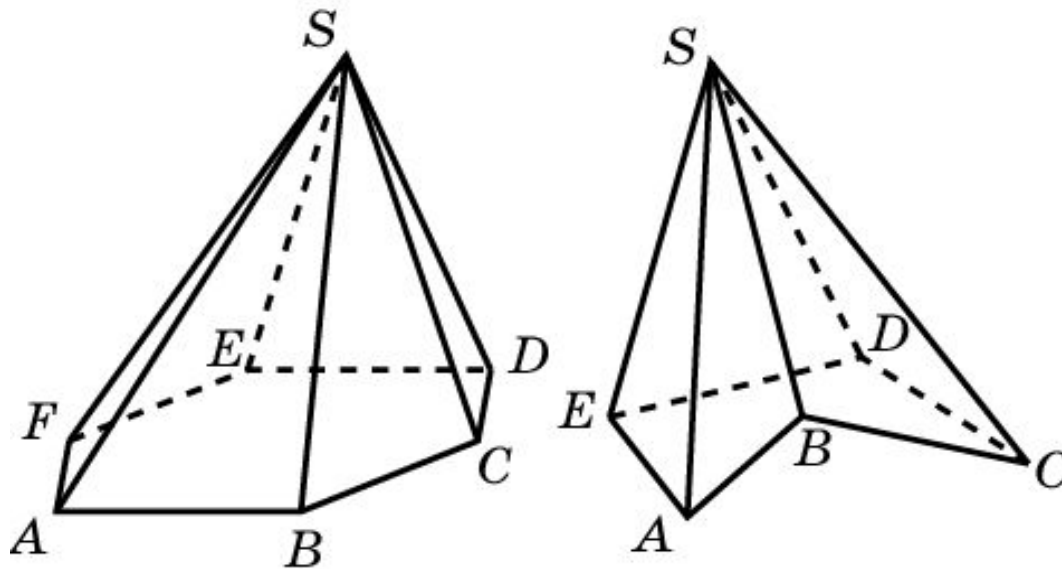


# ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Многогранник угол называется **выпуклым**, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

Куб, параллелепипед, треугольные призма и пирамида являются выпуклыми многогранниками.

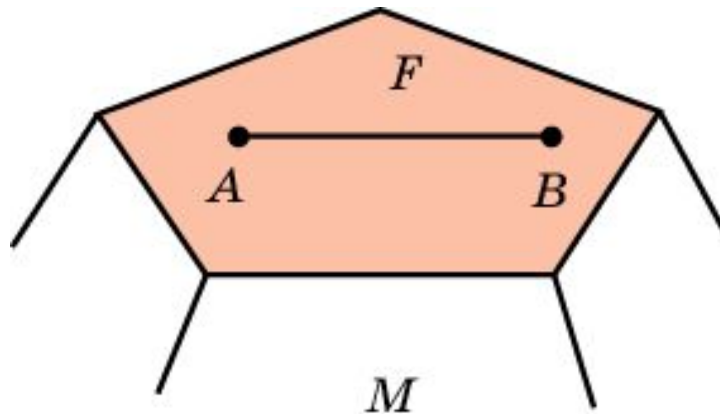
На рисунке приведены примеры выпуклой и невыпуклой пирамиды.



# СВОЙСТВО 1

**Свойство 1.** В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Действительно, пусть  $F$  - какая-нибудь грань многогранника  $M$ , и точки  $A, B$  принадлежат грани  $F$ . Из условия выпуклости многогранника  $M$ , следует, что отрезок  $AB$  целиком содержится в многограннике  $M$ . Поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоугольника  $F$ , он будет целиком содержаться и в этом многоугольнике, т. е.  $F$  - выпуклый многоугольник.



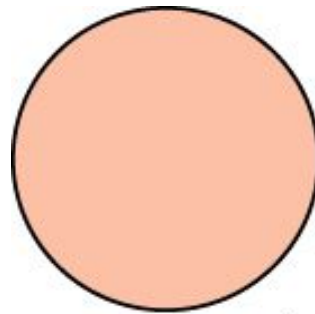
## СВОЙСТВО 2

**Свойство 2.** Всякий выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.

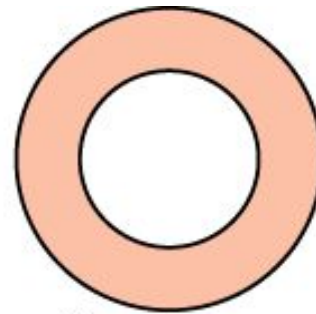
Действительно, пусть  $M$  - выпуклый многогранник. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку  $S$  многогранника  $M$ , т. е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника  $M$ . Соединим точку  $S$  с вершинами многогранника  $M$  отрезками. Заметим, что в силу выпуклости многогранника  $M$ , все эти отрезки содержатся в  $M$ . Рассмотрим пирамиды с вершиной  $S$ , основаниями которых являются грани многогранника  $M$ . Эти пирамиды целиком содержатся в  $M$ , и все вместе составляют многогранник  $M$ .

# Упражнение 1

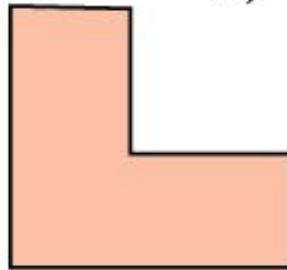
На рисунке укажите выпуклые и невыпуклые плоские фигуры.



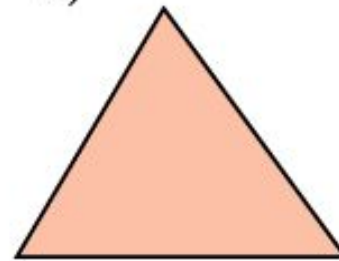
а)



б)



в)



г)

**Ответ:** а), г) – выпуклые; б), в) – невыпуклые.

## Упражнение 2

Всегда ли пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

Ответ: Да.

## Упражнение 3

Всегда ли объединение выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

Ответ: Нет.

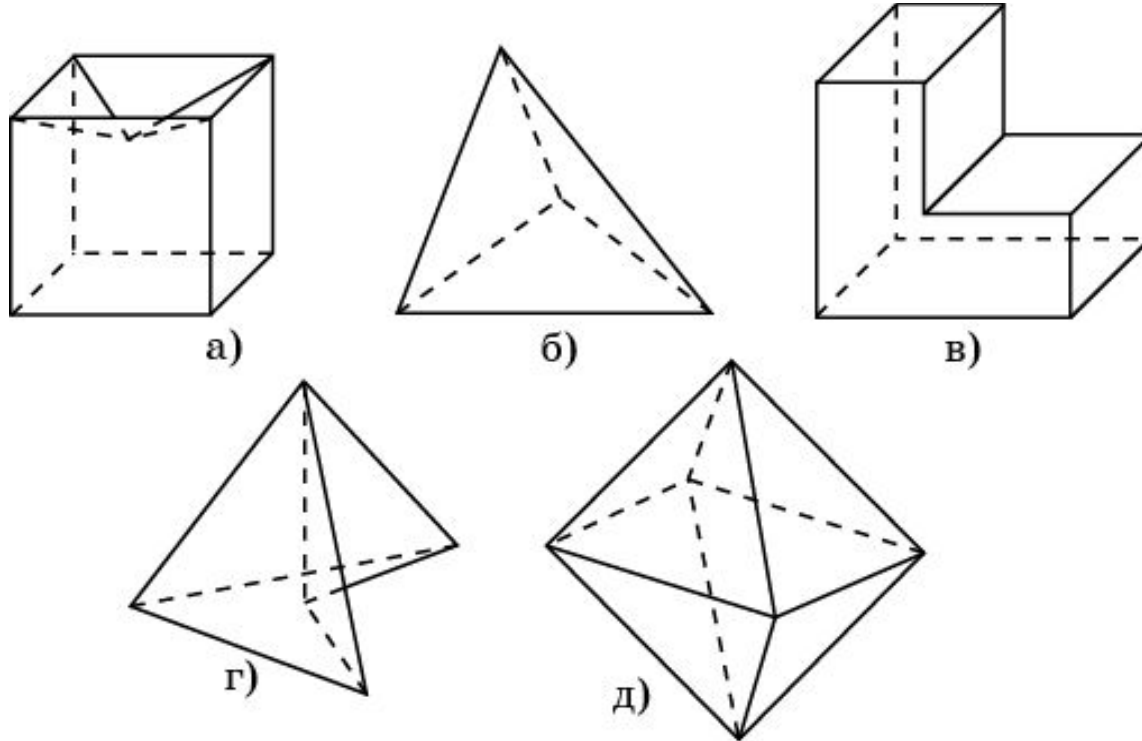
## Упражнение 4

Можно ли составить выпуклый четырёхгранный угол с такими плоскими углами: а)  $56^\circ$ ,  $98^\circ$ ,  $139^\circ$  и  $72^\circ$ ; б)  $32^\circ$ ,  $49^\circ$ ,  $78^\circ$  и  $162^\circ$ ; в)  $85^\circ$ ,  $112^\circ$ ,  $34^\circ$  и  $129^\circ$ ; г)  $43^\circ$ ,  $84^\circ$ ,  $125^\circ$  и  $101^\circ$ .

**Ответ:** а) Нет; б) да; в) нет; г) да.

## Упражнение 5

На рисунке укажите выпуклые и невыпуклые многогранники.



**Ответ:** б), д) – выпуклые; а), в), г) – невыпуклые.



## Упражнение 6

Может ли невыпуклый многоугольник быть гранью выпуклого многогранника?

Ответ: Нет.

## Упражнение 7

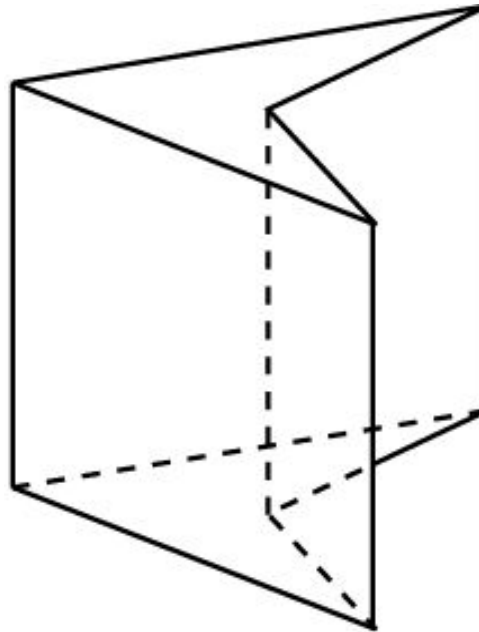
Может ли сечением выпуклого многогранника плоскостью быть невыпуклый многоугольник?

Ответ: Нет.

## Упражнение 8

Нарисуйте какую-нибудь невыпуклую призму.

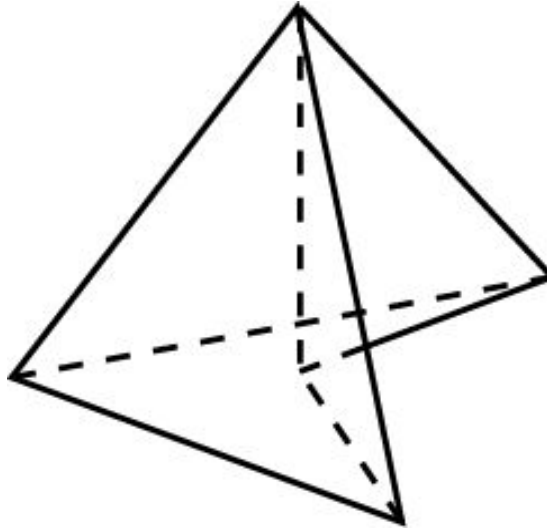
Ответ: Например,



## Упражнение 9

Нарисуйте какую-нибудь невыпуклую пирамиду.

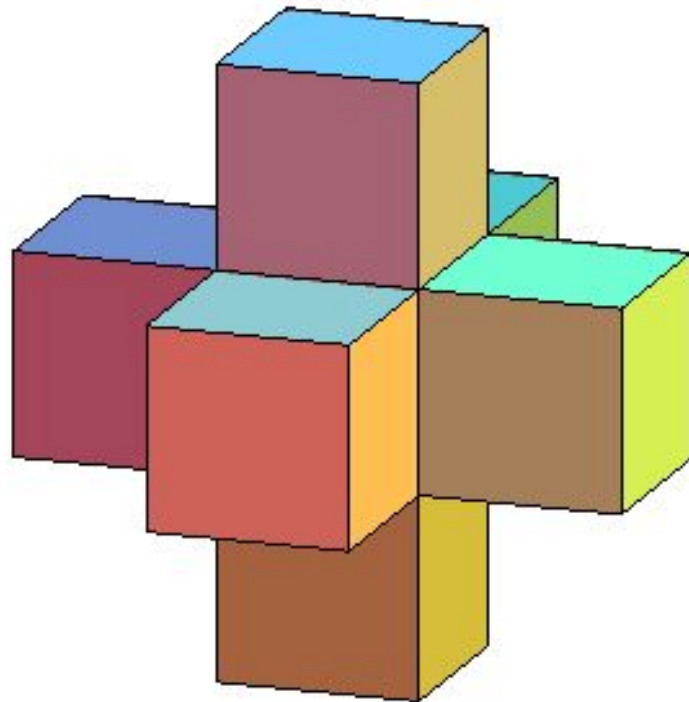
Ответ: Например,



## Упражнение 10

Приведите пример невыпуклого многогранника, у которого все грани являются выпуклыми многоугольниками.

**Ответ:** Например, многогранник, составленный из семи кубов, называемый пространственным крестом.



## Упражнение 11\*

Докажите, что для любого  $n > 7$  существует многогранник с  $n$  ребрами.

**Решение.** Если  $n = 2k$  ( $k > 2$ ), то примером многогранника с  $n$  ребрами является  $k$ -угольная пирамида.

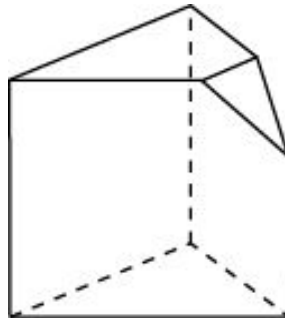
Если  $n = 2k + 3$  ( $k > 2$ ), то примером многогранника с  $n$  ребрами является  $k$ -угольная пирамида, у которой отрезан один угол при основании, как это было сделано ранее.

## Упражнение 12\*

Докажите, что для  $u$  любого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом ребер. Приведите пример многогранника, у которого нет трех граней с одинаковым числом ребер

**Решение.** Рассмотрим грань многогранника с наибольшим числом ребер. Обозначим это число ребер  $n$ . К этой грани примыкают  $n$  граней, числа ребер которых могут быть  $3, \dots, n$ . Таких чисел  $n - 2$ . Следовательно, среди этих  $n$  граней найдутся грани, имеющие одинаковое число ребер.

Пример многогранника, у которого нет трех граней с одинаковым числом ребер, изображен на рисунке.

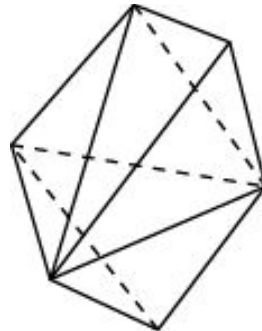


## Упражнение 13\*

Докажите, что для у любого многогранника найдутся две вершины, в которых сходится одинаковое число ребер. Приведите пример многогранника, у которого нет трех вершин с одинаковым числом ребер

**Решение.** Рассмотрим вершину многогранника с наибольшим числом ребер. Обозначим это число ребер  $n$ . Концами этих ребер являются  $n$  вершин, числа ребер которых могут быть  $3, \dots, n$ . Таких чисел  $n - 2$ . Следовательно, среди этих  $n$  вершин найдутся вершины, в которых сходится одинаковое число ребер.

Пример многогранника, у которого нет трех вершин, в которых сходится одинаковое число ребер, изображен на рисунке.





## Упражнение 14\*

Докажите, что для любого многогранника число граней с нечетным числом ребер четно.

**Решение.** Предположим, что число граней с нечетным числом ребер нечетно. Тогда общее число ребер в этих гранях будет нечетным. Общее число ребер в гранях с четным числом ребер четно. Поэтому число ребер всех граней будет нечетно. Однако каждое ребро входит ровно в две грани, и при подсчете ребер, входящих в грани, мы считали каждое ребро дважды, т.е. оно должно быть четным. Противоречие. Следовательно, число граней с нечетным числом ребер должно быть четно.

## Упражнение 15\*

Докажите, что для у любого многогранника число вершин, в которых сходится нечетное число ребер, четно.

**Решение.** Предположим, что число вершин с нечетным числом ребер нечетно. Тогда общее число ребер в этих вершинах будет нечетным. Общее число ребер в вершинах с четным числом ребер четно. Поэтому число ребер всех вершин будет нечетно. Однако каждое ребро соединяет ровно две вершины, и при подсчете ребер мы посчитали каждое ребро дважды, т.е. оно должно быть четным. Противоречие. Следовательно, число вершин с нечетным числом ребер должно быть четно.