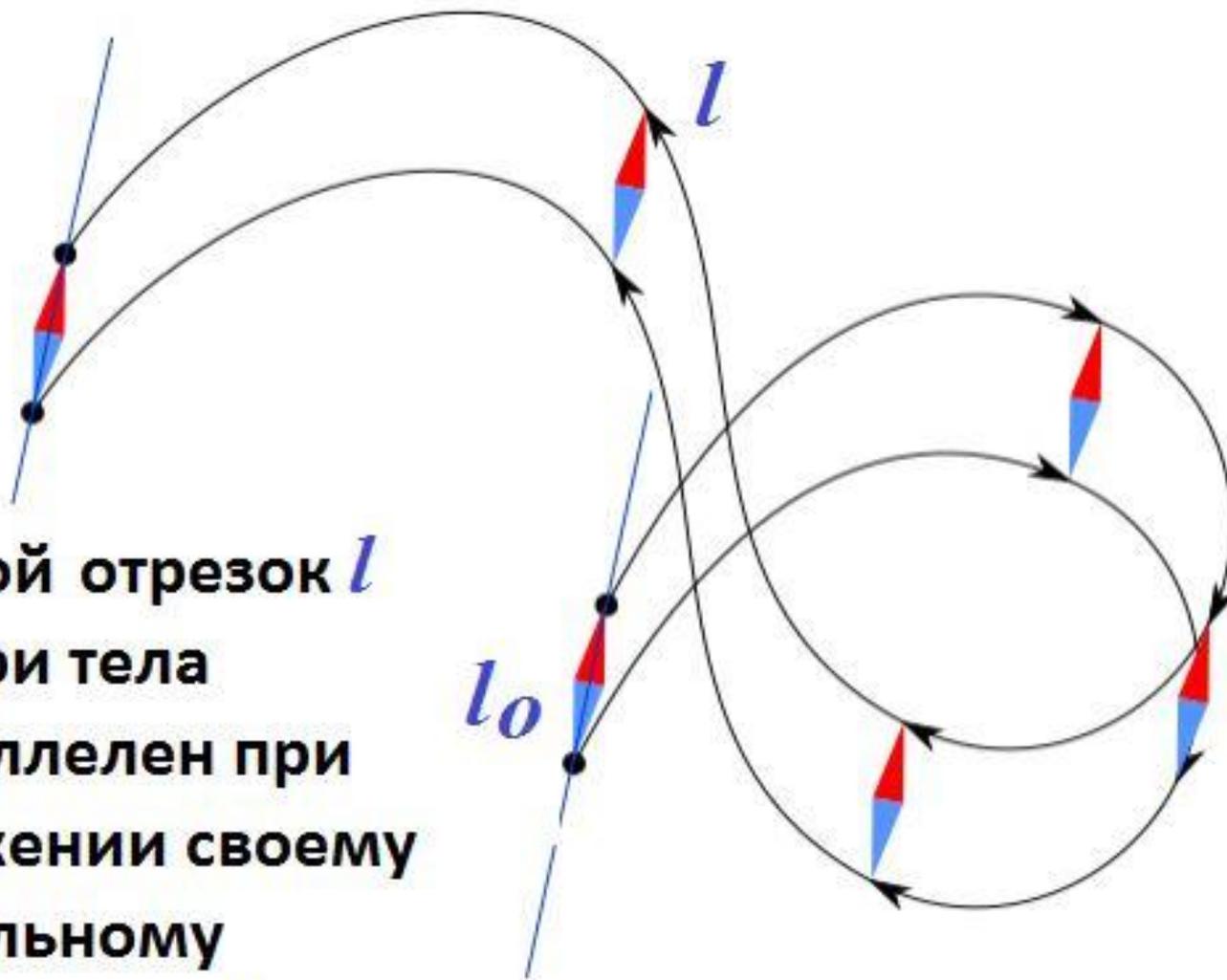
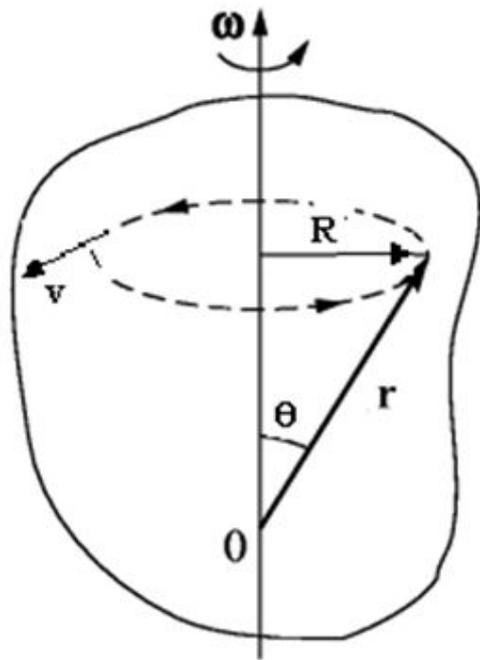


Поступательное движение

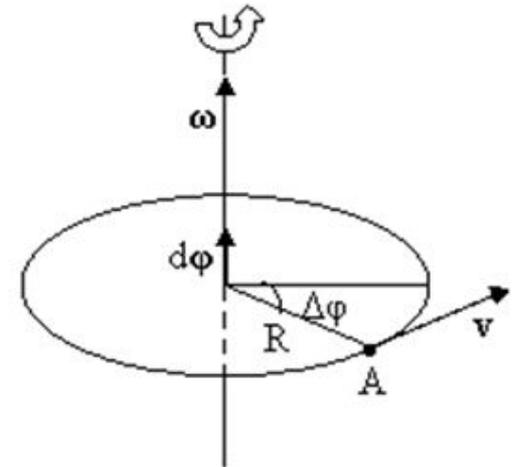
Любой отрезок l
внутри тела
параллелен при
движении своему
начальному
положению l_0



Угловая скорость вращения



При вращении тела вокруг фиксированной оси: модель *абсолютно твердого тела*, т.е. тела, в кот. при движении расстояния между \forall парами точек не меняются. Фиксированная ось вращения - все точки оси неподвижны в выбранной СО. Расстояния от \forall точки до оси неизменны $\Rightarrow \forall$ точка тела движется по окружности.

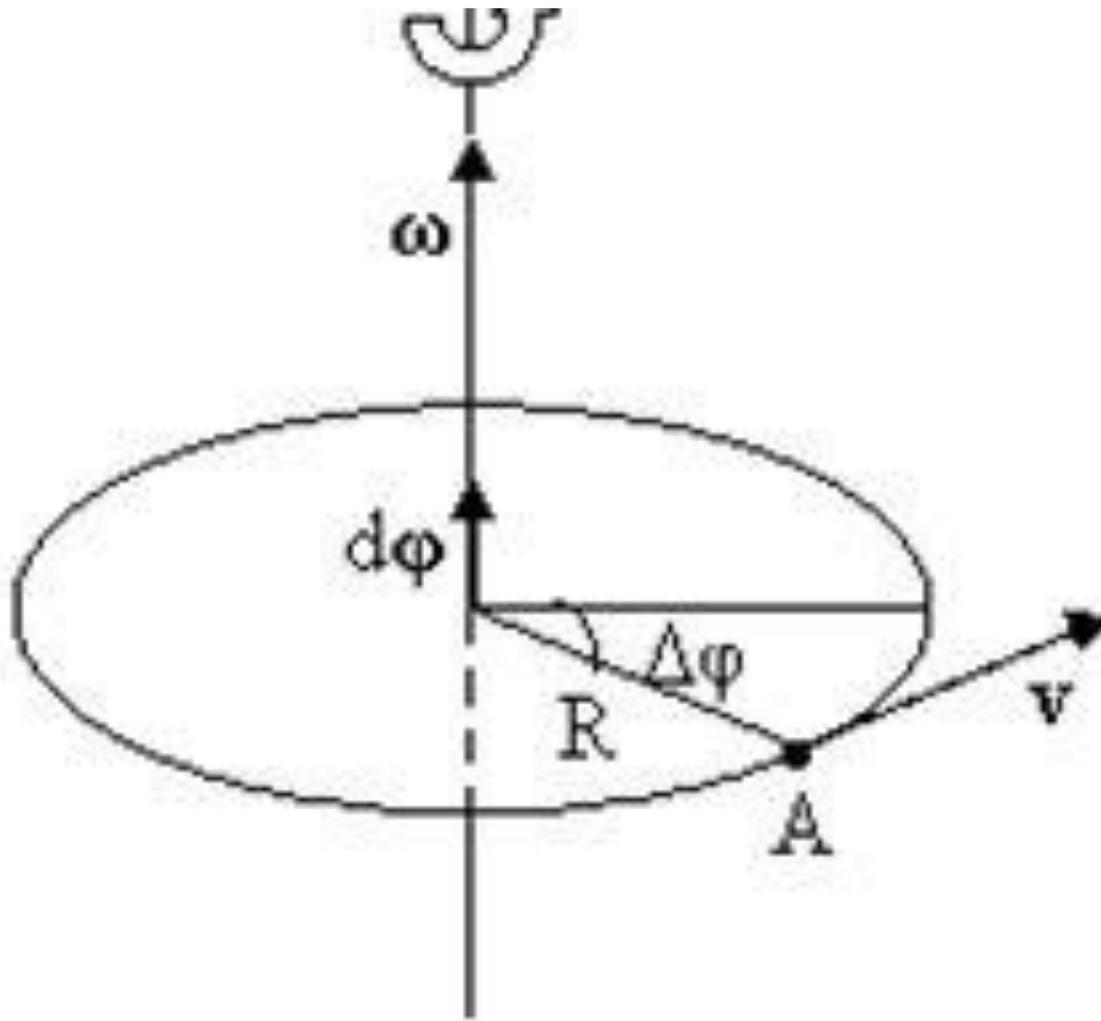


Если за Δt точка проходит по дуге $\Delta\phi$, то \forall другая точка проходит по такой же дуге \Rightarrow все тело поворачивается на угол $\Delta\phi$.

Средняя угловая скорость вращения $\langle\omega\rangle = \Delta\phi/\Delta t$, кот. при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в мгновенную угловую скорость вращения:

$$\omega = d\phi/dt$$

К определению вектора угловой скорости



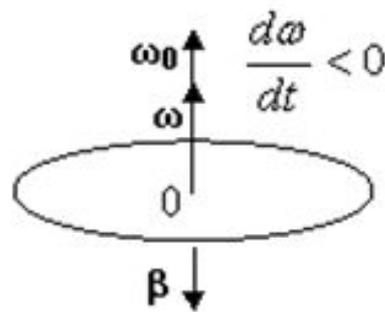
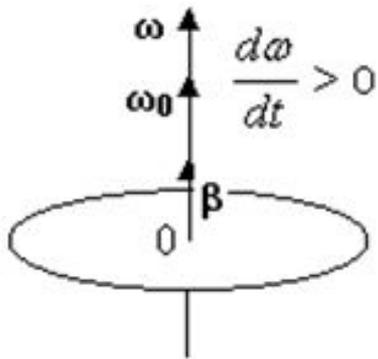
Векторы угловой скорости и углового ускорения

Линейная скорость точки: $v = dl/dt = R d\varphi/dt = R \omega$.

\mathbf{v} и \mathbf{R} – векторные величины, причем $\mathbf{v} \perp \mathbf{R} \Rightarrow$ величине ω сопоставляется вектор $\boldsymbol{\omega}$, такой что $|\boldsymbol{\omega}| = \omega$, а направление задается правилом буравчика, кот. вращается вместе с телом:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$$

Это соотношение годится не только для вектора \mathbf{R} , проведенного из центра окружности, по кот. движется точка, но из \forall точки на оси, т.к. $R = r \sin\theta$.



Если $\omega \downarrow \uparrow$ со временем, то определяют вектор углового ускорения $\boldsymbol{\beta}$:

$|\boldsymbol{\beta}| = |d\omega/dt|$, а направление совпадает с $\boldsymbol{\omega}$, если $d\omega/dt > 0$, и противоположно, если $d\omega/dt < 0$.

Динамика

Кинематика - траектории, скорости, ускорения, но не причины.

Динамика - раздел механики, изучающий причины движения. Динамика рассматривает движение тел с пом. модели, основные положения кот. можно сформулировать следующим образом:

- 1. если тело достаточно мало, то его движение подчиняется законам движения материальной точки (МТ);
- 2. основные законы движения МТ - 3 закона Ньютона (ЗН);
- 3. если тело большое, то его мысленно разбивают на части, каждую из которых можно считать МТ;
- 4. взаимодействие между частями крупного тела - с помощью тех же законов Ньютона.

Опыт \Rightarrow движение МТ полностью описывается 3 ЗН (конец 17 века. «Математические начала натуральной

3 закона Ньютона

I. Всякое тело продолжает оставаться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения пока и поскольку не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

II Изменение количества движения тела происходит пропорционально действующей силе и по направлению той прямой, по которой приложена эта сила.

III Действию всегда есть равное и противоположно направленное противодействие, иначе - воздействия 2 тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.

Латынь из моды вышла ныне

Lex prima

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Всякое тело продолжает оставаться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения пока и поскольку не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

1 закон Ньютона

Аристотель: естественное состояние \forall тела - состояние покоя. Чтобы привести тело в движение и поддерживать его, нужна внешняя причина (наз. силой). Сила исчезает \Rightarrow тело возвращается в состояние покоя.

Галилей (нач. 16 в.): нет принципиальной разницы между состояниями покоя и равномерного прямолинейного движения (РПД). Если корабль движется равномерно и прямолинейно относительно берега, то тело покоится на его палубе, но движется равномерно и прямолинейно относительно берега.

Все физические процессы в СО протекают одинаково, независимо от того, неподвижна система или находится в состоянии РПД.

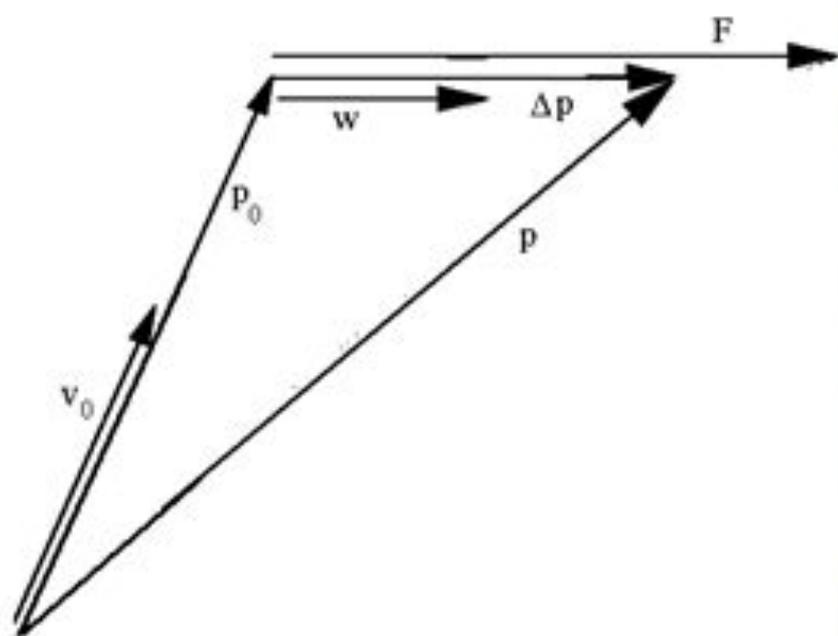
Это (принцип относительности Галилея), уравнивает состояния покоя и равномерного прямолинейного движения и является частью 1 ЗН.

Второй смысл этого закона - при рассмотрении 2 ЗН.

2 закон Ньютона

- 1 ЗН \Rightarrow состояние покоя или РПД «естественное» (без внешних причин)
2 ЗН - изменение этого состояния при взаимодействии с другими телами.
В нем новая ФВ – *количество движения, или импульс тела \mathbf{p}* :

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}$$



Импульс содержит скорость \mathbf{v} (известна из кинематики), а массу m Ньютон определял, как меру количества вещества в теле.

Эта мера м. б. разной – по объему, по числу молекул, по теплотворной способности и т.д.

Изменение импульса пропорционально *силе \mathbf{F}* :

$$d\mathbf{p}/dt \sim \mathbf{F}$$

Все величины векторные (в законе речь идет о направлениях).

Это соотношение удобно

воспользоваться более привычной формой:

$$d\mathbf{v}/dt \sim \mathbf{F}/m \text{ или } \mathbf{w} \sim \mathbf{F}/m$$

В ЛЧ – известное из кинематики ускорение, а в ПЧ – 2 неопределенных, масса и сила.

Понятия силы и массы

Сила? Ньютон: тело испытывает ускорение \Rightarrow на него воздействуют другие тела, а мерой этого воздействия является F – сила. Происхождение м. б. разным.

Как сравнивать разные силы?

Масса? Ньютон: мера количества вещества в теле, чем больше в теле вещества, тем меньшее ускорение оно получит.

Эйлер (около 1740): масса - ***мера инертности тела***, т.е. способности сохранять свою скорость под воздействием силы.

Масса

2 тела получают одинаковое ускорение под действием одной и той же силы \Rightarrow у них одинаковая масса.

Масса - особая ФВ \Rightarrow нужна единица измерения, т.е. нужно указать тело, масса которого считается единичной.

В СИ: единица массы *килограмм* (кг) - масса 1 дм³ чистой воды при 4^oC и нормальном давлении. [m] = кг

Эталон из сплава платины и иридия.

Диапазон: от 10^{-30} кг для электрона до 10^{42} кг для Галактики (человек - 10^2 кг, Земля - 10^{25} кг, Солнце - 10^{30} кг).

Единицы для силы и импульса

Для сравнения разных сил можно использовать тот же способ, что для сравнения разных масс, но на этот раз брать одно и то же тело (фиксировать массу). Если тело получает ускорение в 2 раза больше, значит, сила вдвое больше и т.п.

Далее следует выбрать единицу измерения силы. При этом можно получить не только саму единицу, но и выбрать коэффициент пропорциональности в $\mathbf{w} \sim \mathbf{F}/m$ равным 1. В системе СИ единицей силы является *ньютон*. 1 ньютон это сила, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 м/с².

$$[F] = \text{H} = \text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$$

Заодно нужно определить единицу измерения импульса:

$$[p] = \text{кг}\cdot\text{м}/\text{с} = \text{H}\cdot\text{с}$$

После такого выбора единиц измерения соотношения пропорциональности превращаются в уравнения:

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F} \text{ (основное уравнение динамики)} \text{ и } \mathbf{w} = \mathbf{F}/m$$

Соотношение I и II законов Ньютона

1-е заблуждение: I ЗН не самостоятельный закон, а частный случай II ЗН при $F = 0$.

2-е заблуждение: II ЗН противоречит простым наблюдениям: если наблюдатель движется с ускорением, то окружающие предметы движутся с ускорением в противоположную сторону.

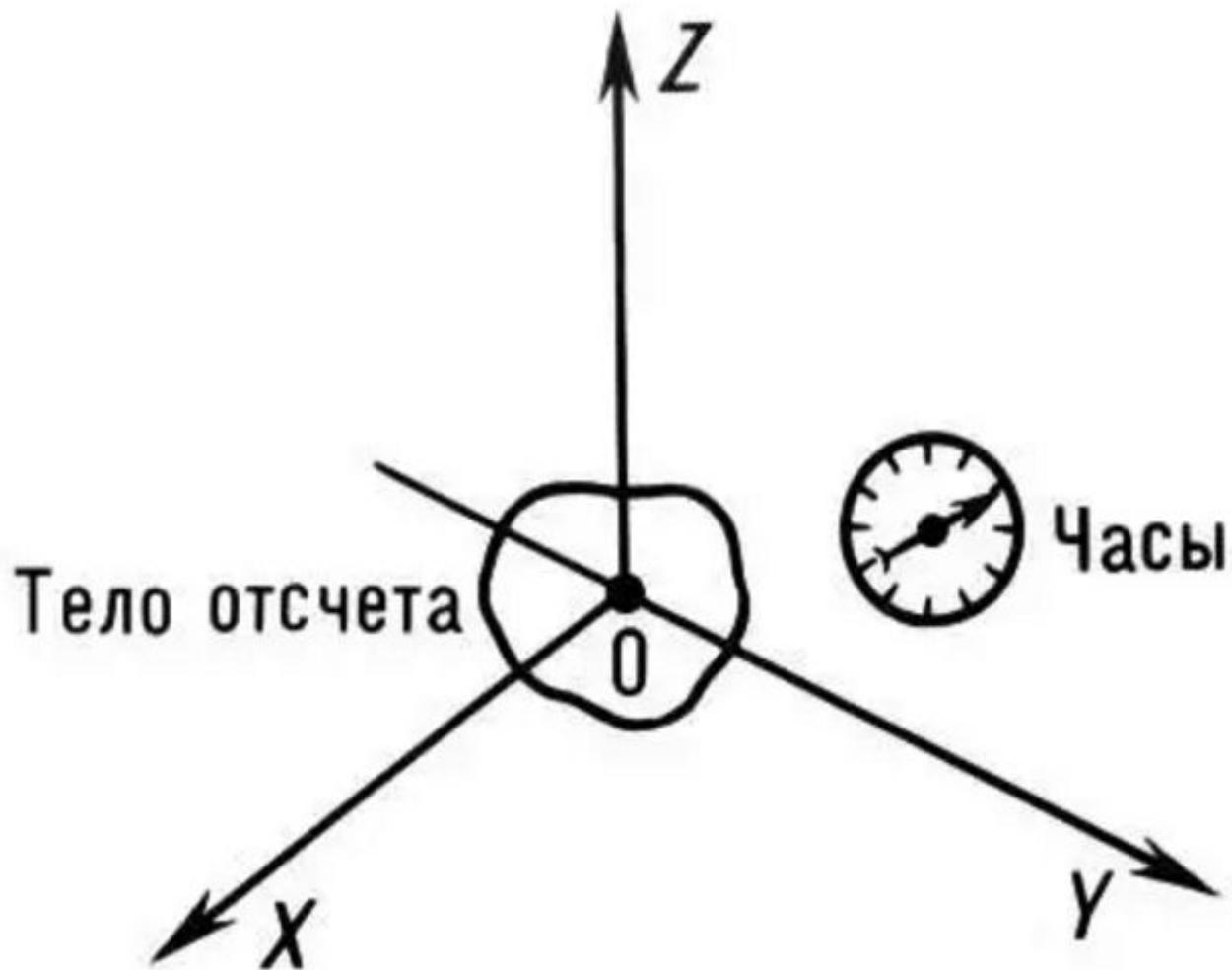
II ЗН справедлив не для всех систем отсчета, а только для некоторых из них, а именно, для *инерциальных СО (ИСО)*.

Существуют ли ИСО?

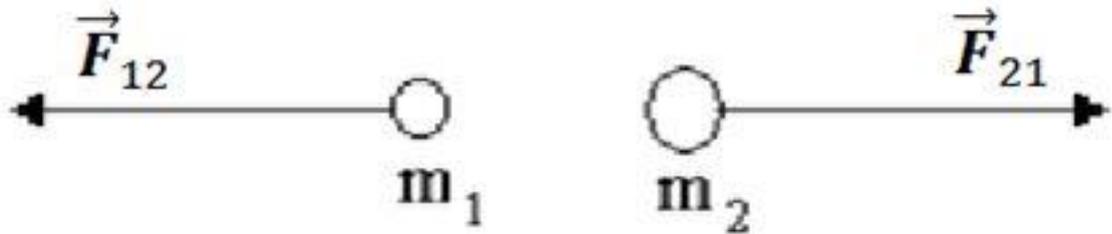
Ответы дает I ЗН. Признак ИСО $w = 0$ при $F = 0$.
Существование таких СО обещает I ЗН. *В этом состоит второй важный смысл I ЗН.*

Принцип относительности утверждает, что все СО, движущиеся равномерно и прямолинейно друг относительно друга, эквивалентны, т.е. если существует одна ИСО, то существует и бесконечное множество других.

Система отсчета



III закон Ньютона



При взаимодействии 2 тел силы, с которыми они действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Существенно, что силы \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21} приложены к разным телам.

III ЗН справедлив в любых, а не только в инерциальных СО.

Динамические уравнения движения.
(обратная задача динамики)

Законы Ньютона \Rightarrow

*дифференциальные уравнения (ДУ) =
динамические уравнения движения.*

*Решения динамических уравнений
движения \Rightarrow*

кинематические уравнения движения,
т.е. зависимости от времени
координат и скоростей тел.

Простой пример

● Движение МТ вдоль оси $Ox \Rightarrow$ уравнение движения:

$$w_x = \frac{F_x}{m} \quad \text{или} \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x}{m}$$

Получить проекцию скорости $v_x =$ найти (угадать, найти в таблице или справочнике) первообразную для функции в ПЧ этого уравнения:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \int F_x dt$$

Для простоты: $F_x = \text{const} \Rightarrow v_x = (F_x/m) t + C_1$,

где C_1 – константа интегрирования.

Далее найти первообразную для v_x :

$$x = \int v_x dt = \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} t^2 + C_1 t + C_2$$

C_2 – вторая константа интегрирования.

Константы интегрирования и начальные условия

Решение с конст-ми интегрирования – общее решение.

Константы интегрирования \Leftarrow начальные условия (НУ). т.е. значения v_x и x в начальный момент времени.

Их подставить в общее решение и найти С:

$$v_x = (F_x / m) t + v_0$$
$$x = \frac{1}{2}(F_x / m) t^2 + v_0 t + x_0$$

Решение ДУ (и систем ДУ, т.к. нужны еще уравнения для 2 других координат и для других тел) требует некоторых математических навыков.

Поэтому стараются избегать ДУ и получать решения из законов сохранения (ЗС), т.е. соотношений для ФВ, которые сохраняют свои начальные значения при некоторых условиях.

Закон сохранения импульса

• Движение МТ, на кот. не действуют никакие силы или

$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{dp}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = const \Rightarrow$ импульс МТ
остается постоянным (сохраняется) $\vec{v} = const = \vec{v}_0$ -
без решения ДУ.

Когда будет похожий результат, если силы ненулевые?

Система N тел (МТ), между ними действуют силы \vec{F}_{ki} ,
но др. сил нет (находятся далеко). Такая с-ма тел наз.
замкнутой.

Для каждой МТ: $\frac{\overrightarrow{dp}_k}{dt} = \sum \vec{F}_{ik}$ (при этом $i \neq k$)

Сумма этих соотношений: $\sum \frac{\overrightarrow{dp}_k}{dt} = \sum \sum \vec{F}_{ik}$

Закон сохранения импульса для замкнутой системы

В ЛЧ меняем местами суммирование и дифференцирование:

$$\sum \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \frac{d}{dt} (\sum \vec{p}_k) = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

где $\vec{P} = \sum \vec{p}_k$ – суммарный (полный) импульс системы.

В ПЧ слагаемые группируют так, чтобы $\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}$ стояли рядом. Тогда выяснится, что ПЧ = 0.

$$d\vec{P}/dt = 0 \Rightarrow \vec{P} = const$$

Это соотношение выражает *закон сохранения импульса (ЗСИ)* для замкнутой системы.

Какая польза? Вместо $3N$ ДУ можно решать только $3(N - 1)$, т.к. импульс, напр., последнего тела $\vec{p}_N = \vec{P} - \sum_i \vec{p}_i$ (сумма по $N - 1$ тел) получается из решения укороченной системы.

Закон сохранения и **изменения**

импульса незамкнутой системы

Если с-ма незамкнутая, т.е. кроме внутренних сил действуют и внешние силы, то:

$$\frac{dp_k}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ik}^{int}} + \overrightarrow{F_k^{ext}}$$

Индексы int = internal, внутренний; ext – external, внешний.

После суммирования: $\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = \sum \sum \overrightarrow{F_{ik}^{int}} + \sum \overrightarrow{F_k^{ext}}$

I слагаемое в ПЧ дает $\overrightarrow{0}$, а II - сумма всех внешних сил, действующих на систему $\overrightarrow{F^{ext}} = \sum \overrightarrow{F_k^{ext}}$:

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = \overrightarrow{F^{ext}}$$

Изменение полного импульса с-мы происходит под действием только внешних сил.

Это соотношение выражает **закон сохранения и изменения импульса** для незамкнутой системы.

Теорема о движении центра масс

Его уравнение движения можно привести к виду $\vec{w} = \vec{F}/m$.

Центр масс (ЦМ), или центр инерции, системы:

$$\vec{R} = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{\sum m_k}$$

Здесь m_k и \vec{r}_k – массы и РВ отдельных частей системы, \vec{R} – радиус-вектор ЦМ, а общая масса системы $M = \sum m_k$. При этом $d\vec{P}/dt = \vec{F}^{ext}$ превращается в:

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{ext} \quad \text{или} \quad M \vec{W}_c = \vec{F}^{ext}$$

где \vec{W}_c – ускорение ЦМ.

Эти соотношения выражают теорему о движении ЦМ.