\Delta \vec{r}$ , “0” – значения производных в т. О.

Используем тождества:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$



$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Имеем:

$$u_x = u_{x_0} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)}_{\omega_y} \cdot \Delta z - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_0 \cdot \Delta y + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)_0 \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)_0 \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \cdot \Delta z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_x = u_{x_0} + \omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)_0 \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)_0 \cdot \Delta z$$

$u_y, u_z$  – аналогично.

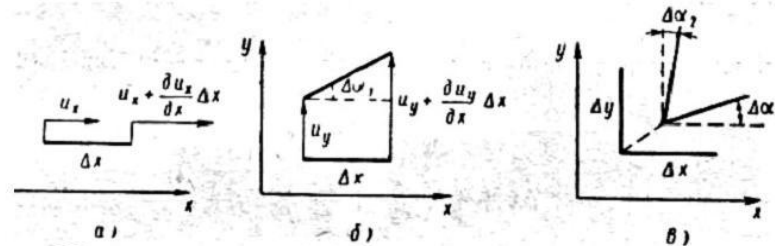
$$u_x = \underbrace{u_{x_{\text{кт}}}}_{\text{скорость}} + \underbrace{u_{x_{\text{деф}}}}_{\text{скорость}} \Rightarrow \vec{u} = \vec{u}_{\text{кт}} + \vec{u}_{\text{деф}} - \text{полная скорость, где } \vec{u}_{\text{кт}} = \vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \Delta \vec{r}$$

квазитвёрдого деформационного  
тела движения

$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$  – скорости удельных линейных деформаций (рис. 2.4).

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)$$

Скорости угловых деформаций (деформаций сдвига).



Деформации жидких отрезков и углов



$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} - \text{тензор скоростей деформаций (симметричный тензор 2 ранга)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_x = u_{x_0} + \omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y + \varepsilon_{xx} \cdot \Delta x + \varepsilon_{xy} \cdot \Delta y + \varepsilon_{xz} \cdot \Delta z, \quad u_y, u_z = \dots$$

**Теорема Коши-Гельмгольца:** В общем случае движение жидкой частицы может быть разложено на поступательное движение со скоростью её полюса  $\vec{u}_0$ , вращательное движение вокруг мгновенной оси, проходящей через этот полюс, с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  и деформационное движение со скоростями линейных и угловых деформаций  $\varepsilon_{ij}$ .

## 5. Вихревое движение жидкости.

**Вихревая линия** – линия, в каждой точке которой вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  направлен по касательной в данный момент времени.

$\vec{\omega} \parallel d\vec{l}$ ,  $d\vec{l}$  – мгновенные оси вращения жидких частиц, которые на них расположены.

$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$  - уравнение вихревой линии.

Вихревая трубка

Если  $d\sigma$  - мало, то  $\vec{\omega} = const$ .

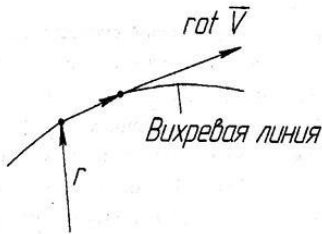
$dJ = \vec{\omega} \cdot d\vec{\sigma} = \vec{\omega} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \omega_n d\sigma$  – интенсивность вихревой трубки (мера вихревого движения).

$$2\vec{\omega} = \vec{\Omega} = rot \vec{u}$$

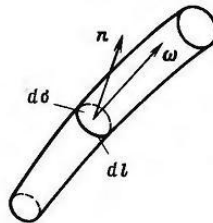
$$J = \int_{\sigma} \omega_n d\sigma; \quad 2J = 2 \int_{\sigma} \omega_n d\sigma = \int_{\sigma} \Omega_n d\sigma$$

Совокупность частиц, ограниченных вихревой трубкой, называется **вихревым шнуром**.

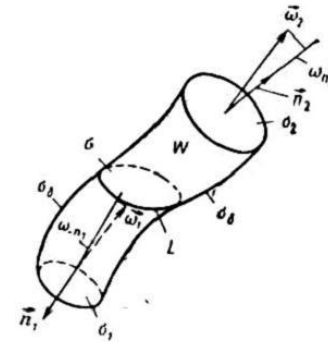
**Теорема Гельмгольца:** Поток вихрей через поперечное сечение вихревой трубки постоянен по её длине в данный момент времени.



Вихревая линия



Вихревая трубка



К доказательству теоремы Гельмгольца

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_{\text{бок}} \Rightarrow$  поток вихрей через поверхность  $\sigma$ :

$$\int_{\sigma} \omega_n d\sigma = \int_{\sigma_1} \omega_n d\sigma + \int_{\sigma_2} \omega_n d\sigma + \int_{\sigma_{\text{бок}}} \omega_n d\sigma$$

На  $\sigma_{\text{бок}}$   $\omega_n = 0$ , т.к.  $\vec{\omega}$  направлен по касательной к поверхности вихревой трубки. По т. Остроградского-Гаусса:  $\int_{\sigma} \omega_n d\sigma = \int_W \text{div} \vec{\omega} dW$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u}; \quad \text{т.к. } \text{div} \text{rot} \vec{u} \equiv 0 \Rightarrow \int_{\sigma} \omega_n d\sigma = \int_{\sigma_1} \omega_{n_1} d\sigma + \int_{\sigma_2} \omega_{n_2} d\sigma \equiv 0; \quad \omega_{n_1} = -\omega_{-n_1}$$

$$\Rightarrow \int_{\sigma_1} \omega_{-n_1} d\sigma = \int_{\sigma_2} \omega_{n_2} d\sigma$$

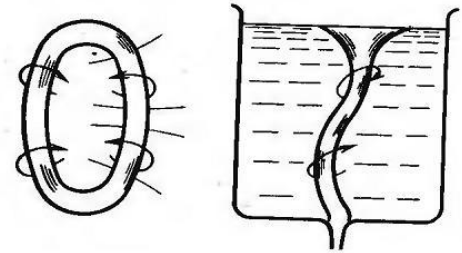
Для элементарной вихревой трубки:  $\omega_n = \text{const}$  и  $\omega_{-n_1} \sigma_1 = \omega_{n_2} \sigma_2$

### Свойства вихревой трубки:

1°. Вихревая трубка не может начинаться и заканчиваться в области течения (скачкообразно).

2°. Вихревая трубка не может исчезать (иначе  $\sigma \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty$ ).

2 типа вихревых трубок: Вихревой шнур и вихревое кольцо



**Пример вихревого движения:** Течение жидкости между параллельными пластинами.

$$u_x = f(y), \quad u_y = u_z = 0$$

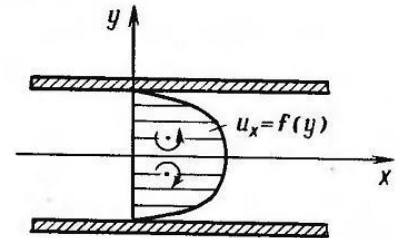
$$\omega_x = \omega_y = 0; \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{df}{dy} \Rightarrow \text{течение вихревое,}$$

$\vec{\omega} \parallel z$ .

**В I квадранте:**  $\frac{\partial u_x}{\partial y} < 0, \omega_z > 0$  - против часовой стрелки.

**В IV квадранте:**  $\omega_z < 0$  - по часовой стрелке.

Для идеальной жидкости:  $u_x = \text{const}$ . Для реальной жидкости течение всегда вихревое.



#### 4.6. Безвихревое движение

$$\vec{\omega} \equiv 0 \Leftrightarrow \omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0; \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{array} \right\} (1) \text{ Условия Коши – Римана}$$

Условия (1) необходимы и достаточны, чтобы:  $u_x dx + u_y dy + u_z dz = d\varphi$ ,

Где  $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \Rightarrow \mathbf{u}_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \mathbf{u}_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \mathbf{u}_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u} = u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k}$  или  $\vec{u} = \overline{\text{grad}} \varphi$

$\varphi$  – потенциал скорости ( $\varphi(x, y, z)$ ).

Если течение безвихревое, то существует  $\varphi$

Обратное: Если выполняется (2), то течение безвихревое.

Течение, обладающее потенциалом, называется потенциальным (безвихревым).

$$u_s = \text{grad}_s \varphi$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(S, x)$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(S, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(S, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} * \frac{dx}{dS} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} * \frac{dy}{dS} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} * \frac{dz}{dS} = \frac{\partial \varphi}{\partial S} \Rightarrow u_s = u * \cos(u, S) = \frac{\partial \varphi}{\partial S}$$

- $u_s = \text{grad}_s \varphi =$   
 $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(s, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(s, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$

- $$\mathbf{u}_s = \mathbf{u} \cos(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{s}}$$

- Частные случаи:

- 1°.  $\vec{u} \parallel \vec{s} \Rightarrow \cos(u, s) = 1$  и  $u_s = \frac{d\varphi}{ds} = u \Rightarrow$

вектор  $\vec{u}$  указывает направление быстрого изменения функции  $\varphi$ .

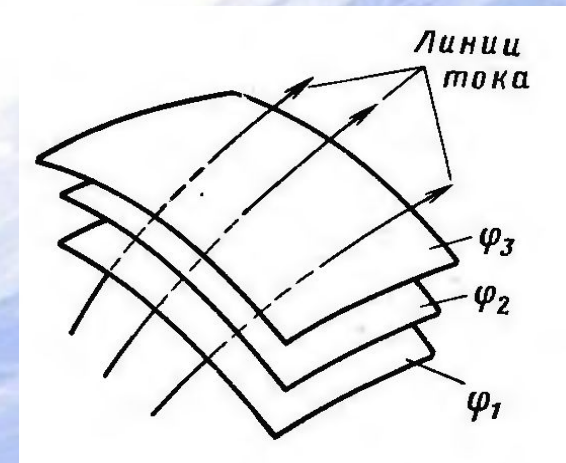
- 2°.  $\vec{u} \perp \vec{s} \Rightarrow \cos(u, s) = 0$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ , то есть  $\varphi(x, y, z) = \text{const}; =$

т. е. существуют поверхности равного потенциала

- (эквипотенциальные)

- Уравнение несжимаемости:

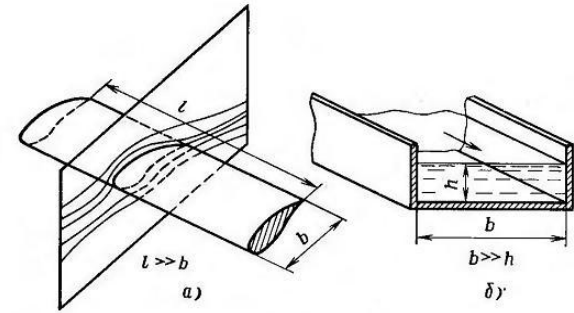
- $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$



## 4.7. Плоское течение жидкости.

Течение называется плоским, если конфигурация линий тока неизменна во всех плоскостях, перпендикулярных какому-либо направлению.

$$u_z = 0 \Rightarrow \text{уравнение линий тока } \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}; \quad u_x dy - u_y dx = 0 \quad (1)$$



$$\text{Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости } \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2).$$

(1) – необходимое и достаточное условие, чтобы левая часть (1) была полным дифференциалом некоторой функции двух переменных.

$$u_x dy - u_y dx = d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy \Rightarrow u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Получаем:  $\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = 0 \Rightarrow d\Psi = 0$ , т. е.  $\Psi(x, y) = \text{const}$  – функция тока.

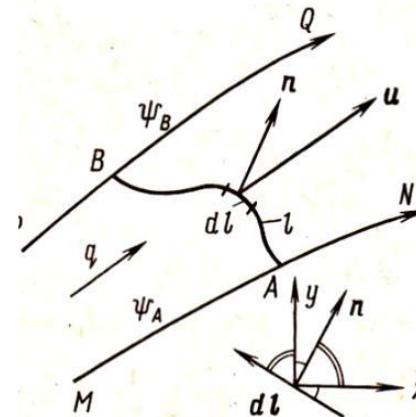
Функция тока сохраняет постоянное значение вдоль любой линии тока (но оно различно для разных линий тока).

$$q = \int_S u_n dS = 1 * \int_l u_n dl = \int_l u_n dl;$$

$$q = \int_A^B [u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y)] dl.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} dl * \cos(n, x) &= dy \\ dl * \sin(n, x) &= -dx \end{aligned}$$



Значит,  $q = \int_A^B (u_x dy - u_y dx) = \int_A^B \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \right) = \int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A = \Delta\Psi$  - расход между двумя линиями тока равен разности значений функций тока на этих линиях.

Если течение безвихревое, то  $\omega_z = 0$ :  $\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$ , т.е.  $\Delta\Psi = \nabla\nabla\Psi = 0$

Для безвихревого течения функция тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

$$\text{Гидродинамическая сетка} \Leftarrow \begin{cases} \varphi = \text{const} - \text{эквипотенциали} \\ \Psi = \text{const} - \text{линии тока} \end{cases}$$

Свойства гидродинамической сетки:

1°. Сетка ортогональна

2°. Одноименные линии сетки не пересекаются нигде, за исключением особых точек ( $u = 0, u = \infty$ )

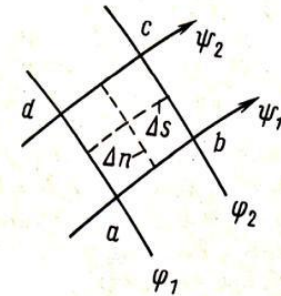
3°. Сетка квадратична в малом (рис. ).

$q = u\Delta n = \Psi$  - приращение функции тока на отрезке  $\Delta n$

$u = \frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta S}$ , где  $\Delta \varphi$  - приращение потенциала на отрезке  $\Delta S$

Значит,  $\Delta q = \Delta\Psi = \frac{\Delta \varphi}{\Delta S} \Delta n$  или  $\Delta\Psi \Delta S = \Delta \varphi \Delta n$

Если  $\Delta n \approx \Delta S$ , то  $\Delta\Psi \approx \Delta \varphi$ .



Свойство квадратичности гидродинамической сетки

Если течение плоское и безвихревое:  $\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$ , то  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0$  -

уравнение Лапласа