РАЗДЕЛ: Элементы теории множеств. Множества и основные операции над ними.

План лекции:

1. Элементы и множества.
2. Задание множеств.
3. Сравнение множеств.
4. Операции над множествами.
5. Разбиения и покрытия.
6. Булеан.
7. Свойства операций над множествами.

Тыкнуть for далее)

∈

I

ОПР.1: под *множеством М* понимается совокупность некоторых объектов, которые будут называться *элементами* множества М.Элементы множества различны.

ПР: Множество S страниц в книге; множество N натуральных чисел 1,2,3,….; множество студентов в группе; множество отличников колледжа.

ОПР.2: если объект x является элементом множества М, то говорят, что *x принадлежит М*.Обозначение: **x** $\in$ **М.** В противном случае говорят, что *x не принадлежит М*. Обозначение : **x** $\notin$ **М.**Элементы множества сами могут является множествами.

ОПР.3: множество, не содержащее элементов, называется *пустым -* $\varnothing$. Обычно в конкретных рассуждениях элементы всех множеств берутся из некоторого одного, достаточно широкого множества U (своего для каждого случая), которое называется *универсальным* множеством (или *универсумом*).

II

Множество можно задать перечислением принадлежащих ему элементов или указанием свойств, которым элементы множества должны удовлетворять:

перечислением:

$$\mathbf{M} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

указанием свойств:

$$\mathbf{M} = \left\{ x \in A \,\middle|\, x - \textit{обладает} \quad \textit{свойством} \quad P \right\},$$

$$\text{или } \mathbf{M} = \left\{ x \,\middle|\, x - \textit{обладает} \quad \textit{свойством} \quad P \right\},$$

$$\text{или } \mathbf{M} = \{x \mid P(x)\}, \text{ или } \{X\}_{\mathrm{P(X)}}$$

III

ОПР.4: множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается **A**$\subseteq$ **B**), если все элементы множества A принадлежат B: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\left(x \in A \rightarrow x \in B\right)$- читается :*для любого элемента x, если $x \in A$, то $x \in B$.*

ОПР.5: если A$\subseteq B$, то также можно говорить, что *множество A содержится в B*, или имеется *включение множества A в B*.

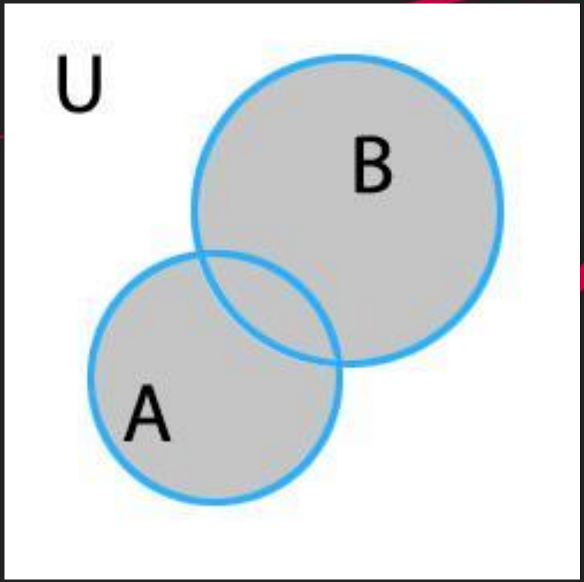
ОПР.6: Множества A и B называются *равными* или *совпадающими* **(A=B),** если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. **A**$\subseteq$**B** и **B**$\subseteq$**A.**

Запись **A**$\subset$**B** или **A**$\subsetneq$ **B** означает, что A$\subseteq$ B и A$\neq B$, в этом случае говорят, что *A строго включено в B,* или является *собственным подмножеством B.*

IV

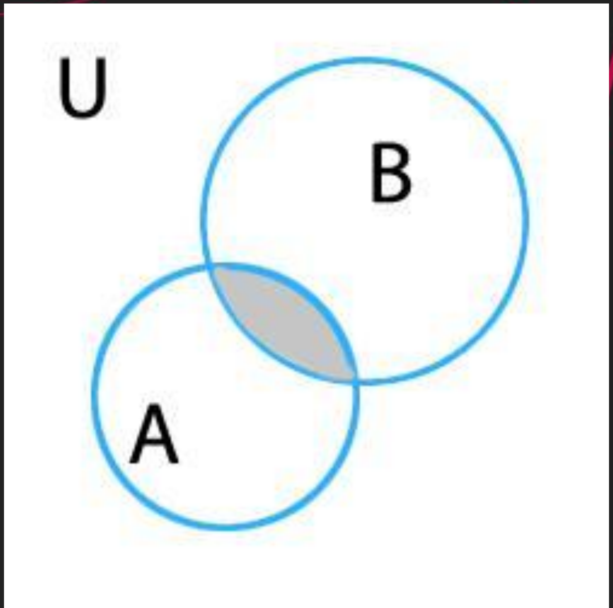
<u>*Объединение или сумма*</u>:

$$A \cup B = \left\{ x \middle| \in A \ \ \textit{или} \ \ x \in B \right\}, \ \mathbf{A+B}$$



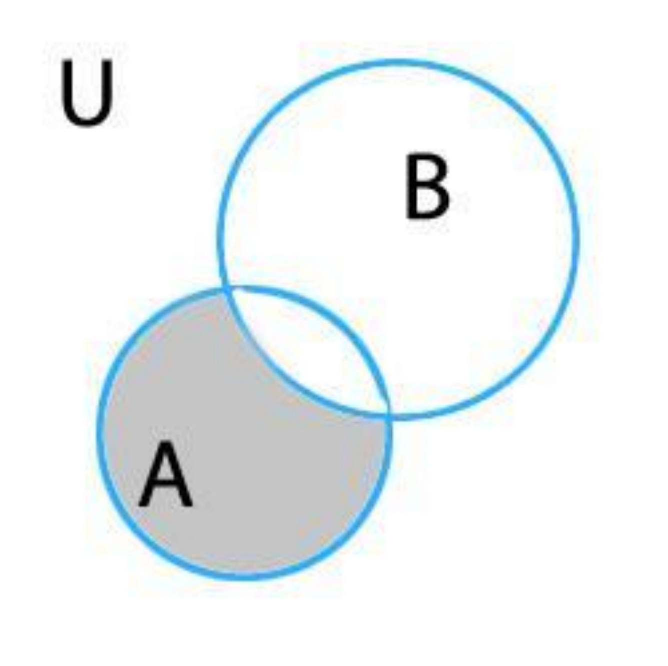
Пересечение или произведение:

$$A \cap B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \ \ и \ \ x \in B \right\}, \ \mathbf{A \bullet B}$$



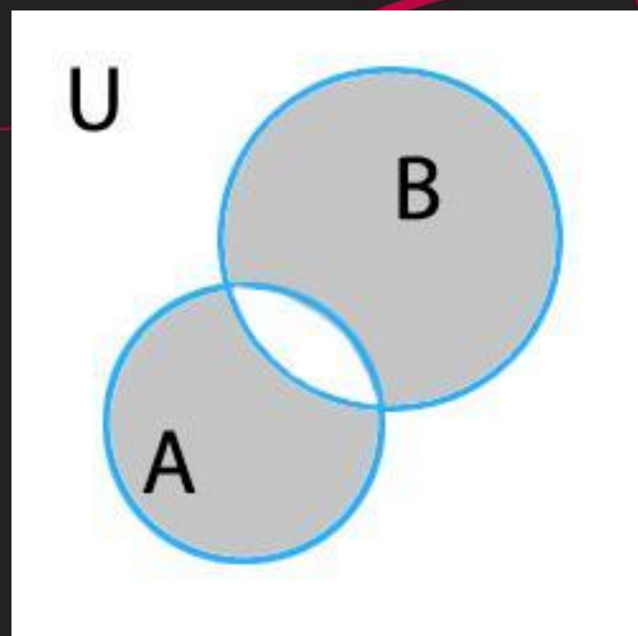
__Разность:__

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}, \mathbf{A\text{-}B}$$

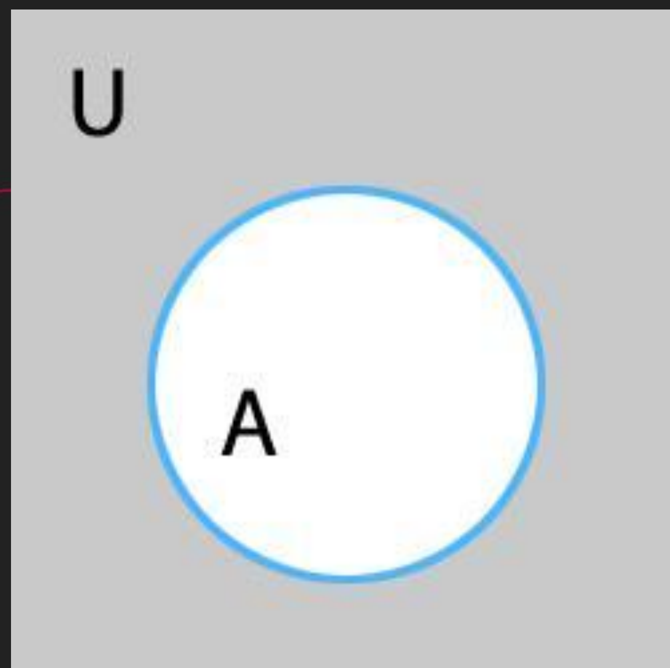


<u>Симметрическая разность или кольцевая сумма:</u>

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \left\{ x \,\middle|\, \left(x \in A \ \ и \ \ x \notin B \right) \ \ или \ \ \left(x \notin A \ \ и \ \ x \in B \right) \right\}$$



Дополнение: $A=\{x \mid x\notin A\}=U\setminus A$



V

ОПР.7: множество $\left\{ A_i \middle| i \in I \right\}$ непустых подмножеств множества A называется <u>*покрытием множества A*</u>, если $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ (объединение любого множества мн-в A_i, где индексы i пробегают множество I).

ОПР.8: покрытие называется <u>*разбиением*</u>, если $A_i \cap A_j = 0$ при $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$

Другими словами множество $\left\{ A_i \middle| i \in I \right\}$ непустых подмножеств множества A является его разбиением, если каждый элемент $x \in A$ принадлежит в точности одному из подмножеств A_i, каждое из которых не является пустым.

VI

ОПР.9: совокупность всех подмножеств множества A называется его *булеаном* или *множеством - степенью* и обозначается через ρ(A) или 2^A. Т.о,

$$\rho(A)=\{B \mid B \subseteq A\}.$$

ПР: Если A = {1,2,3}, то $2^A = \rho(A) = \{0, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

VII

1. Ассоциативность $\cup$ *и* $\cap$:

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

2. Коммутативность Y *и* I :

$$A\cup B=B\cup A;\qquad A\cap B=B\cap A$$

3. Законы идемпотентности:

$$A\cup A=A,\qquad A\cap A=A$$

4. Законы дистрибутивности:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

5. Законы поглощения:

$$A\cup(A\cap B)=A,\qquad A\cap(A\cup B)=A$$

6. Законы де Моргана:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\qquad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

7. Законы нуля и единицы:

положим O=0, 1=U, тогда

$$A\cup O=A,\quad A\cap O=0,\quad A\cup 1=1,\quad A\cap 1=A$$

$$A\cup\overline{A}=1,\qquad A\cap\overline{A}=0$$

8. Законы двойного отрицания:

$$\overline{\overline{A}}=A,$$

VIII

ПР: Множество нечётных чисел $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, ...\}$ можно определить как

$$\{x | x = 2\kappa + 1 \text{ для некоторого } k \in Z\}$$

ПР: Если А= $\{4,6,8,10\}$, В = $\{1,2,3,4\}$, $C = \{4,5,6\}$, то

Д/з. Выучить определения и основные понятия п.п.1- 6. Подготовиться к математическому диктанту.