11. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

11.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция F(x) называется <u>первообразной</u> функции f(x) на промежутке X, если в каждой точке x этого промежутка

$$F'(x) = f(x)$$

Например, функция $F(x)=\dfrac{x^4}{4}$

является первообразной для функции $f(x)=x^3$

поскольку

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$$

Для заданной функции *f(x)* ее первообразная определена не однозначно.

Например, функции

$$\frac{x^4}{4}+1; \quad \frac{x^4}{4}+2; \quad \dots \quad \frac{x^4}{4}+const$$

тоже являются первообразными для функции x^3**.**

В общем случае, если F(x) – первообразная для функции f(x), то функция вида F(x)+C тоже является первообразной для f(x), поскольку

$$\left(F(x)+C\right)'=F'(x)=f(x)$$

Из геометрического смысла производной вытекает, что

$$F'(x)$$

есть угловой коэффициент касательной к кривой *y=F(x)* в точке *x*.

Найти первообразную для функции f(x), значит найти такую кривую y=F(x), что угловой коэффициент касательной к ней в произвольной точке x равен значению f(x).

ТЕОРЕМА.

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то найдется такое число C, что будет справедливо равенство:

$$\boxed{F_2(x) = F_1(x) + C}$$

Доказательство:

Найдем производную разности первообразных:

$$\left(F_2(x)-F_1(x)\right)' = F_2'(x)-F_1'(x) =$$

$$= f(x)-f(x)=0$$

Тогда по следствию из теоремы Лагранжа найдется число С, такое что

$$F_2(x)-F_1(x)=C \quad \Rightarrow \quad \underline{F_2(x)=F_1(x)+C}$$

Из этой теоремы следует, что если *F(x)* – первообразная для функции *f(x)*, то выражение

$$F(x) + C$$

задает <u>все возможные первообразные</u> для функции *f(x)*.

Совокупность всех первообразных для функции f(x) на промежутке X называется неопределенным интегралом от функции f(x).

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Функция f(x) называется подынтегральной функцией.

Выражение f(x)dx называется подынтегральным выражением.

Пример.

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию.

Для проверки правильности результата интегрирования надо продифференцировать результат и получить подынтегральную функцию.