



Российский химико-технологический университет
им. Д. И. Менделеева

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ



Линейная алгебра и аналитическая геометрия

**Лекция 3. Векторное произведение
двух векторов, смешанное
произведение трех векторов, их
свойства и формулы для вычисления.
Компланарность. Геометрические
приложения.**

План лекции

1. Векторное произведение двух векторов.
2. Смешанное произведение векторов.
3. Решение задач.

Правая и левая тройка

Определение. Упорядоченная тройка некопланарных векторов называется *правой тройкой*, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки. В противном случае она называется *левой тройкой*.

Замечание. При перестановке в упорядоченной тройке двух любых векторов тройка меняет ориентацию на противоположную.

Векторное произведение

Определение. Векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$ неколлинеарных векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , такой, что:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}; \vec{b});$

2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b};$

3. вектор \vec{c} направлен так, что векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} в указанном порядке образуют правую тройку.

Замечание. В случае, если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то их векторное произведение равно $\vec{0}$.

Векторное произведение

Свойства векторного произведения

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} : \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
(антикоммутативность).

$\forall \vec{a} : \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

3. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) \times \vec{c} = \alpha (\vec{a} \times \vec{c}) + \beta (\vec{b} \times \vec{c})$

(линейность).

Векторное произведение

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис, и в этом базисе $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ и $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$.

Тогда векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ вычисляется по следующей формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Векторное произведение

Доказательство. Так как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис, то $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$; $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$. Следовательно, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$. Поскольку, во-первых, $|\vec{e}_3| = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \sin \angle(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, во-вторых, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$, и в-третьих, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правая тройка, то $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$. Аналогично, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$. Тогда $\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) =$

Векторное произведение

$$\begin{aligned} &= a_1 b_1 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1)}_{\vec{0}} + a_1 b_2 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}_{\vec{e}_3} + a_1 b_3 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)}_{-\vec{e}_2} + \\ & a_2 b_1 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)}_{-\vec{e}_3} + a_2 b_2 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2)}_{\vec{0}} + a_2 b_3 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}_{\vec{e}_1} + \\ & a_3 b_1 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1)}_{\vec{e}_2} + a_3 b_2 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)}_{-\vec{e}_1} + a_3 b_3 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3)}_{\vec{0}} = \\ &= a_1 b_2 \vec{e}_3 - a_1 b_3 \vec{e}_2 - a_2 b_1 \vec{e}_3 + a_2 b_3 \vec{e}_1 + a_3 b_1 \vec{e}_2 - a_3 b_2 \vec{e}_1 = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3 = \\ &= \vec{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Векторное произведение

Теорема. Длина вектора векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , как на смежных сторонах.

Доказательство. $S_{\text{пар}} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}; \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Теорема. Для того чтобы два вектора в пространстве были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось $\vec{0}$.

Доказательство необходимости. Если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ по определению.

Доказательство достаточности. Пусть $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Тогда $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 0$. Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, поскольку нулевой вектор коллинеарен любому. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\sin \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 0$. Следовательно, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$ или $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$, т. е.

векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны

Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением векторов a , b и c называется число, равное скалярному произведению векторного произведения $a \times b$ и вектора c .

Свойства смешанного произведения:

$$\forall a, b, c: (a, b, c) = (c, a, b) = (b, c, a) = -(b, a, c) = -(c, b, a) = -(a, c, b)$$

1.

(полукоммутативность).

$$\forall a, b, c, d; \forall a, b \in R: (a \times a + b \times b, c, d) = a \times (a, c, d) + b \times (b, c, d)$$

2.

(линейность).

Смешанное произведение векторов

Теорема. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – правый ортонормированный базис, и в этом базисе $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3$. Тогда смешанное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ вычисляется по следующей формуле:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение векторов

Доказательство. Так как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис, то $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$

$$\begin{aligned} &= \left(\vec{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + c_3 \vec{e}_3) = \\ &= c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(Убедитесь самостоятельно в справедливости последнего равенства).

Смешанное произведение векторов

Теорема. Модуль смешанного произведения $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ численно равен объему параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , как на смежных сторонах.

Доказательство. $V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}} \cdot H = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}; \vec{b}) \cdot |\vec{h}| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{h}| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot |\cos \angle(\vec{h}; \vec{c})| = \left| |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \angle(\vec{h}; \vec{c}) \right| = \left| |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}) \right| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$

Смешанное произведение векторов

Теорема. Для того чтобы три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.

Доказательство необходимости. Дано: векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны. Рассмотрим различные случаи, учитывая, что $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}; \vec{b}) \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c})$. Если $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = \vec{0}$ или $\vec{c} = \vec{0}$, то $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Иначе, если \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то $\sin \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 0$. Следовательно, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Иначе, поскольку вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален плоскости векторов \vec{a} и \vec{b} , а вектор \vec{c} лежит в ней, то $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$. Следовательно, $\angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}) = 90^\circ$, а $\cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}) = 0$, и тогда $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Смешанное произведение векторов

Доказательство достаточности. Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, т.е. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}; \vec{b}) \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}) = 0$. Если $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = \vec{0}$ или $\vec{c} = \vec{0}$, то векторы \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} компланарны, поскольку $\vec{0}$ компланарен с любыми двумя векторами. Иначе, если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то они линейно зависимы, тогда любой вектор \vec{c} линейно зависим с ними (покажите это строго по определению линейной зависимости), а тогда векторы \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} компланарны. Иначе, $\cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}) = 0$, т.е. $\angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}) = 90^\circ$. Следовательно, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$. Поскольку вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален плоскости векторов \vec{a} и \vec{b} , а вектор \vec{c} ортогонален ему, то вектор \vec{c} лежит в плоскости векторов \vec{a} и \vec{b} , т.е. векторы \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} компланарны.

Решение задач

Пример 1. Являются ли векторы $\vec{a} = (-4; 1; -7)$ $\vec{b} = (2; 5; 9)$
и $\vec{c} = (-8; 13; -3)$ компланарными?

Решение.
$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 2 & 5 & 9 \\ -8 & 13 & -3 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 13 & -3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} =$$
$$= -4 \cdot (-132) - 1 \cdot 66 - 7 \cdot 66 = 0$$

Следовательно, векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} – компланарны.

Пример 2. Даны векторы $\vec{a} = (-1; 0; 1)$ и $\vec{b} = (2; 1; 3)$. Найти $\vec{a} \times \vec{b}$

Решение.
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$$

Т.е.
$$\vec{a} \times \vec{b} = (-1; 5; -1)$$

Решение задач

Пример 3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (-1; 3)$ и $\vec{b} = (1; 2)$

$$\text{и } \vec{a} = (-1; 3; 0) \quad \vec{b} = (1; 2; 0)$$

Решение. Введем третью координату:

Тогда:
$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |0i + 0j + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} k| = \sqrt{0 + 0 + (-5)^2} = 5$$

$$A(-1; 0; -1)$$

Пример 4. Найти площадь треугольника с вершинами $B(0, 2, -3)$ и $C(4, 4, 1)$

$$\vec{AB} = (1; 2; -2) \quad \vec{AC} = (5; 4; 2)$$

Решение.

Тогда
$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} k \right| = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + (-12)^2 + (-6)^2} = \frac{18}{2} = 9$$

Решение задач

Пример 5. Даны векторы \vec{a} и \vec{b} . Выразить векторы $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$

и $\vec{y} = \frac{(\vec{a} + \vec{b})}{2} \times \left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right)$ через вектор $\vec{z} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Решение. По свойствам векторного произведения

$$\vec{x} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{b} = -2(\vec{a} \times \vec{b}) = -2\vec{z}$$

$$\vec{y} = \frac{(\vec{a} + \vec{b})}{2} \times \left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right) = \frac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{b} \times \vec{b}) - \frac{1}{4}(\vec{a} \times \vec{a}) - \frac{1}{4}(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$= \frac{3}{4}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{3}{4}\vec{z}$$

Решение задач

Пример 6. Найти объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и высоту, опущенную из вершины A_1 на основание $ABCD$, если $A(1; 2; 3)$, $B(9; 6; 4)$, $D(3; 0; 4)$, $A_1(5; 2; 6)$.

$$\vec{AB} = (8; 4; 1), \quad \vec{AD} = (2; -2; 1), \quad \vec{AA_1} = (4; 0; 3)$$

Решение.

. Тогда

$$V = |(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA_1})| = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 48$$

Площадь основания

$$S = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + (-24)^2} = 18\sqrt{2}$$

Тогда высота $h = \frac{V}{S} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Решение задач

Пример 7. Найти объем тетраэдра $ABCD$ и высоту, опущенную из вершины D , если $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$.

Решение. $\vec{AB} = (3;0;3)$, $\vec{AC} = (1;1;-2)$, $\vec{AD} = (4;1;0)$. Тогда

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-3| = \frac{1}{2}$$

Площадь основания

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + 9^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{11}}{2}$$

Тогда: $h = \frac{3V}{S} = \frac{1}{\sqrt{11}}$



Спасибо
за внимание!