4. Кинематика жидкости

Жидкая частица – малый объём сплошной среды, который деформируется во время движения, но масса его неизменна.

Жидкий объём – конечный объём, состоящий во время движения из одних и тех же жидких частиц.

4.1. Два метода описания движения жидкой частицы.

Метод Лагранжа

$$\begin{aligned} x &= x(a, b, c; t) \\ y &= y(a, b, c; t) \\ z &= z(a, b, c; t) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \text{т. е.} \quad \vec{r} = \vec{r}(a, b, c; t),$$

где a,b,c – координаты точки в начальный момент времени.

Имея эти зависимости, можно выразить мгновенную скорость жидкой частицы.

$$\vec{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad u_x = \frac{\partial x}{\partial t}; \; u_y = \frac{\partial y}{\partial t}; \; u_z = \frac{\partial z}{\partial t}$$

Ускорение и его проекции:

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \quad \Leftrightarrow \quad a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \; a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \; a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

a,b,c – переменные Лагранжа.

Метод Эйлера

Основан на понятии местной скорости.

$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$ - скорость жидкой частицы, находящейся в выбранной точке пространства в данный момент времени.

или $u_x = u_x(x, y, z, t), \quad u_y = u_y(x, y, z, t), \quad u_z = u_z(x, y, z, t),$

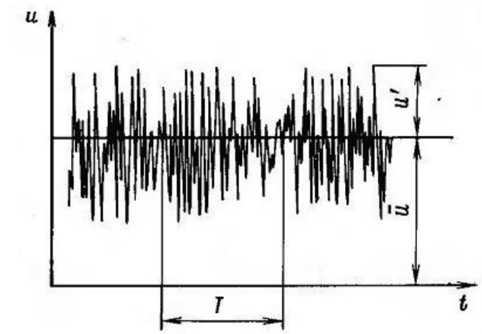
$\vec{r}$ – радиус-вектор точки с координатами (x,y,z); (x,y,z) – переменные Эйлера.

Если местная скорость зависит от времени, то такое движение называется неустановившемся (нестационарным). Если же $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$, то движение стационарное (установившееся).

Режимы течений:

1) ламинарный (слои не перемешиваются между собой)

2) турбулентный (слои перемешиваются между собой)



$\vec{u} = \overline{\vec{u}} + \vec{u'}$, где $\vec{u}$ -местная мгн. скорость, $\overline{\vec{u}}$ - осреднённая скорость, $\vec{u'}$ - пульсация скорости.

$\overline{\vec{u}} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \vec{u}dt$; $\overline{\vec{u}'} = 0$ - осреднённое значение пульсации равно 0.

Степень турбулентной пульсации: $\varepsilon = \frac{\sqrt{(u')^2}}{u}$

Если $\vec{u}$ не зависит от t, то говорим об осреднённо-установившемся течении: $\overline{\overline{\vec{u}}} = \overline{\vec{u}}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt};\ \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \vec{k} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u_x} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{u_y} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{u_z}$$

или: $a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$ - оператор Гамильтона $\Rightarrow$ $\vec{a} = \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}} + \underbrace{(\vec{u}\nabla)\vec{u}} = \underbrace{\frac{d\vec{u}}{dt}}$

Локальное уск-е (изменение скорости во времени в данной точке)

полная производная (индивидуальная, субстанциональная)

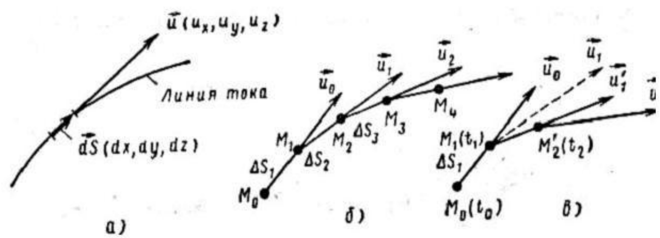
конвективное ускорение (изменение скорости в пространстве в данный момент времени)

4.2. Линии и трубки тока; расход жидкости

Линия тока – линия, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной в данный момент времени

$$\vec{u} \parallel d\vec{l}, d\vec{l}\{dx, dy, dz\} \Rightarrow \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} - \text{ −уравнение линий тока}$$

Траектория – путь, проходимый одной жидкой частицей за некоторый интервал времени. Для установившегося течения линии тока и траектории совпадают.



Свойство линий тока: Линии тока нигде не пересекаются между собой за исключением особых точек (u=0; u=).

Предположим, что две линии тока пересеклись, тогда $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ - составляющие результирующего вектора $\vec{u}$, но $\vec{u}$ не касается ни к одной из кривых ⇒ ни одна не является л.т.

Совокупность линий тока, проходящих через замкнутый контур, называется **трубкой тока**. Если этот контур мал, то трубка называется **элементарной.**

В пределах элементарной трубки скорость одинакова $\vec{u} = idem$.

Свойство: Трубка тока непроницаема (т.е. через их боковую поверхность жидкость не проникает) ⇒ единственна.

Совокупность жидких частиц, ограниченных элементарной трубкой тока, называется **струйкой** жидкости.

Принимаем струйную модель жидкости.

$\underbrace{\vec{u} \cdot d\vec{S}} = \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dS = u_n \cdot dS \lesseqgtr 0$ – в зависимости от направленияскорости и ориентации площадки;
поток вектора скорости.

$|u_n dS| = dQ$ - объём жидкости, протекающей через площадку dS за единицу времени (**объёмный расход**).

$Q = \left|\int_S u_n dS\right|$ - объёмный расход жидкости через поверхность S.

$Q_M = \left|\int_S \rho u_n dS\right|$ - массовый расход через поверхность S.

$Q_В = \left|\int_S \rho g u_n dS\right|$ - весовой расход через поверхность S.

4.3. Уравнение неразрывности

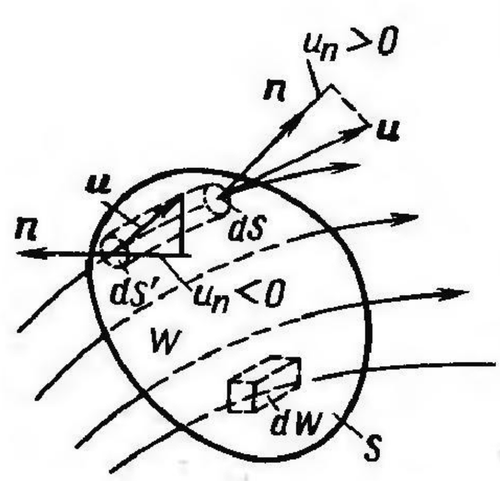
$\rho u_n dS \gtreqless 0$ - секундная масса, вытекшая из объёма или втекшая в него.

(1) $\int_S \rho u_n dS$ - разность масс через поверхность S (секундное

изменение массы).

Также: ρdW - масса малого объёма.

$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho dW)} \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dW \Rightarrow \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW$ (2) – изменение массы в объёме W
изменение массы малого объёма в единицу времени



Если нет источника/поглощения массы, то $(1) = -(2)$:

$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW = -\int_S \rho u_n dS = 0$ – интегральная форма уравнения неразрывности (неустановившееся течение).

Для установившегося течения: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \int_S \rho u_n dS = 0$

Для несжимаемой жидкости: $\rho = const \Rightarrow \int_S u_n dS = 0$

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_S \rho u_n dS = \int_W \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)\right] dW \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{получаем: } \int_W \left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)}_{div \rho \vec{u}}\right]\right\} dW = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{div \rho \vec{u} = 0}$ – дифференциальная форма уравнения неразрывности.

Для установившегося течения: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{div(\rho \vec{u}) = 0}$

Для несжимаемой жидкости: $\rho = const \Rightarrow \quad \boldsymbol{div(\vec{u}) = 0}$

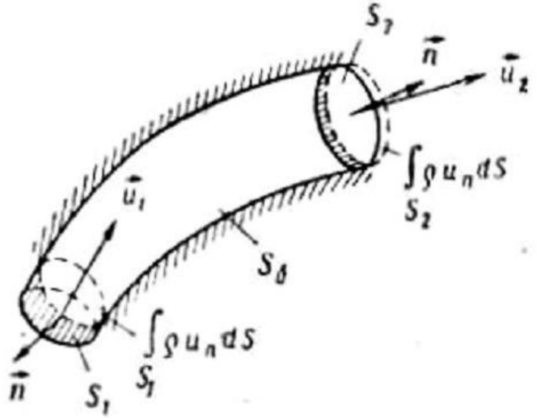
$\boldsymbol{\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0}$ - уравнение несжимаемости.

Гидравлическая форма уравнения неразрывности

Рассмотрим установившееся течение жидкости в трубе с жесткими недеформируемыми стенками $S = S_1 + S_2 + S_{бок}$

$$\Rightarrow \int_S \rho u_n dS = \int_{S_1} \rho u_n dS + \int_{S_2} \rho u_n dS + \int_{S_{бок}} \rho u_n dS = 0$$

$S_{бок}$ - непроницаема $\Rightarrow u_n = 0$ и $\int_{S_{бок}} \rho u_n dS = 0$



На поверхности $S_1: u_n = -u_n \Rightarrow \int_{S_1} \rho u_n dS = \int_{S_2} \rho u_n dS$ - гидравлическая форма уравнения неразрывности.

Если распределение u_i по S_i постоянно $\Rightarrow \rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2$ - для живых сечений.

Живое сечение – сечение, в каждой точке перпендикулярное направлению скорости.

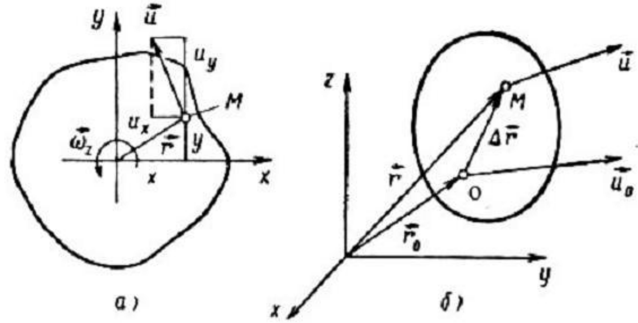
Для несжимаемой жидкости: $\rho = const \Rightarrow u_1 S_1 = u_2 S_2$

$v = \frac{Q}{S}$ - средняя скорость по течению $\Rightarrow v_1 S_1 = v_2 S_2$ или $Q = vS = const$

Расход несжимаемой жидкости остаётся постоянным по длине трубы

4.4. Сложное движение жидкой частицы.

Твёрдое тело (рис. 2.3.)



Вращательное движение: $\vec{u}(u_x, u_y)$ – окружная скорость; т. М $[\vec{r}(x,y)]$,
$\vec{\omega}(0,0,\omega_z)$ - угловая скорость.

$$\left.\begin{aligned} u_x &= -\omega_z y \\ u_y &= \omega_z x \end{aligned}\right| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{matrix} \Rightarrow \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right).$$

В общем случае присутствуют ещё:

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$
$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

Поступательное и вращательное движение.
$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{\omega} x \Delta\vec{r}$, где $\Delta\vec{r}(\Delta x, \Delta y. \Delta z)$-радиус-вектор одной точки относительно другой.

$$u_x = u_{x_0} + \omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y; \qquad u_y, u_z \ldots$$

Жидкая частица (см. рис.).
Разложим в ряд Тейлора скорость $\vec{u}$ в окрестности т. О:
$u_x = u_{x_0} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_0 \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_0 \cdot \Delta y + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)_0 \cdot \Delta z$, где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - проекции $\Delta\vec{r}$, “0” – значения производных в т. О.
Используем тождества:
$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$; $\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \end{array}$$

Имеем:

$$u_x = u_{x_0} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_0}_{\omega_y} \cdot \Delta z - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_0 \cdot \Delta y + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_0 \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_0 \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \cdot \Delta z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_x = u_{x_0} + \omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_0 \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_0 \cdot \Delta z$$

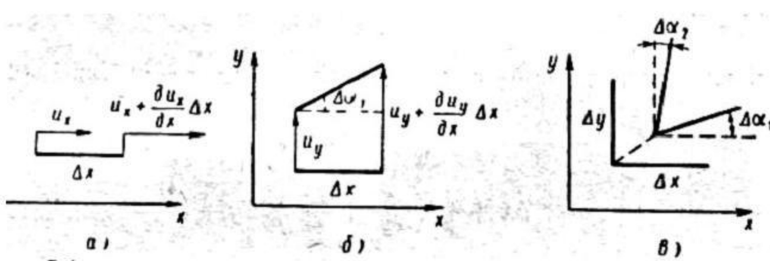
u_y, u_z – аналогично.

$$u_x = \underbrace{u_{x\,\text{кт}}}_{\substack{\text{скорость}\\\text{квазитвёрдого}\\\text{тела}}} + \underbrace{u_{x\,\text{деф}}}_{\substack{\text{скорость}\\\text{деформационного}\\\text{движения}}} \Rightarrow \vec{u} = \vec{u}_{\text{кт}} + \vec{u}_{\text{деф}}$$ - полная скорость, где $\vec{u}_{\text{кт}} = \vec{u}_0 + \vec{\omega}_x \times \Delta\vec{r}$

$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ – скорости удельных линейных деформаций (рис. 2.4.).

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \qquad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right), \qquad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)$$

Скорости угловых деформаций (деформаций сдвига).



Деформации жидких отрезков и углов

$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$ - тензор скоростей деформаций (симметричный тензор 2 ранга) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow u_x = u_{x_0} + \omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y + +\varepsilon_{xx} \cdot \Delta x + \varepsilon_{xy} \cdot \Delta y + \varepsilon_{xz} \cdot \Delta z, \qquad u_{y,} u_z = \cdots$$

Теорема Коши-Гельмгольца: В общем случае движение жидкой частицы может быть разложено на поступательное движение со скоростью её полюса $\vec{u}_0$, вращательное движение вокруг мгновенной оси, проходящей через этот полюс, с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и деформационное движение со скоростями линейных и угловых деформаций ε_{ij} .

5. Вихревое движение жидкости.

Вихревая линия – линия, в каждой точке которой вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен по касательной в данный момент времени.

$\vec{\omega} \parallel d\vec{l}$, $d\vec{l}$ – мгновенные оси вращения жидких частиц, которые на них расположены.

$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$ - уравнение вихревой линии.

Вихревая трубка

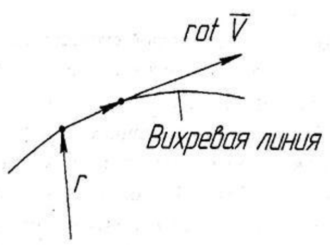
Если $d\sigma$ - мало, то $\vec{\omega} = const.$

$dJ = \vec{\omega} \cdot d\vec{\sigma} = \vec{\omega} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \omega_n d\sigma$ – интенсивность вихревой трубки (мера вихревого движения).

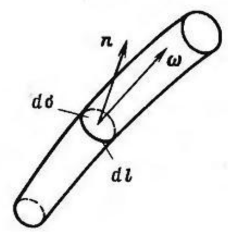
$$2\vec{\omega} = \vec{\Omega} = rot\, \vec{u} \qquad J = \int_\sigma \omega_n d\sigma; \;\; 2J = 2\int_\sigma \omega_n d\sigma = \int_\sigma \Omega_n d\sigma$$

Совокупность частиц, ограниченных вихревой трубкой, называется **вихревым шнуром**.

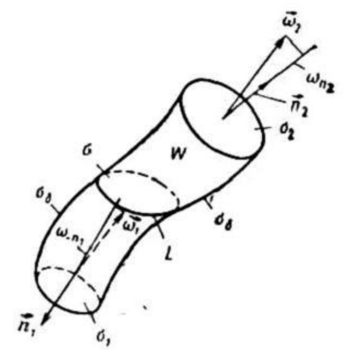
Теорема Гельмгольца: Поток вихрей через поперечное сечение вихревой трубки постоянен по её длине в данный момент времени.



Вихревая линия



Вихревая трубка



К доказательству теоремы Гельмгольца

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_{бок}$ $\Rightarrow$ поток вихрей через поверхность σ:

$$\int_{\sigma} \omega_n d\sigma = \int_{\sigma_1} \omega_n d\sigma + \int_{\sigma_2} \omega_n d\sigma + \int_{\sigma_{бок}} \omega_n d\sigma$$

На $\sigma_{бок}$ $\omega_n = 0$, т.к. $\vec{\omega}$ направлен по касательной к поверхности вихревой трубки. По т. Остроградского-Гаусса: $\int_{\sigma} \omega_n d\sigma = \int_W div\vec{\omega} dW$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\,\vec{u}; \quad \text{т.к. } div\,rot\,\vec{u} \equiv 0 \Rightarrow \int_{\sigma} \omega_n d\sigma = \int_{\sigma_1} \omega_{n_1} d\sigma + \int_{\sigma_2} \omega_{n_2} d\sigma \equiv 0; \quad \omega_{n_1} = -\omega_{-n_1}$$

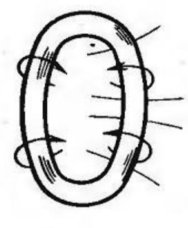
$$\Rightarrow \int_{\sigma_1} \boldsymbol{\omega_{-n_1} d\sigma} = \int_{\sigma_2} \boldsymbol{\omega_{n_2} d\sigma}$$

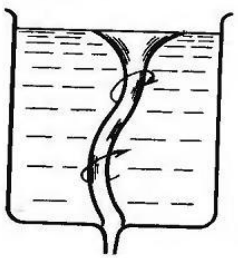
Для элементарной вихревой трубки: $\omega_n = const$ и $\boldsymbol{\omega_{-n_1} \sigma_1 = \omega_{n_2} \sigma_2}$

Свойства вихревой трубки:

1°. Вихревая трубка не может начинаться и заканчиваться в области течения (скачкообразно).

2°. Вихревая трубка не может исчезать (иначе $\sigma \to 0, \omega \to \infty$).



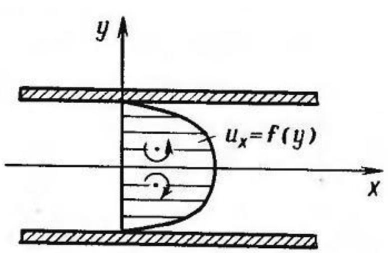


2 типа вихревых трубок: Вихревой шнур и вихревое кольцо

Пример вихревого движения: Течение жидкости между параллельными пластинами.

$u_x = f(y),\ u_y = u_z = 0$

$\omega_x = \omega_y = 0;\ \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{df}{dy}$ $\Rightarrow$ течение вихревое, $\vec{\omega} \parallel z$.



В 1 квадранте: $\frac{\partial u_x}{\partial y} < 0, \omega_z > 0$ - против часовой стрелки.

В IV квадранте: $\omega_z < 0$ *- по часовой стрелке.*

Для идеальной жидкости: $u_x = const$. *Для реальной жидкости течение всегда вихревое.*

4.6. Безвихревое движение

$$\vec{\omega} \equiv 0 \iff \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = 0;\ \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0 \iff \left.\begin{matrix} \dfrac{\partial u_z}{\partial y} = \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = \dfrac{\partial u_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} = \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \end{matrix}\right\}\ (1)\ \text{Условия Коши} - \text{Римана}$$

Условия (1) необходимы и достаточны, чтобы: $u_x dx + u_y dy + u_z dz = d\varphi$,

Где $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \Rightarrow \quad \boldsymbol{u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x};\ u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y};\ u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\ \ (2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u} = u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k}$ или $\vec{u} = \overrightarrow{grad}\,\varphi$

φ – потенциал скорости ($\varphi(x, y, z)$).

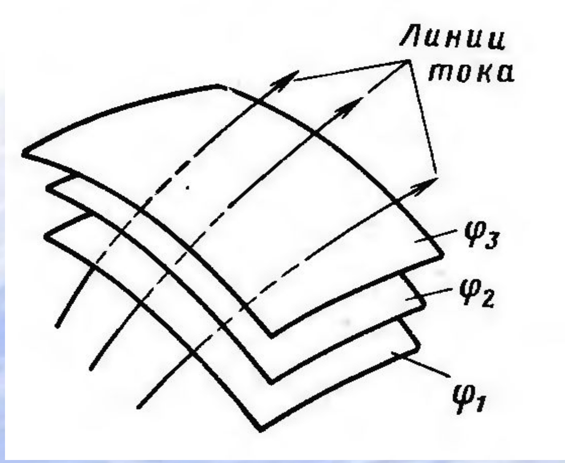
Если течение безвихревое, то существует φ

Обратное: Если выполняется (2), то течение безвихревое.

Течение, обладающее потенциалом, называется потенциальным (безвихревым).

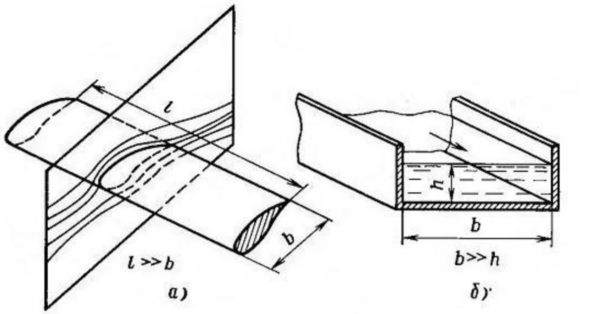
$$u_S = grad_S\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(S, x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(S, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(S, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} * \frac{dx}{dS} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} * \frac{dy}{dS} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} * \frac{dz}{dS} = \frac{\partial\varphi}{\partial S} \Rightarrow u_s = u * \cos(u, S) = \frac{\partial\varphi}{\partial S}$$

- $u_S = grad_S\varphi =$
  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(s,x) \quad + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(s,y) \quad + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(s,z) \quad = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}$
-
$$\boldsymbol{u_s = u\cos(s,u) = \frac{\partial\varphi}{\partial s}}$$
- *Частные случаи*:
- $1^{\circ}.\vec{u}||\overrightarrow{s^{\circ}} \Rightarrow \cos(u,s) = 1$ и $u_S = \frac{d\varphi}{ds} = u \Rightarrow$
  вектор $\vec{u}$ указывает направление быстрейшего изменения функции φ.
- $2^{\circ}.\ \vec{u} \perp \overrightarrow{s^{\circ}} \Rightarrow \cos(u,s) = 0$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0$, то есть $\varphi(x,y,z) = const; =$
  т. е. существуют поверхности равного потенциала
- (эквипотенциальные)
-
- Уравнение несжимаемости:
- $\frac{\partial u_x}{\partial} + \frac{\partial u_y}{\partial} + \frac{\partial u_z}{\partial} = 0$



4.7. Плоское течение жидкости.

Течение называется плоским, если конфигурация линий тока неизменна во всех плоскостях, перпендикулярных какому-либо направлению.



$u_z = 0 =>$ уравнение линий тока $\dfrac{dx}{u_x} = \dfrac{dy}{u_y}$; $\quad u_x dy - u_y dx = 0 \;\; (1)$

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости $\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = 0 <=> \dfrac{\partial u_x}{\partial x} = -\dfrac{\partial u_y}{\partial y}$ (2).

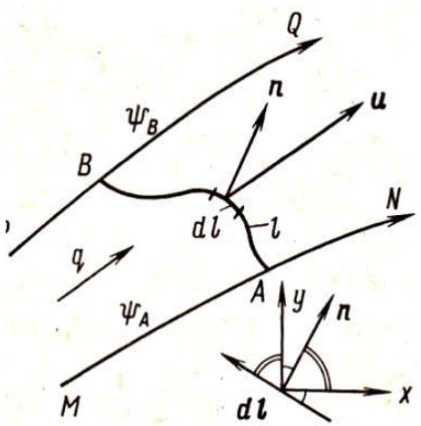
(1) – необходимое и достаточное условие, чтобы левая часть (1) была полным дифференциалом некоторой функции двух переменных.

$$u_x dy - u_y dx = d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy => u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \;\; u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Получаем: $\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} dx = 0 => d\Psi = 0,$ т. е. $\Psi(x, y) = const$ – функция тока.

Функция тока сохраняет постоянное значение вдоль любой линии тока (но оно различно для разных линий тока).

$$q = \int_S u_n dS = 1 * \int_l u_n dl = \int_l u_n dl;$$
$$q = \int_A^B \left[u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y)\right] dl.$$



Имеем:

$$dl * \cos(n, x) = dy$$
$$dl * \sin(n, x) = -dx$$

Значит, $q = \int_A^B (u_x dy - u_y dx) = \int_A^B \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx\right) = \int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A = \Delta\Psi$ - расход между двумя линиями тока равен разности значений функций тока на этих линиях.

Если течение безвихревое, то $\omega_z = 0$: $\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$, т. е. $\Delta\Psi = \nabla\nabla\Psi = 0$

Для безвихревого течения функция тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

$$\text{Гидродинамическая сетка} \Leftarrow \begin{cases} \varphi = const - \text{эквипотенциали} \\ \Psi = const - \text{линии тока} \end{cases}$$

Свойства гидродинамической сетки:

1°. Сетка ортогональна

2°. Одноименные линии сетки не пересекаются нигде, за исключением особых точек ($u = 0, u = \infty$)

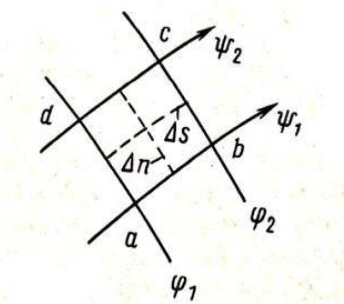
3°. Сетка квадратична в малом (рис.).

$q = u\Delta n = \Psi$ – приращение функции тока на отрезке Δn

$u = \frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta S}$, где $\Delta\varphi$ – приращение потенциала на отрезке ΔS

Значит, $\Delta q = \Delta\Psi = \frac{\Delta \varphi}{\Delta S}\Delta n$ или $\Delta\Psi\Delta S = \Delta\varphi\Delta n$

Если $\Delta n \approx \Delta S$, то $\Delta\Psi \approx \Delta\varphi$.



Свойство квадратичности гидродинамической сетки

Если течение плоское и безвихревое: $\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$, то $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0$ – уравнение Лапласа