Российский химико-технологический университет
им. Д. И. Менделеева

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 3. Векторное произведение двух векторов, смешанное произведение трех векторов, их свойства и формулы для вычисления. Компланарность. Геометрические приложения.

План лекции

1. Векторное произведение двух векторов.
2. Смешанное произведение векторов.
3. Решение задач.

Правая и левая тройка

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой тройкой*, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки. В противном случае она называется *левой тройкой*.

Замечание. При перестановке в упорядоченной тройке двух любых векторов тройка меняет ориентацию на противоположную.

Векторное произведение

Определение. *Векторным произведением* $\vec{a} \times \vec{b}$ неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, такой, что:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right);$

2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3. вектор $\vec{c}$ направлен так, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в указанном порядке образуют правую тройку.

Замечание. В случае, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то их векторное произведение равно $\vec{0}$.

Векторное произведение

Свойства векторного произведения

1. $\forall \vec{a}, \vec{b}: \ \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикоммутативность).
2. $\forall \vec{a}: \ \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
3. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}; \ \forall \alpha, \beta \in R: \ (\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}) \times \vec{c} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + \beta \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ (линейность).

Векторное произведение

Теорема. Пусть $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$ – правый ортонормированный базис, и в этом базисе $\vec a = a_1\vec e_1 + a_2\vec e_2 + a_3\vec e_3$ и $\vec b = b_1\vec e_1 + b_2\vec e_2 + b_3\vec e_3$.

Тогда векторное произведение $\vec a \times \vec b$ вычисляется по следующей формуле:

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Векторное произведение

Доказательство. Так как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис, то $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$; $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$. Следовательно, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$. Поскольку, во-первых, $|\vec{e}_3| = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot sin\angle(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, во-вторых $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$, и в-третьих, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правая тройка, то $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$. Аналогично, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$. Тогда $\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$=

Векторное произведение

$$= a_1 b_1 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1)}_{\vec{0}} + a_1 b_2 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}_{\vec{e}_3} + a_1 b_3 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)}_{-\vec{e}_2} +$$

$$a_2 b_1 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)}_{-\vec{e}_3} + a_2 b_2 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2)}_{\vec{0}} + a_2 b_3 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}_{\vec{e}_1} +$$

$$a_3 b_1 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1)}_{\vec{e}_2} + a_3 b_2 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)}_{-\vec{e}_1} + a_3 b_3 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3)}_{\vec{0}} =$$

$$= a_1 b_2 \vec{e}_3 - a_1 b_3 \vec{e}_2 - a_2 b_1 \vec{e}_3 + a_2 b_3 \vec{e}_1 + a_3 b_1 \vec{e}_2 - a_3 b_2 \vec{e}_1 =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3 =$$

$$= \vec{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение

Теорема. Длина вектора векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на смежных сторонах.

Доказательство. $S_{\text{пар}} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\angle(\vec{a}; \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Теорема. Для того чтобы два вектора в пространстве были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось $\vec{0}$.

Доказательство необходимости. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ по определению.

Доказательство достаточности. Пусть $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Тогда $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 0$. Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, поскольку нулевой вектор коллинеарен любому. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $sin\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 0$. Следовательно, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 0°$ или $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 180°$, т. е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны

Смешанное произведение векторов

Определение. *Смешанным произведением* $(\vec a, \vec b, \vec c)$ векторов $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения $\vec a \times \vec b$ и вектора $\vec c$.

Свойства смешанного произведения:

1. $\forall \vec a, \vec b, \vec c:\ (\vec a, \vec b, \vec c) = (\vec c, \vec a, \vec b) = (\vec b, \vec c, \vec a) = -(\vec b, \vec a, \vec c) = -(\vec c, \vec b, \vec a) = -(\vec a, \vec c, \vec b)$

   (полукоммутативность).

2. $\forall \vec a, \vec b, \vec c, \vec d;\ \forall \alpha, \beta \in R:\ (\alpha \cdot \vec a + \beta \cdot \vec b, \vec c, \vec d) = \alpha \cdot (\vec a, \vec c, \vec d) + \beta \cdot (\vec b, \vec c, \vec d)$

   (линейность).

Смешанное произведение векторов

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис, и в этом базисе $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ и $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$. Тогда смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ вычисляется по следующей формуле:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение векторов

Доказательство. Так как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис, то $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$

$$= \left(\vec{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3) =$$

$$= c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(Убедитесь самостоятельно в справедливости последнего равенства).

Смешанное произведение векторов

Теорема. Модуль смешанного произведения $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ численно равен объему параллелепипеда, построенного на векторах

$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, как на смежных сторонах.

Доказательство. $V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}} \cdot H = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\angle(\vec{a}; \vec{b}) \cdot |\vec{h}| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{h}| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot |cos\angle(\vec{h}; \vec{c})| = \left||\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot cos\angle(\vec{h}; \vec{c})\right| = \left||\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot cos\angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c})\right| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

Смешанное произведение векторов

Теорема. Для того чтобы три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.

Доказательство необходимости. Дано: векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Рассмотрим различные случаи, учитывая, что $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\angle(\vec{a}; \vec{b}) \cdot |\vec{c}| \cdot cos\angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c})$. Если $\vec{a} = \vec{0}, \vec{b} = \vec{0}$ или $\vec{c} = \vec{0}$, то $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Иначе, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $sin\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 0$. Следовательно, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Иначе, поскольку вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а вектор $\vec{c}$ лежит в ней, то $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$. Следовательно, $\angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}) = 90°$, а $cos\angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}) = 0$, и тогда $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Смешанное произведение векторов

Доказательство достаточности. Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, т.е. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\angle(\vec{a}; \vec{b}) \cdot |\vec{c}| \cdot cos\angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}) = 0$. Если $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = \vec{0}$ или $\vec{c} = \vec{0}$, то векторы $\vec{a}$,$\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, поскольку $\vec{0}$ компланарен с любыми двумя векторами. Иначе, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они линейно зависимы, тогда любой вектор $\vec{c}$ линейно зависим с ними (покажите это строго по определению линейной зависимости), а тогда векторы $\vec{a}$,$\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Иначе, $cos\angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}) = 0$, т. е. $\angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}) = 90°$. Следовательно, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$. Поскольку вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а вектор $\vec{c}$ ортогонален ему, то вектор $\vec{c}$ лежит в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. векторы $\vec{a}$,$\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Решение задач

Пример 1. Являются ли векторы $\vec{a} = (-4;1;-7)$ $\vec{b} = (2;5;9)$ и $\vec{c} = (-8;13;-3)$ компланарными?

Решение. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 2 & 5 & 9 \\ -8 & 13 & -3 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 13 & -3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} =$

$$= -4 \cdot (-132) - 1 \cdot 66 - 7 \cdot 66 = 0$$

Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарны.

Пример 2. Даны векторы $\vec{a} = (-1;0;1)$ и $\vec{b} = (2;1;3)$. Найти $\vec{a} \times \vec{b}$.

Решение. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$

Т.е. $\vec{a} \times \vec{b} = (-1;5;-1)$.

Решение задач

Пример 3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(-1;3)$ и $\vec{b}=(1;2)$.

Решение. Введем третью координату: $\vec{a}=(-1;3;0)$ и $\vec{b}=(1;2;0)$.

Тогда: $S=|\vec{a}\times\vec{b}|=|0\vec{i}+0\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}|=\sqrt{0+0+(-5)^2}=5$

Пример 4. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-1;0;-1)$, $B(0;2;-3)$, $C(4;4;1)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=(1;2;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(5;4;2)$. Тогда

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}\vec{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+(-12)^2+(-6)^2}=\frac{18}{2}=9$$

Решение задач

Пример 5. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Выразить векторы $\vec{x} = (\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$ и $\vec{y} = \dfrac{(\vec{a}+\vec{b})}{2}\times(\vec{b}-\dfrac{\vec{a}}{2})$ через вектор $\vec{z} = \vec{a}\times\vec{b}$.

Решение. По свойствам векторного произведения

$$\vec{x} = (\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{a} + \vec{b}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{b} = -2(\vec{a}\times\vec{b}) = -2\vec{z}$$

$$\vec{y} = \frac{(\vec{a}+\vec{b})}{2}\times(\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}) = \frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{b}\times\vec{b}) - \frac{1}{4}(\vec{a}\times\vec{a}) - \frac{1}{4}(\vec{b}\times\vec{a})$$

$$= \frac{3}{4}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{3}{4}\vec{z}$$

Решение задач

Пример 6. Найти объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и высоту, опущенную из вершины A_1 на основание $ABCD$, если $A(1;2;3)$, $B(9;6;4)$, $D(3;0;4)$, $A_1(5;2;6)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=(8;4;1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;-2;1)$, $\overrightarrow{AA_1}=(4;0;3)$. Тогда

$$V=|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1})|=\left|\begin{vmatrix}8 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 3\end{vmatrix}\right|=48$$

Площадь основания

$$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}\right|=\sqrt{6^2+(-6)^2+(-24)^2}=18\sqrt{2}$$

Тогда высота $h=\dfrac{V}{S}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Решение задач

Пример 7. Найти объем тетраэдра $ABCD$ и высоту, опущенную из вершины D, если $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=(3;0;3)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;-2)$, $\overrightarrow{AD}=(4;1;0)$. Тогда

$C(1;1;0)$

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}3&0&3\\1&1&-2\\4&1&0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}|-3|=\frac{1}{2}$$

Площадь основания

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&0&3\\1&1&-2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+9^2+3^2}=\frac{3\sqrt{11}}{2}$$

Тогда: $h=\dfrac{3V}{S}=\dfrac{1}{\sqrt{11}}$

Спасибо

за внимание!