ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ

ВЫБОРКА. ОБОБЩЕНИЕ ВВЕДЕННЫХ ПОНЯТИЙ

ЛЕКЦИЯ 9

Математический факультет.
Кафедра математического моделирования

Тема: Выборка.
Обобщение введенных понятий.

Цель лекции – изучить формулы представления и свойства биномиальных и полиномиальных коэффициентов

Литература

- Глускин Л.М., Шор Л.А., Шварц В.Я. Задачи и алгоритмы комбинаторики, и теории графов. Донецк, ДПИ, 1982. 368 с.
- Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977. 368 с.
- Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики: Пер. с укр. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства Наука, 1977. 80 с.
- Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. М.: Просвещение, 1976. 48 с.
- Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В. Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Дискретна математика". Харків, ХНУРЕ. 2001. С.67-70.

Термины

Базовые понятия:

- Множество
- Бином
- Биномиальные коэффициенты и формула для них
- Перестановка

Ключевые слова:

- Сочетание
- Размещение
- Сочетание и размещение с повторением
- Выборка

ПРИМЕР 1

- Дано множество M={a,b,c}
- **Перестановки с повторениями** из 3 элементов по 2:

{a,b,c}×{a,b,c}={ (a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)}, их количество $\mathbf{n^k=3^2=9}$

- **Перестановки без повторений** из 3 элементов по 2 ≡ упорядоченные сочетания без повторений ≡ **размещения** из трех элементов по 2:

{ (a,b), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b) }, их количество

$$A_3^2 = 2!\cdot C_3^2 = 2!\frac{3!}{2!(3-2)!} = 3! = 6$$

ПРИМЕР 2

- Дано множество M={a,b,c}
- **Сочетания без повторений** из 3 элементов по 2 :

{a,b}, {a,c}, {b,c}, их количество

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

- **Сочетания с повторениями** из 3 элементов по 2:

{a,a}, {a,b}, {a,c}, {b,b}, {b,c}, {c,c}, их количество

$$C_{n+k-1}^k = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 3! = 6$$

N-МЕРНЫЙ КУБ

- Вершины n-мерного куба можно рассматривать как совокупность упорядоченных сочетаний с повторениями (размещений с повторениями) из элементов множества $\mathbf{E_k}$ **={0,1,2,…, k-1}** по **n**:

$$E_k^n = \underbrace{E_k \times E_k \times \ldots \times E_k}_{n \text{ раз}}$$

КОМБИНАТОРНАЯ МЕРА ИНФОРМАЦИИ

- **В комбинаторной мере информации количество информации определяется как число комбинаций элементов (сочетаний символов).**
- **Количество информации совпадает с числом возможных сочетаний, перестановок и размещений элементов.**
- **Комбинирование символов в словах, состоящих только из 0 и 1, меняет значения слов.**
- **Рассмотрим две пары слов:**

100110 и 00110**1**;

011101 и 11101**0**.

- **В них произведена перестановка крайних разрядов (изменено местоположение знакового разряда в числе – перенесен слева направо).**

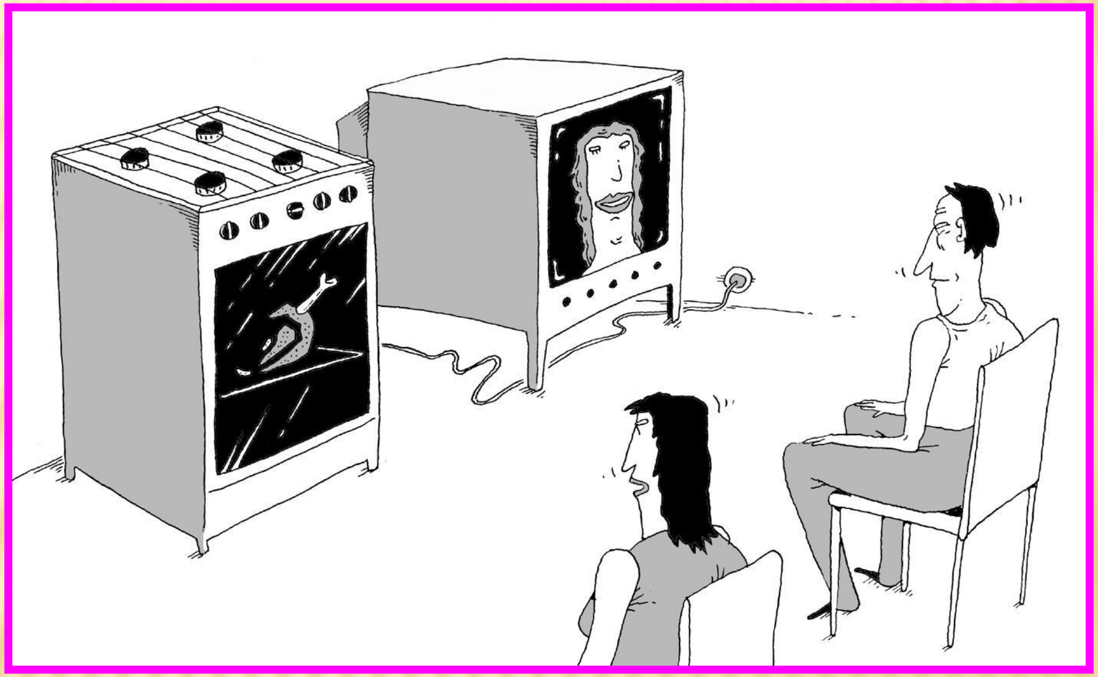
ВЕРОЯТНОСТЬ ИСКАЖЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

- **В теории кодирования имеет место понятие вероятности искажения информации.**
- **Понятие корректирующей способности кода обычно связывают с возможностью обнаружения и исправления ошибки. Количественно корректирующая способность кода определяется вероятностью обнаружения или исправления ошибки.**
- **Пусть имеется n-разрядный код и вероятность искажения одного символа равна p. Количество кодовых комбинаций, каждая из которых содержит k искажений символов, равна числу сочетаний из n по k:** C_n^k
- **Вероятность того, что искажены k символов, а остальные n-k символов не искажены, определяется как**

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

- **Полная вероятность искажения информации определяется как** $$P_\Sigma = \sum_{i=1}^{k} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i}$$

TIME-OUT



ВЫБОРКА. СИСТЕМАТИЗАЦИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ПОНЯТИЙ. 1

- **Def:** набор элементов из множества называется выборкой объема k из n элементов или (n.k)-выборкой
- **Def:** выборка называется упорядоченной, если в ней задан порядок следования элементов
- Две упорядоченные выборки считаются различными, если они отличаются лишь порядком следования элементов
- В выборках могут допускаться повторения элементов
- **Def:** упорядоченная (n,k)-выборка, в которой элементы могут повторяться, называется перестановкой с повторениями из n элементов по k или (n,k)-перестановкой с повторениями
- Число (n,k)-перестановок с повторениями определяется как n^k
- **Def:** если элементы упорядоченной (n,k)-выборки попарно различны, то она называется (n,k)-перестановкой без повторений или просто (n,k)-перестановкой
- Число (n,k)-перестановок без повторений определяется как n!

ВЫБОРКА. СИСТЕМАТИЗАЦИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ПОНЯТИЙ. 2

- **Def:** неупорядоченная (n,k)-выборка, в которой элементы могут повторяться, называется **сочетанием с повторениями из n элементов по k** или **(n,k)-сочетанием с повторениями**.
- Число сочетаний с повторениями из n элементов по k определяется как C_{n+k-1}^{n-1}
- **Def:** если элементы неупорядоченной выборки попарно различны, то она называется **сочетанием без повторений из n элементов по k** или **(n,k)-сочетанием** Каждое такое сочетание представляет подмножество мощности **k**
- Число сочетаний без повторений из n элементов по k определяется как C_n^k

СХЕМА ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МЕЖДУ ПОНЯТИЯМИ

Множество из n элементов

Выборки из k элементов

Упорядоченные

(n,k)-перестановки с повторениями

n^k

(n,k)-перестановки

$n!$

Неупорядоченные

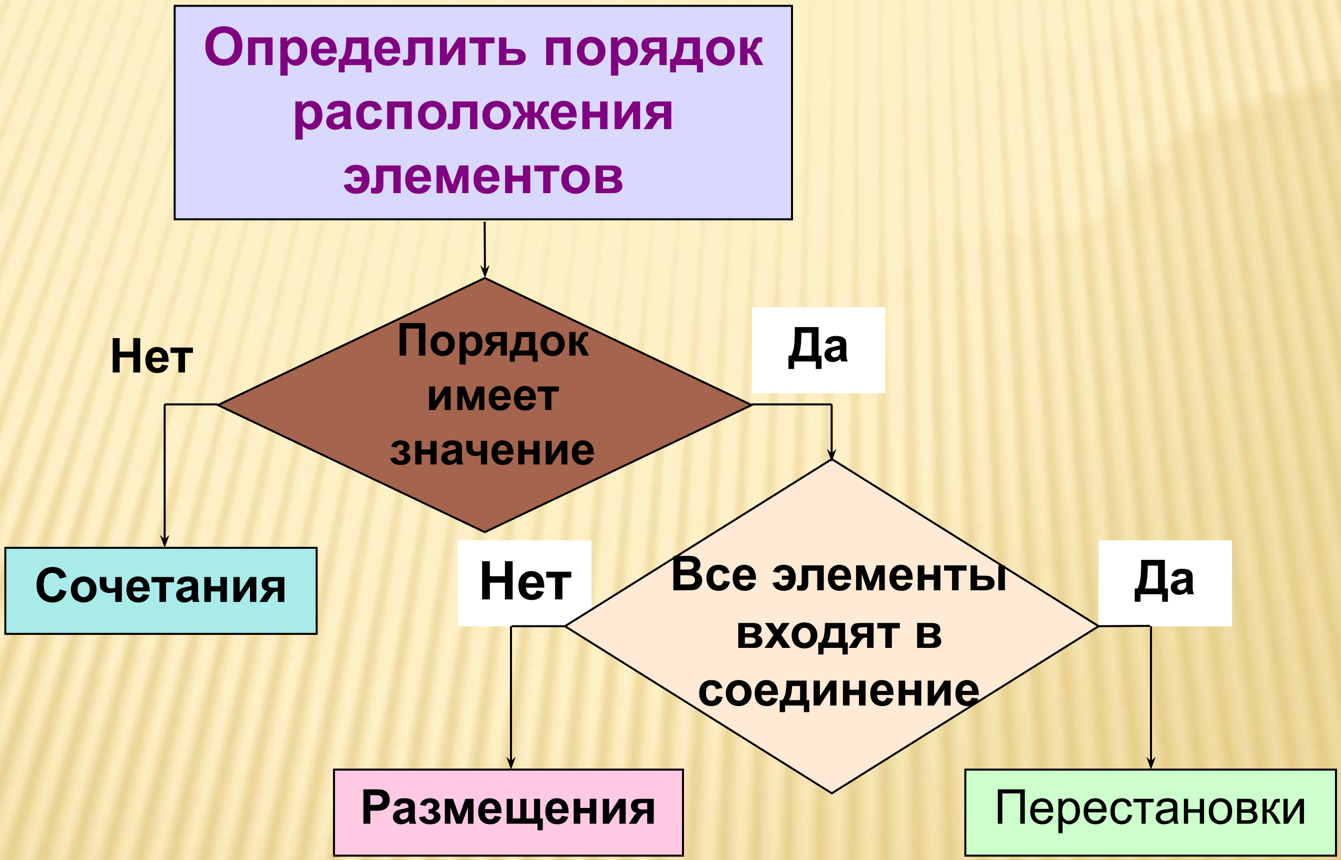
(n,k)-сочетания с повторениями

$$C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}$$

(n,k)-сочетания

$$C_n^k$$

СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



ТЕСТ-ВОПРОСЫ.1

1. Что является более общим понятием:

- а) перестановки;
- б) размещения;
- в) сочетания.

2. В каком случае мощность множества больше:

- а) в размещении без повторений;
- б) в размещении с повторениями;
- в) одинаково.

3. В каком случае мощность множества больше:

- а) в перестановках без повторений;
- б) в перестановках с повторениями;
- в) одинаково.

ТЕСТ-ВОПРОСЫ. 2

4. Число перестановок из 5 элементов равно:

- **а) 5; б) 25; в) 120; г) 1.**

5. Сколько существует способов выбрать 3 книги из 5?

- **а) 0; б) 1; в) 3; г) 5; д) 10.**

6. Сколькими способами можно расставить на полке 4 книги?

- **а) 4**
- **б) 4!**
- **в) 4^2**
- **г) 2^4.**

7. Сколько различных вариантов таблиц истинности можно составить для произвольной булевой функции от трех переменных?