Векторная алгебра

- Определение вектора, единичного вектора, орта вектора, коллинеарных / компланарных векторов
- Проекция вектора на координатные оси
- Линейные операции над векторами
- Определение линейно зависимых/независимых векторов
- Теорема о разложении вектора на плоскости и в пространстве

Векторная алгебра

Определение

Вектором называется направленный отрезок

Обозначение вектора: $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|, \left|\vec{a}\right|$ - длина вектора

Определение

Вектор, длина которого равна единице называется единичным вектором

Векторная алгебра

Определение

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ называется ортом вектора $\vec{a}$ и обозначается $\overrightarrow{a^{o}}$

$$\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \overrightarrow{a^{o}}$$

Определение

Три вектора в пространстве называются комплонарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях

Определение коллинеарных векторов

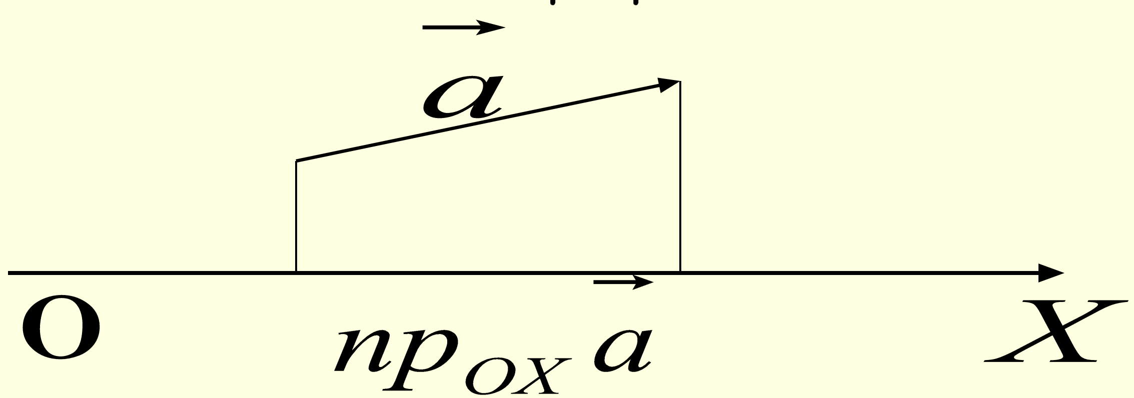
$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$$

Векторная алгебра

Определение

Если вектор $\vec{a}$ составляет угол φ с осью OX, то проекция вектора $\vec{a}$ на ось OX называется произведение $\left|\vec{a}\right|$ на $\cos\varphi$

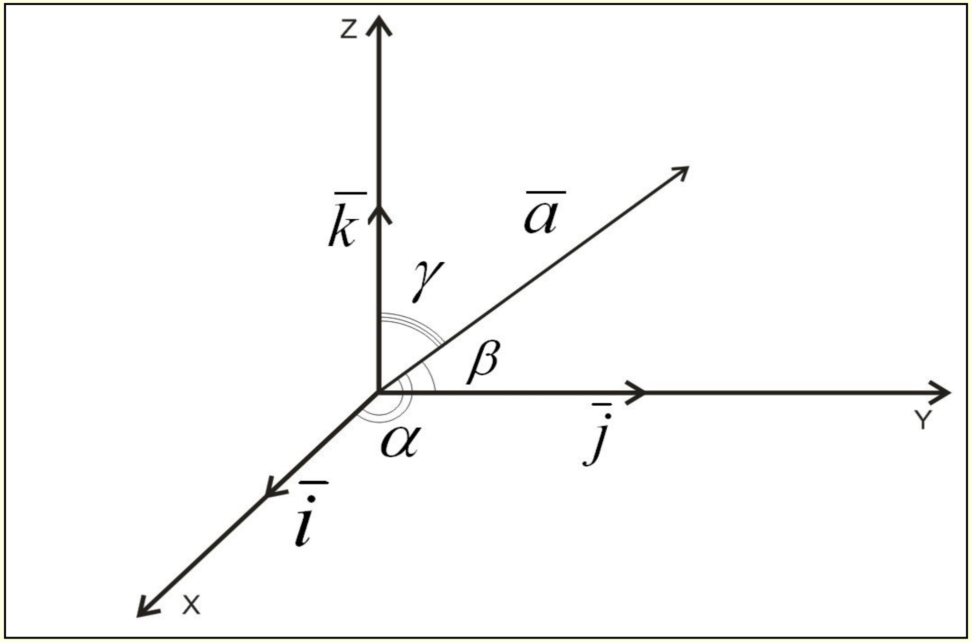
$$np_{OX}\,\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cos\varphi$$



Векторная алгебра

Пусть в 3-х-мерном пространстве задана прямоугольная система координат OXYZ

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы, направление которых совпадает с положительными направлениями координатных осей OX, OY, OZ соответственно



Углы, образованные вектором $\vec{a}$ с осями координат:

$$\alpha, \beta, \gamma$$

Векторная алгебра

Проекция вектора $\vec{a}$ на оси координат

$$x = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha \quad y = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\beta \quad z = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\gamma$$

Вектор $\vec{a}$ имеет координаты x, y, z, то есть $\vec{a}(x, y, z)$ в прямоугольной системе координат OXYZ или $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы координатных осей

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$ - длина вектора $\vec{a}$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{a}$: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Векторная алгебра

Действия сложения векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и умножения вектора на число $\alpha \cdot a$ называются линейными операциями над векторами

Пусть $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ - векторы, заданные на плоскости R_2 или в пространстве R_3

Выражение вида $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_k \overrightarrow{a_k} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{a_i}$,

где $\alpha_i, i = \overline{1,k}$-произвольные действительные числа называется линейной комбинацией векторов

Векторная алгебра

Определение

Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ называются линейно зависимыми, если существуют такие действительные числа $\alpha_i \in R, i = \overline{1,k}$ одновременно не обращающиеся в ноль $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \neq 0$, что линейная комбинация векторов с этими числами равна

$$\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_k \overrightarrow{a_k} = \vec{0} \quad (1)$$

Если равенство (1) выполняется только в случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то вектора $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ называются линейно независимыми

Пример

Рассмотрим на плоскости два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$

Покажем, что эти векторы линейно независимы

Доказательство (метод от противного)

Предположим, что вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ линейно зависимы. По определению линейно зависимых векторов $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in R, \sum_{i=1}^{2} |\alpha_i| > 0 : \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} = \vec{0}$

Для определенности предположим $\alpha_1 \neq 0$, тогда $\overrightarrow{e_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \overrightarrow{e_2}$ Таким образом, $\exists \alpha = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} : \overrightarrow{e_1} = \alpha \overrightarrow{e_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{e}_1 // \vec{e}_2 \Rightarrow$ Противоречие! Предположение не верно

Пример

Проверим, являются ли линейно зависимыми вектора

$$\overrightarrow{e_1}(1,-1,0);\ \overrightarrow{e_2}(1,2,3);\ \overrightarrow{e_3}(0,1,-1)$$

По определению линейно (не)зависимых векторов

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R : \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} + \lambda_3 \overrightarrow{e_3} = \vec{0}$$

Запишем это равенство для координат векторов

$$\lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} + \lambda_3 \overrightarrow{e_3} = \vec{0}$$

$$\lambda_1 (1,-1,0) + \lambda_2 (1,2,3) + \lambda_3 (0,1,-1) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_2 - \lambda_3) = (0,0,0)$$

Пример

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Получена система линейных однородных уравнений относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Если ранг матрицы системы меньше 3, то система имеет ненулевое решение $\Rightarrow$ вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ линейно зависимы

Если ранг равен 3, то система имеет только тривиальное решение $\Rightarrow$ вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ линейно независимы

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

Вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ линейно независимые

Теорема

(о разложении вектора на плоскости)

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ - неколлинеарные векторы на плоскости, тогда всякий компланарный им вектор $\vec{a}$ можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, то есть $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in R$, что

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 \quad (2)$$

Векторная алгебра

Доказательство

1) Покажем существование разложения

По условию векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$- неколлинеарные векторы $\Longrightarrow$ эти векторы не нулевые.

В случае, если $\vec{a} \parallel \vec{e_1} \Rightarrow \exists \lambda \in R : \vec{a} = \lambda \vec{e_1}$,
тогда разложение (2) справедливо при

$$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 0$$

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2}$$

Векторная алгебра

В случае, если $\vec{a} \,//\, \overrightarrow{e_2} \Rightarrow \exists \lambda \in R : \vec{a} = \lambda \overrightarrow{e_2}$,
тогда разложение (2) справедливо при

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda$$

$$\vec{a} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2}$$

Одновременное выполнение

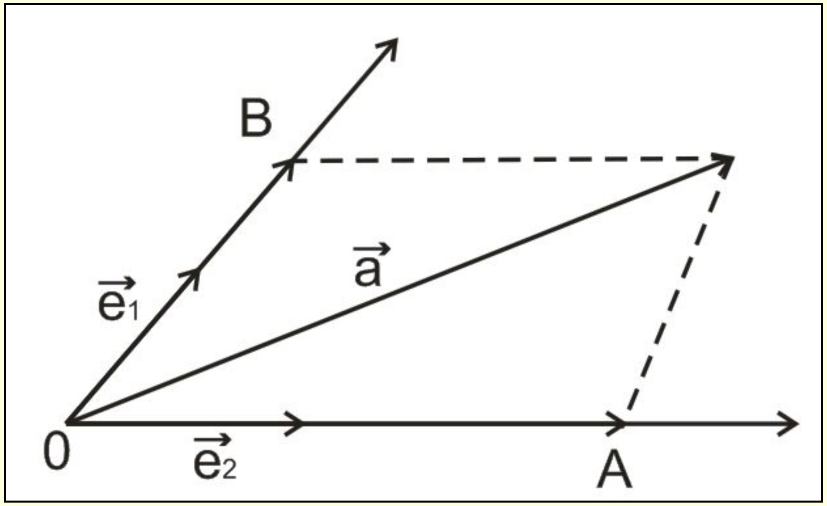
$$\vec{a} \,//\, \overrightarrow{e_1}, \vec{a} \,//\, \overrightarrow{e_2}$$

не может быть

Векторная алгебра

Общий случай, когда вектора $\vec{a}, \vec{e_1}$ и $\vec{a}, \vec{e_2}$ неколлинеарные.

Приведем $\vec{a}, \vec{e_1}, \vec{e_2}$ к общему началу и построим параллелограмм так, чтобы вектор $\vec{a}$ был его диагональю, то есть выполним построение



Векторная алгебра

По правилу сложению векторов

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} \,//\, \overrightarrow{e_2} \Rightarrow \exists \lambda_2 \in R : \overrightarrow{OA} = \lambda_2 \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{OB} \,//\, \overrightarrow{e_1} \Rightarrow \exists \lambda_1 \in R : \overrightarrow{OB} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2}$$

Таким образом, разложение (2) существует

Векторная алгебра

1) Докажем единственность разложения (2)

Предположим противное, что разложение (2) не единственно, то есть

$$\exists \mu_1, \mu_2 \in R : \sum_{i=1}^{2} |\mu_i| > 0 \Rightarrow \vec{a} = \mu_1 \vec{e_1} + \mu_2 \vec{e_2} \quad (3)$$

Вычтем из (2) разложение (3)

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\vec{e_1} + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{e_2}$$

$$\vec{e_1} = \frac{\mu_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \mu_1}\vec{e_2} \quad \text{при} \quad \lambda_1 \neq \mu_1 \quad (*)$$

Векторная алгебра

Таким образом, существует такое число

$$\frac{\mu_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \mu_1}$$

что выполняется (*) $\Longrightarrow$ вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ коллинеарные, что противоречит условию теоремы $\Longrightarrow$ Разложение (2) единственно

Ч.Т.Д.

Векторная алгебра

Теорема

(о разложении вектора в пространстве)

Пусть $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - некомпланарные векторы в пространстве R_3, тогда любой вектор $\vec{a} \in R_3$ единственным образом разлагается в их линейную комбинацию, то есть $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$

$$\vec{a} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} + \lambda_3 \overrightarrow{e_3} \quad (4)$$