

**ОСНОВЫ
ФУНКЦИОНАЛЬНОГО
АНАЛИЗА**

Задачи

6. Докажите, что функционал $f(x)$ на пространстве $C[-1, 1]$ является линейным непрерывным, и найдите его норму:

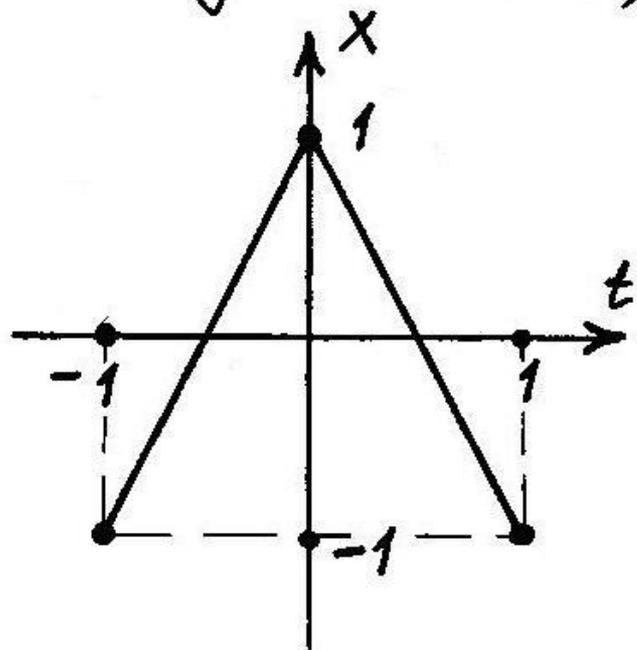
1) $f(x) = -2x(-1) + x(0) - x(1)$; 2) $f(x) = x(-1) + 2x(0) - x(1)$;

3) $f(x) = \int_0^1 x(t) dt - x(-1)$.

$$1) |f(x)| \leq 2 \cdot |x(-1)| + |x(0)| + |x(1)| \leq \\ \leq 2 \cdot \|x\| + \|x\| + \|x\| = 4 \|x\| \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ -ограничен и $\|f\| \leq 4$ (1)

Найдем $\bar{x}(t)$, такую, что $\|\bar{x}\| = 1$ и $f(\bar{x}) = 4$.

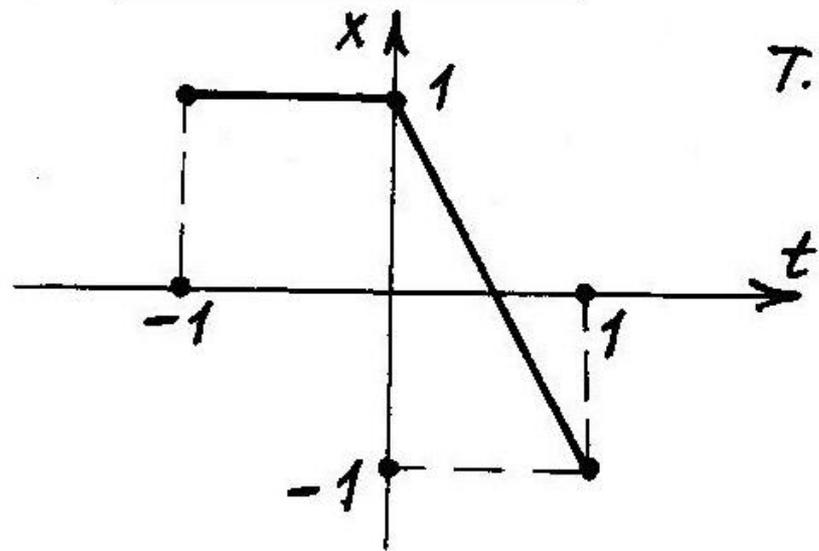


Аналитически описать
самое-то!

$$\underline{\underline{\|f\| = 4.}}$$

2) $\|f\| \leq 4$ (1) ; $\bar{x}(t): \|\bar{x}\| = 1$ u $f(\bar{x}) = 4$,

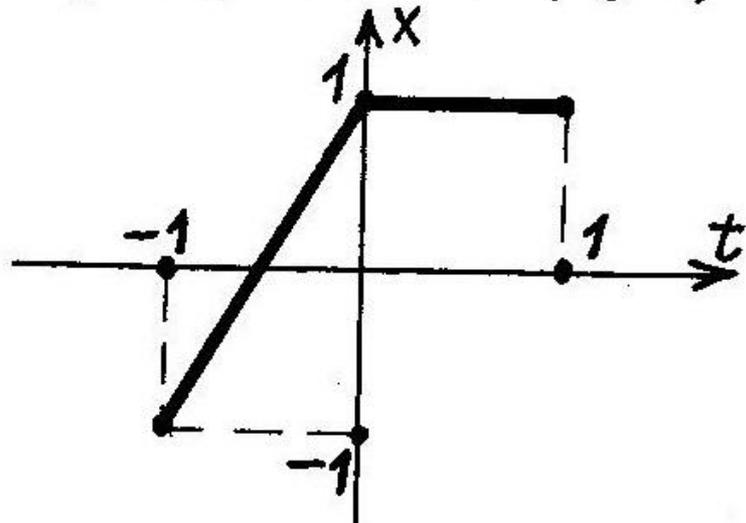
t.e. $\|f\| \geq |f(\bar{x})| = 4$ (2)



$\|f\| = 4$.

3) $\|f\| \leq 2$ (1) ; $\bar{x}(t): \|\bar{x}\| = 1$ u $f(\bar{x}) = 2$.

$\|f\| = 2$.



7. Операторы A , B , C и D действуют в пространстве l_2 :

$$Ax = (-x_2, 2x_1, -x_3, x_4, x_5, \dots, x_n, \dots), \quad Bx = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots, x_n, 0, \dots),$$

$$Cx = (x_1, 0, x_3, x_4, x_5, \dots, x_n, \dots), \quad Dx = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots, x_{2k-1}, -x_{2k}, \dots)$$

(для $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) \in l_2$).

1) Найдите норму каждого из этих операторов.

2) Проверьте, являются ли данные операторы обратимыми. Если оператор обратим, найдите обратный к нему.

Самостоятельно !

§ 12. Вполне непрерывные операторы

Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и задан оператор $A \in L(E, F)$. Оператор A называется *вполне непрерывным*, если всякое ограниченное множество $M \subset E$ он переводит в относительно компактное множество $A[M] \subset F$.

Заметим, что не всякий оператор из $L(E, F)$ является вполне непрерывным. Пусть, например, $\dim E = \infty$. Рассмотрим тождественный оператор $I \in L(E)$. Как известно, замкнутый шар с центром в нуле радиуса единица $B[0, 1] = M$ в бесконечномерном пространстве не является относительно компактным множеством. Тогда образ $I[M] = M$ не будет относительно компактным множеством. Значит, оператор $I \in L(E)$ не является вполне непрерывным.

Множество всех вполне непрерывных операторов из $L(E, F)$ будем обозначать $\sigma(E, F)$.

Теорема 1. Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Множество вполне непрерывных операторов $\sigma(E, F)$ является линейным многообразием в пространстве $L(E, F)$. Если пространство F банахово, то множество $\sigma(E, F)$ замкнуто, то есть является подпространством $L(E, F)$.

Теорема 2. Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и хотя бы одно из этих пространств конечномерно. Тогда множество вполне непрерывных операторов $\sigma(E, F) = L(E, F)$.

Доказательство. Следует установить включение $L(E, F) \subset \sigma(E, F)$.

Предположим сначала, что $\dim E < \infty$. Пусть $M \subset E$ – ограниченное и, следовательно, относительно компактное множество. Возьмем оператор $A \in L(E, F)$, и рассмотрим последовательность элементов $\{y_n\} \subset A[M]$. Тогда $y_n = Ax_n$, где последовательность $\{x_n\} \subset M$. Выделим сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, что $\|x_{n_k} - x_0\|_E \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, где $x_0 \in E$. Так как оператор A непрерывный, то $\|Ax_{n_k} - Ax_0\|_F \rightarrow 0$. Получили сходящуюся при $k \rightarrow \infty$ подпоследовательность $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$, где $y_{n_k} = Ax_{n_k}$.

Таким образом, множество $A[M]$ относительно компактно, и оператор A вполне непрерывный, то есть $A \in \sigma(E, F)$.

Теперь предположим, что $\dim F < \infty$. Пусть даны ограниченное множество $M \subset E$ и оператор $A \in L(E, F)$. Из оценки $\|Ax\|_F \leq \|A\| \|x\|_E$, где $x \in M$, следует ограниченность множества $A[M] \subset F$. Так как $\dim F < \infty$, то множество $A[M]$ относительно компактно в F . Следовательно, оператор $A \in \sigma(E, F)$. ■

Примеры вполне непрерывных операторов

Оператор вложения

ЛОО A действует из БП $E = C^1[0,1]$ в БП $F = C[0,1]$:

$$(Ax)(t) = x(t), \quad x \in E, \quad t \in [0,1].$$

Докажем, что оператор A является вполне непрерывным.

Доказательство. Рассмотрим произвольное ограниченное множество $M \subset E$. Надо доказать, что его образ $A(M) = M$ является относительно компактным множеством в БП $F = C[0,1]$.

Для этого воспользуемся теоремой Арцела.

Напоминание

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ КОМПАКТНОСТЬ В $C[a, b]$.

Пусть множество $M = \{x(t)\} \subset C[a, b]$. Ограниченность M означает, что

$$(\exists K \geq 0)(\forall x \in M)(\forall t \in [a, b])[|x(t)| \leq K].$$

Множество M называется *равностепенно непрерывным*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(\forall t_1, t_2 \in [a, b])[(|t_1 - t_2| < \delta) \rightarrow (|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon)].$$

ТЕОРЕМА АРЦЕЛА. Множество $M \subset C[a, b]$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.

Нетрудно убедиться, что множество $A(M) = M$ ограничено в F (доказать самостоятельно!).

Покажем, что множество $A(M)$ равномерно непрерывно.

Ограниченность множества M означает существование такой константы R , что для $\forall x \in M$

$$\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)| \leq R,$$

откуда вытекает, что $\max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)| \leq R$ для $\forall x \in M$.

Рассмотрим произвольный элемент $x \in A(M) = M$.

В силу **теоремы Лагранжа** (из курса математического анализа), для любых точек $t_1, t_2 \in [0, 1]$ найдется точка $\tau \in [0, 1]$, такая, что $x(t_1) - x(t_2) = \dot{x}(\tau)(t_1 - t_2)$.

Следовательно, для $\forall x \in M$ и для любых точек $t_1, t_2 \in [0, 1]$

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq \max_{\xi \in [0, 1]} |\dot{x}(\xi)| \cdot |t_1 - t_2| \leq R \cdot |t_1 - t_2|.$$

Тогда

$$(\forall \varepsilon > 0) \left(\exists \delta = \frac{\varepsilon}{R} \right) (\forall x \in A(M)) (\forall t_1, t_2 \in [0, 1]: |t_1 - t_2| < \delta) \\ \left[|x(t_1) - x(t_2)| \leq R \cdot |t_1 - t_2| < R \cdot \delta = \varepsilon \right],$$

что и означает равномерную непрерывность множества M .

Итак, для произвольного ограниченного множества $M \subset E$ его образ $A(M)$ относительно компактен в БП $F = C[0,1]$. Следовательно, оператор A является вполне непрерывным.

Напоминание

Теорема Лагранжа

Th \mathbb{R}^1
Есть функция $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$ дифференцируема на $[a, b]$, то \exists точка $c \in (a, b)$, такая, что

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b-a) \quad (*)$$

(доказ-ся в Мат. Анализе)

Формула (*) — формула конечных приращений.

Оператор Фредгольма

Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s) ds, \quad (1)$$

где функция $K(t, s)$ непрерывна по совокупности переменных $a \leq t, s \leq b$.

Нетрудно установить, что оператор $A \in L(C[a, b])$. Покажем, что этот оператор является вполне непрерывным в $C[a, b]$, то есть $A \in \sigma(C[a, b])$.

Пусть $M \subset C[a, b]$ – ограниченное множество, то есть

$$(\exists P > 0)(\forall x \in M)[\|x\|_C = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \leq P].$$

Покажем, что множество непрерывных функций $A[M]$ в $C[a, b]$ является относительно компактным, то есть согласно теореме Арцела ограниченным и равномерно непрерывным.

Если функция $y \in A[M]$, то $y = Ax$, где $x \in M$. Тогда

$$\|y\|_C = \|Ax\|_C \leq \|A\| \|x\|_C \leq \|A\| P,$$

то есть множество $A[M]$ ограничено в $C[a, b]$.

Далее, для функции $y(t) = Ax(t)$, где $x \in M$, и $t_1, t_2 \in [a, b]$ получим

$$\begin{aligned} |y(t_1) - y(t_2)| &= \left| \int_a^b [K(t_1, s) - K(t_2, s)]x(s) ds \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)| |x(s)| ds \leq P \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)| ds. \end{aligned} \quad (2)$$

Непрерывная в квадрате $a \leq t, s \leq b$ функция $K(t, s)$ равномерно непрерывна. Тогда

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t_1, t_2, s \in [a, b]) \\ &\left[(|t_1 - t_2| < \delta) \rightarrow \left(|K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{P(b-a)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что множество функций $A[M]$ равностепенно непрерывно.

Таким образом, множество $A[M] \subset C[a, b]$ относительно компактно, а оператор $A \in \sigma(C[a, b])$.

Другое название вполне непрерывного оператора -- ***компактный оператор***.

§ 13. Фактор-пространство

Пусть E — лин. простр-во, L — лин. многообразие в E .

Опр. Элементы $x, y \in E$ называются эквивалентными, если $x - y \in L$.

Обозначение: $x \sim y$.

Заметим, что выполняются след-е свойства (для $\forall x, y, z \in E$):

- 1) $x \sim x$ (рефлексивность);
- 2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (симметричность);
- 3) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (транзитивность).

Итак, на $\Lambda \Pi E$ задано отношение
эквивалентности, которое разбивает
кр-во E на классы смежности
(фрагмент-классы). Два класса смеж-
ности либо не пересекаются, либо
совпадают (частично пересекаясь они
не могут).

Класс эквивалентности (смежности),
корrespondирующий элементу $x \in E$,

имеет вид

$$x + L = \{x + y \mid y \in L\}.$$

Заметим, что для $\forall x_1 \in x + L$

$x_1 + L = x + L$ (любой "представитель"

x_1 класса $x + L$ порождает этот же класс).

Множество всех классов смежности называется фактор-множеством и

обозначается E/L ("E по L"):

$$E/L = \{x + L \mid x \in E\}.$$

На множестве E/L зададим
операции сложения и умножения
на число:

$$1) (x+L) + (y+L) = (x+y) + \overbrace{(L+L)}^L = \\ = x+y+L \quad (\text{классы складываются} \\ \text{как множества});$$

$$2) \lambda(x+L) = \lambda x + \underbrace{\lambda L}_L = \lambda x + L.$$

Роль нулевого элемента играет $LM L$.

Нетрудно проверить выполнение аксиом
линейного пространства.

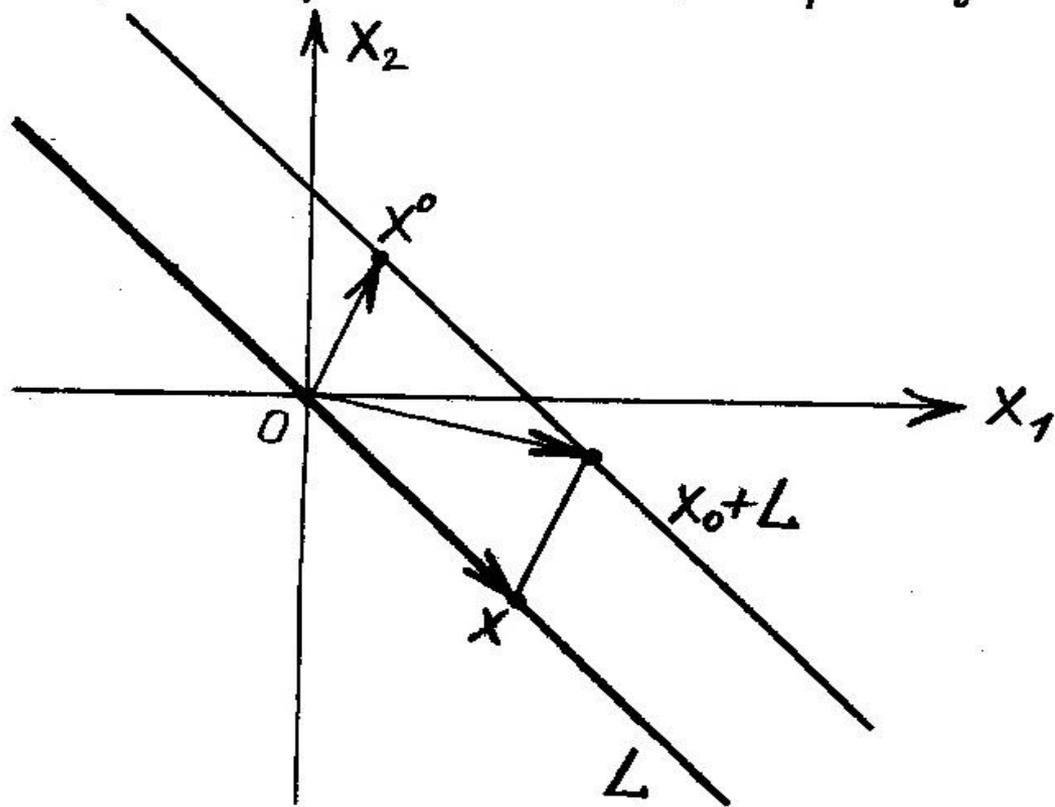
Линейное пространство E/L называется
фактор-пространством.

Пример $E = \mathbb{R}^2$,

$$L = \{ x = (x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \}.$$

$$x^0 + L = \{ x = (x_1^0 + x_1, x_2^0 + x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \}$$

— сдвиг-класс, порожденный элементом x^0 .



Литература

Смагин В.В. Линейные операторы и функционалы. Учебное пособие