Основы функционального анализа

Задачи

6. Докажите, что функционал $f(x)$ на пространстве $C[-1,1]$ является линейным непрерывным, и найдите его норму:

1) $f(x) = -2x(-1) + x(0) - x(1)$; 2) $f(x) = x(-1) + 2x(0) - x(1)$;

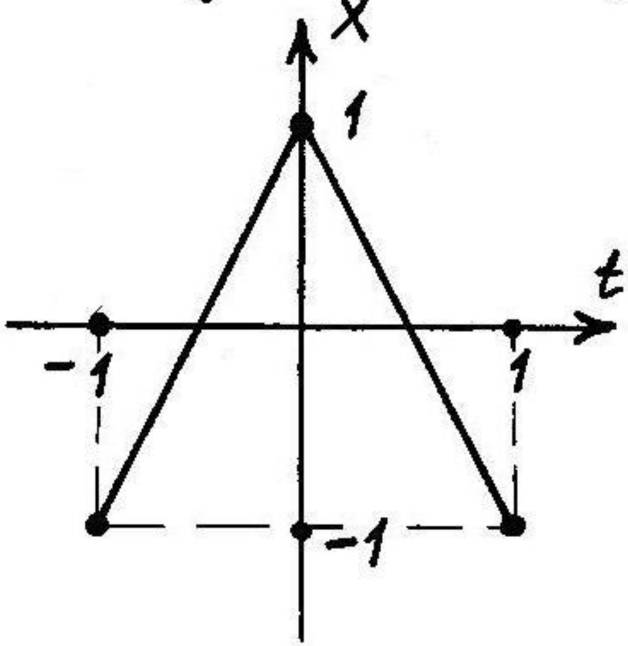
$$3)\ f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - x(-1)\ .$$

1) $|f(x)| \leq 2 \cdot |x(-1)| + |x(0)| + |x(1)| \leq$

$\leq 2 \cdot \|x\| + \|x\| + \|x\| = 4\|x\| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f – ограничен и $\underline{\|f\| \leq 4 \ (1)}$

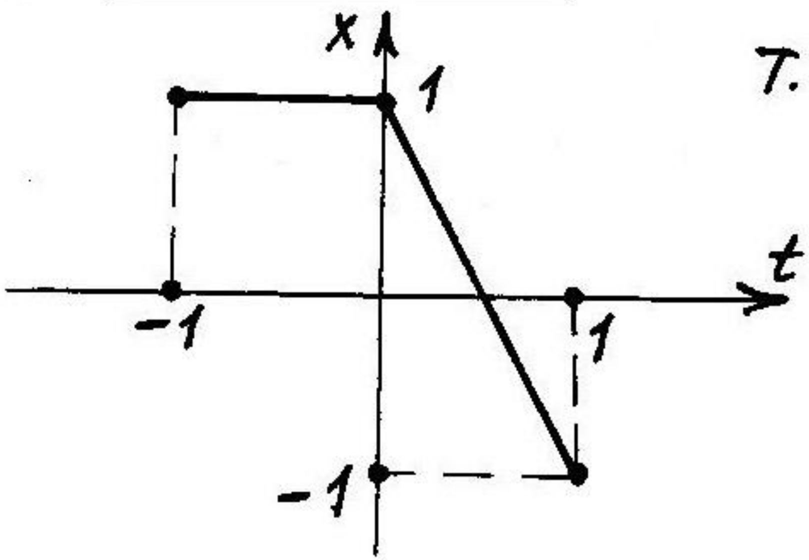
Найдем $\bar{x}(t)$, такую, что $\|\bar{x}\| = 1$ и $f(\bar{x}) = 4$.



Аналитически описать самост-но!

$\underline{\|f\| = 4.}$

2) $\underline{\|f\| \leq 4 (1)}$; $\bar{x}(t): \|\bar{x}\| = 1$ и $f(\bar{x}) = 4$,

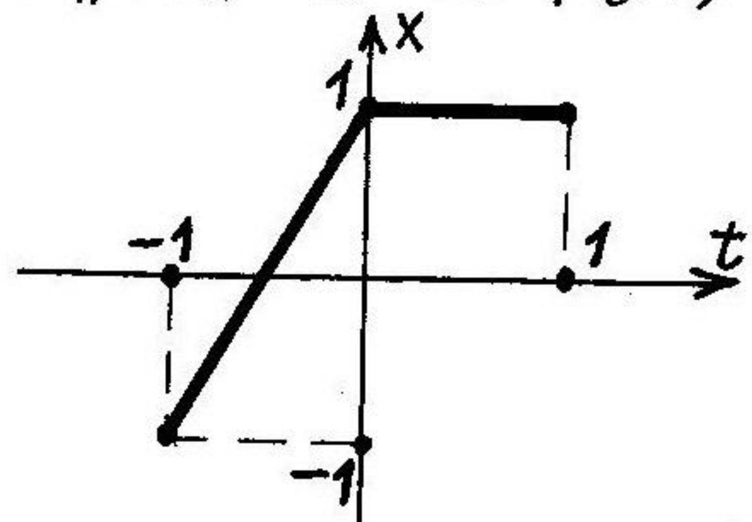


т.е. $\underline{\|f\| \geq |f(\bar{x})| = 4} \ (2)$

$\underline{\|f\| = 4.}$

3) $\underline{\|f\| \leq 2 \ (1)}$; $\bar{x}(t): \|\bar{x}\| = 1$ и $f(\bar{x}) = 2$.

$\underline{\|f\| = 2.}$



7. Операторы A, B, C и D действуют в пространстве l_2 :

$$Ax = (-x_2, 2x_1, -x_3, x_4, x_5, ..., x_n, ...), \quad Bx = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, ..., x_n, 0, ...),$$

$$Cx = (x_1, 0, x_3, x_4, x_5, ..., x_n, ...), \quad Dx = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, ..., x_{2k-1}, -x_{2k}, ...)$$

(для $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) \in l_2$).

1) Найдите норму каждого из этих операторов.

2) Проверьте, являются ли данные операторы обратимыми. Если оператор обратим, найдите обратный к нему.

Самостоятельно !

§ 12. Вполне непрерывные операторы

Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и задан оператор $A \in L(E, F)$. Оператор A называется *вполне непрерывным*, если всякое ограниченное множество $M \subset E$ он переводит в относительно компактное множество $A[M] \subset F$.

Заметим, что не всякий оператор из $L(E, F)$ является вполне непрерывным. Пусть, например, $\dim E = \infty$. Рассмотрим тождественный оператор $I \in L(E)$. Как известно, замкнутый шар с центром в нуле радиуса единица $B[\Theta, 1] = M$ в бесконечномерном пространстве не является относительно компактным множеством. Тогда образ $I[M] = M$ не будет относительно компактным множеством. Значит, оператор $I \in L(E)$ не является вполне непрерывным.

Множество всех вполне непрерывных операторов из $L(E, F)$ будем обозначать $\sigma(E, F)$.

Теорема 1. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Множество вполне непрерывных операторов $\sigma(E, F)$ является линейным многообразием в пространстве $L(E, F)$. Если пространство F банахово, то множество $\sigma(E, F)$ замкнуто, то есть является подпространством $L(E, F)$.*

Теорема 2. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и хотя бы одно из этих пространств конечномерно. Тогда множество вполне непрерывных операторов $\sigma(E,F) = L(E,F)$.*

Доказательство. Следует установить включение $L(E,F) \subset \sigma(E,F)$.

Предположим сначала, что $\dim E < \infty$. Пусть $M \subset E$ – ограниченное и, следовательно, относительно компактное множество. Возьмем оператор $A \in L(E,F)$, и рассмотрим последовательность элементов $\{y_n\} \subset A[M]$. Тогда $y_n = Ax_n$, где последовательность $\{x_n\} \subset M$. Выделим сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, что $\|x_{n_k} - x_0\|_E \to 0$ при $k \to \infty$, где $x_0 \in E$. Так как оператор A непрерывный, то $\|Ax_{n_k} - Ax_0\|_F \to 0$. Получили сходящуюся при $k \to \infty$ подпоследовательность $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$, где $y_{n_k} = Ax_{n_k}$.

Таким образом, множество $A[M]$ относительно компактно, и оператор A вполне непрерывный, то есть $A \in \sigma(E,F)$.

Теперь предположим, что $\dim F < \infty$. Пусть даны ограниченное множество $M \subset E$ и оператор $A \in L(E,F)$. Из оценки $\|Ax\|_F \le \|A\|\,\|x\|_E$, где $x \in M$, следует ограниченность множества $A[M] \subset F$. Так как $\dim F < \infty$, то множество $A[M]$ относительно компактно в F. Следовательно, оператор $A \in \sigma(E,F)$. ■

Примеры вполне непрерывных операторов

Оператор вложения

ЛОО A действует из БП $E = C^1[0,1]$ в БП $F = C[0,1]$:

$$(Ax)(t) = x(t), \quad x \in E, \quad t \in [0,1].$$

Докажем, что оператор A является вполне непрерывным.

Доказательство. Рассмотрим произвольное ограниченное множество $M \subset E$. Надо доказать, что его образ $A(M) = M$ является относительно компактным множеством в БП $F = C[0,1]$.

Для этого воспользуемся **теоремой Арцела**.

Напоминание

Относительная компактность в $C[a,b]$.

Пусть множество $M = \{x(t)\} \subset C[a,b]$. *Ограниченность* M означает, что

$$(\exists K \geq 0)(\forall x \in M)(\forall t \in [a,b])[\,|x(t)| \leq K\,].$$

Множество M называется *равностепенно непрерывным*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(\forall t_1, t_2 \in [a,b])[(|t_1 - t_2| < \delta) \to (|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon)].$$

Теорема Арцела. *Множество $M \subset C[a,b]$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Нетрудно убедиться, что множество $A(M)=M$ ограничено в F (*доказать самостоятельно!*).

Покажем, что множество $A(M)$ равностепенно непрерывно.

Ограниченность множества M означает существование такой константы R, что для $\forall x \in M$

$$\|x\|_E = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |\dot{x}(t)| \le R,$$

откуда вытекает, что $\max\limits_{t\in[0,1]} |\dot{x}(t)| \le R$ для $\forall x \in M$.

Рассмотрим произвольный элемент $x \in A(M) = M$. В силу **теоремы Лагранжа** (из курса математического анализа), для любых точек $t_1, t_2 \in [0,1]$ найдется точка $\tau \in [0,1]$, такая, что $x(t_1) - x(t_2) = \dot{x}(\tau)(t_1 - t_2)$.

Следовательно, для $\forall x \in M$ и для любых точек $t_1, t_2 \in [0,1]$

$$\left| x(t_1) - x(t_2) \right| \leq \max_{\xi \in [0,1]} \left| \dot{x}(\xi) \right| \cdot \left| t_1 - t_2 \right| \leq R \cdot \left| t_1 - t_2 \right|.$$

Тогда

$$(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists \delta = \frac{\varepsilon}{R} \right)(\forall x \in A(M))\left(\forall t_1, t_2 \in [0,1] : \left| t_1 - t_2 \right| < \delta \right)$$
$$\left[\left| x(t_1) - x(t_2) \right| \leq R \cdot \left| t_1 - t_2 \right| < R \cdot \delta = \varepsilon \right],$$

что и означает равностепенную непрерывность множества M.

Итак, для произвольного ограниченного множества $M \subset E$ его образ $A(M)$ относительно компактен в БП $F = C[0,1]$. Следовательно, оператор A является вполне непрерывным.

Напоминание

<u>Теорема Лагранжа</u>

<u>Th</u> Если функция $\varphi : \overset{\mathbb{R}^1 \atop \cup}{[a,b]} \to \mathbb{R}^1$ дифференцируема на $[a,b]$, то $\exists$ точка $c \in (a,b)$, такая, что

$$\underline{\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b-a) \qquad (*)}$$

(доказ-ся в Мат. Анализе)

Формула $(*)$ — <u>формула конечных приращений</u>.

Оператор Фредгольма

Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\,, \tag{1}$$

где функция $K(t,s)$ непрерывна по совокупности переменных $a \le t, s \le b$.

Нетрудно установить, что оператор $A \in L(C[a,b])$. Покажем, что этот оператор является вполне непрерывным в $C[a,b]$, то есть $A \in \sigma(C[a,b])$.

Пусть $M \subset C[a,b]$ – ограниченное множество, то есть

$$(\exists P > 0)(\forall\, x \in M)[\, \|x\|_C = \max_{a \le t \le b} |x(t)| \le P\,]\,.$$

Покажем, что множество непрерывных функций $A[M]$ в $C[a,b]$ является относительно компактным, то есть согласно теореме Арцела ограниченным и равностепенно непрерывным.

Если функция $y \in A[M]$, то $y = Ax$, где $x \in M$. Тогда

$$\|y\|_C = \|Ax\|_C \leq \|A\| \, \|x\|_C \leq \|A\| \, P\,,$$

то есть множество $A[M]$ ограничено в $C[a,b]$.

Далее, для функции $y(t) = Ax(t)$, где $x \in M$, и $t_1, t_2 \in [a,b]$ получим

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left| \int_a^b [K(t_1,s) - K(t_2,s)] x(s) \, ds \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)| \, |x(s)| \, ds \leq P \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)| \, ds\,. \tag{2}$$

Непрерывная в квадрате $a \leq t, s \leq b$ функция $K(t,s)$ равномерно непрерывна. Тогда

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, t_1, t_2, s \in [a,b])$$

$$\left[(|t_1 - t_2| < \delta) \to \left(|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{P(b-a)} \right) \right]. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что множество функций $A[M]$ равностепенно непрерывно.

Таким образом, множество $A[M] \subset C[a,b]$ относительно компактно, а оператор $A \in \sigma(C[a,b])$.

Другое название вполне непрерывного оператора -- ***компактный оператор.***

§ 13. Фактор-пространство

Пусть E — лин. простр-во, L — лин. многообразие в E.

<u>Опр.</u> Элементы $x, y \in E$ называ-ся <u>эквивалентными</u>, если $x - y \in L$.

Обозначение: $x \sim y$.

Заметим, что выполняются след-е свойства (для $\forall x, y, z \in E$):

1) $x \sim x$ (рефлексивность);

2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (симметричность);

3) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (транзитивность).

Итак, на ЛП E задано отношение эквивалентности, которое разбивает пр-во E на классы смежности (фактор-классы). Два класса смежности либо не пересекаются, либо совпадают (частично пересекаться они не могут).

Класс эквивалентности (смежности), порожденный элементом $x \in E$, имеет вид

$$x + L = \{x + y \mid y \in L\}.$$

Заметим, что для $\forall x_1 \in x + L$ $x_1 + L = x + L$ (любой "представитель" x_1 класса $x + L$ порождает этот же класс).

Множество всех классов смежности называется <u>фактор-множеством</u> и обозначается E/L ("E по L"):

$$E/L = \{x + L \mid x \in E\}.$$

На множестве E/L зададим операции сложения и умножения на число:

1) $(x+L)+(y+L)=(x+y)+(\overbrace{L+L}^{L})=$
$= x+y+L$ (классы складываются как множества);

2) $\lambda(x+L) = \lambda x + \underbrace{\lambda L}_{L} = \lambda x + L.$

Роль нулевого элемента играет ЛМ L.
Нетрудно проверить выполнение аксиом линейного простр-ва.

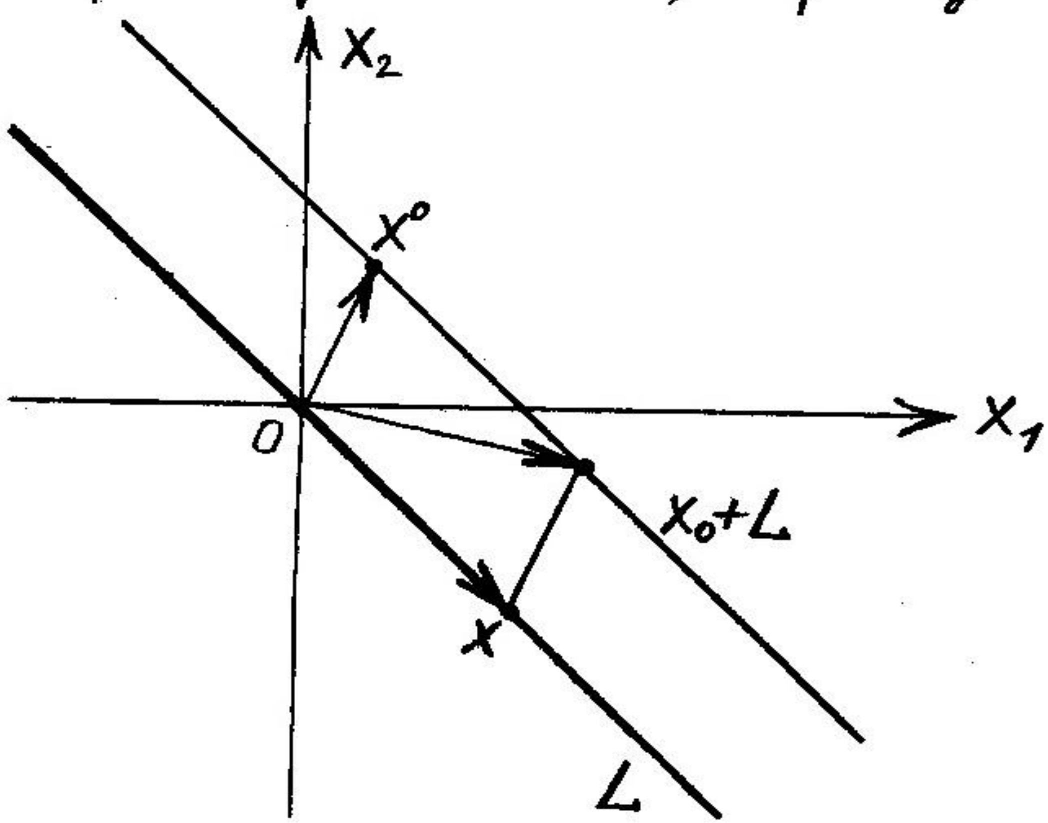
Линейное простр-во E/L наз-ся фактор-пространством.

<u>Пример</u> $E = \mathbb{R}^2$,

$L = \{ x = (x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \}$.

$x^0 + L = \{ x = (x_1^0 + x_1, x_2^0 + x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \}$

— фактор-класс, порожд-й элем-м x^0.



Литература

Смагин В.В. Линейные операторы и функционалы. Учебное пособие