

Векторная алгебра

- Определение вектора, единичного вектора, орта вектора, коллинеарных / компланарных векторов
- Проекция вектора на координатные оси
- Линейные операции над векторами
- Определение линейно зависимых/независимых векторов
- Теорема о разложении вектора на плоскости и в пространстве

Векторная алгебра

Определение

Вектором называется направленный отрезок

Обозначение вектора: $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$

$|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$ - длина вектора

Определение

Вектор, длина которого равна единице называется единичным вектором

Векторная алгебра

Определение

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора

называется

ортом вектора \vec{a} и обозначается \vec{a}^0

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$$

Определение

Три вектора в пространстве называются компланарными, если они лежат в одной плоскости

или в параллельных плоскостях

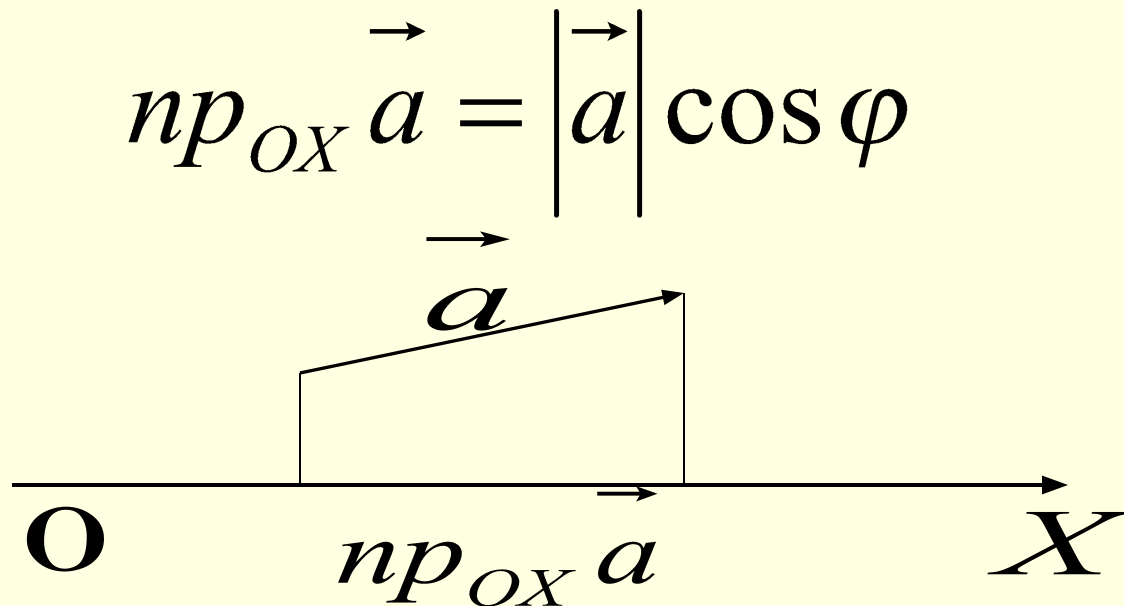
Определение коллинеарных векторов

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$$

Векторная алгебра

Определение

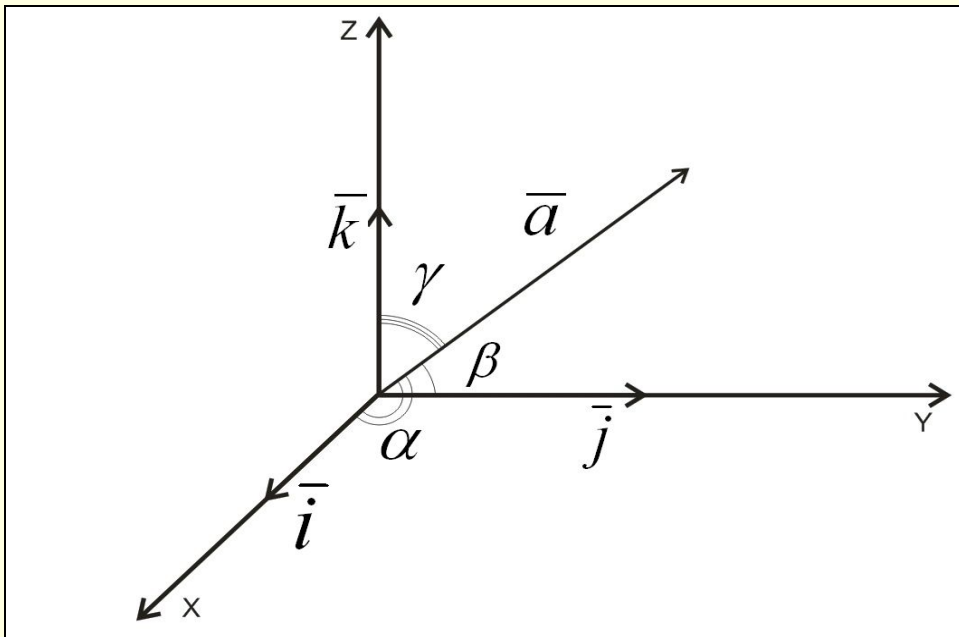
Если вектор \vec{a} составляет угол φ с осью Ox , то проекция вектора \vec{a} на ось Ox называется произведением $|\vec{a}| \cos \varphi$ на $\cos \varphi$.



Векторная алгебра

Пусть в 3-х-мерном пространстве задана прямоугольная система координат OXYZ

Пусть \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} - единичные векторы, направление которых совпадает с положительными направлениями координатных осей OX, OY, OZ соответственно



Углы, образованные вектором \vec{a} с осями координат:

$$\alpha, \beta, \gamma$$

Векторная алгебра

Проекция вектора \vec{a} на оси координат

$$x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha \quad y = |\vec{a}| \cdot \cos \beta \quad z = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma$$

Вектор \vec{a} имеет координаты x, y, z , то есть $a(x, y, z)$ в прямоугольной системе координат $OXYZ$ или $\vec{a} = xi + yj + zk$, где i, j, k - единичные векторы координатных осей

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \text{длина вектора } \vec{a}$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы вектора \vec{a} : $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Векторная алгебра

Действия сложения векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и умножения вектора на число $\alpha \cdot a$ называются линейными операциями над векторами

Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ - векторы, заданные на плоскости R_2 или в пространстве R_3

Выражение вида $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{a}_i$,

где $\alpha_i, i = \overline{1, k}$ - произвольные действительные числа называется линейной комбинацией векторов

Векторная алгебра

Векторы **Определение** называются

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ линейно
 зависимыми, если существуют такие
 действительные числа
 $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, k$
 одновременно

не обращающиеся в ноль $\sum_{i=1}^k \alpha_i \neq 0$, что
 линейная

комбинация векторов с этими числами равна $\vec{0}$ (1)

Если равенство (1) выполняется только в

случае, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$,
 когда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$, то вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$
 \dots, \vec{a}_k называются линейно независимыми

Пример

Рассмотрим на плоскости два неколлинеарных вектора \vec{e}_1 и \vec{e}_2

Покажем, что эти векторы линейно независимы

Доказательство (метод от противного)

Предположим, что вектора \vec{e}_1, \vec{e}_2 линейно зависимы. По определению линейно зависимых

векторов $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in R, \sum_{i=1}^2 |\alpha_i| > 0 : \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 = \vec{0}$

Для определенности предположим $\alpha_1 \neq 0$, тогда $\vec{e}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{e}_2$ Таким образом, $\exists \alpha = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} : \vec{e}_1 = \alpha \vec{e}_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{e}_1 \parallel \vec{e}_2 \Rightarrow$ Противоречие! Предположение не верно

Пример

Проверим, являются ли линейно зависимыми
вектора

$$\vec{e}_1 (1, -1, 0); \vec{e}_2 (1, 2, 3); \vec{e}_3 (0, 1, -1)$$

По определению линейно (не)зависимых векторов

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R : \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 = \vec{0}$$

Запишем это равенство для координат векторов

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 (1, -1, 0) + \lambda_2 (1, 2, 3) + \lambda_3 (0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_2 - \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

Пример

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Получена система линейных однородных уравнений относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Если ранг матрицы системы меньше 3, то система имеет ненулевое решение \Rightarrow вектора

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно зависимы

Если ранг равен 3, то система имеет только

тривиальное решение \Rightarrow вектора

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно независимы

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

Вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно независимые

Векторная алгебра

Теорема

(о разложении вектора на плоскости)

Пусть \vec{e}_1, \vec{e}_2 - неколлинеарные векторы на

плоскости, тогда всякий комплонарный им
вектор

\vec{a} можно представить и притом

единственным

образом в виде линейной комбинации векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , то есть $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 \quad (2)$$

Векторная алгебра

Доказательство

1) Покажем существование разложения

По условию векторы e_1, e_2 - неколлинеарные векторы \Rightarrow эти векторы не нулевые.

В случае, если $\vec{a} \parallel \vec{e}_1 \Rightarrow \exists \lambda \in R : \vec{a} = \lambda \vec{e}_1$,
тогда разложение (2) справедливо при

$$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 0$$
$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$$

Векторная алгебра

В случае, если $\vec{a} // \vec{e}_2 \Rightarrow \exists \lambda \in R : \vec{a} = \lambda \vec{e}_2$,
тогда разложение (2) справедливо при

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda$$
$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$$

Одновременное выполнение

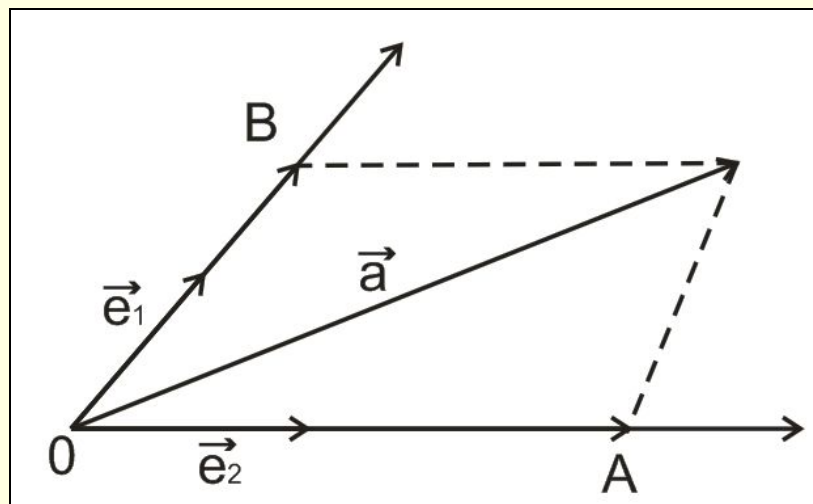
$$\vec{a} // \vec{e}_1, \vec{a} // \vec{e}_2$$

не может быть

Векторная алгебра

Общий случай, когда вектора \vec{a}, \vec{e}_1 и \vec{a}, \vec{e}_2 неколлинеарные.

Приведем $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ к общему началу и построим параллелограмм так, чтобы вектор \vec{a} был его диагональю, то есть выполним построение



Векторная алгебра

По правилу сложению векторов

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OA} \parallel \vec{e}_2 \Rightarrow \exists \lambda_2 \in R : \overrightarrow{OA} = \lambda_2 \vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{OB} \parallel \vec{e}_1 \Rightarrow \exists \lambda_1 \in R : \overrightarrow{OB} = \lambda_1 \vec{e}_1 \quad \Big| \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$$

Таким образом, разложение (2) существует

Векторная алгебра

1) Докажем единственность разложения (2)

Предположим противное, что разложение (2) не единственно, то есть

$$\exists \mu_1, \mu_2 \in R : \sum_{i=1}^2 |\mu_i| > 0 \Rightarrow \vec{a} = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 \quad (3)$$

Вычтем из (2) разложение (3)

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\mu_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \mu_1} \vec{e}_2 \quad \text{при} \quad \lambda_1 \neq \mu_1 \quad (*)$$

Векторная алгебра

Таким образом, существует такое число

$$\frac{\mu_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \mu_1}$$

что выполняется (*) \Rightarrow вектора e_1, e_2
коллинеарные, что противоречит условию
теоремы \Rightarrow Разложение (2) единственно

Ч.Т.Д.

Векторная алгебра

Теорема

(о разложении вектора в пространстве)

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - некопланарные векторы
в пространстве R_3 , тогда любой вектор $\vec{a} \in R_3$
единственным образом разлагается в их
линейную комбинацию, то есть
 $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$
$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \quad (4)$$