

§7. Вторая теорема о среднем. Формула Бонне

Теорема 1. Пусть функция $f:[a;b] \rightarrow R$ суммируема, $g:[a;b] \rightarrow R$ монотонна.

Тогда функция $f \cdot g$ суммируема и существует $\xi \in [a;b]$ такое, что

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt = g(a) \int_a^{\xi} f(t) dt + g(b) \int_{\xi}^b f(t) dt. \quad (1)$$

Доказательство теоремы опирается на лемму:

Лемма. Пусть функция $f:[a;b] \rightarrow R$ суммируема, $g:[a;b] \rightarrow [0;+\infty)$ убывает.

Тогда функция $f \cdot g$ суммируема и существует $\xi \in [a;b]$ такое, что

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt = g(a) \int_a^{\xi} f(t) dt. \quad (2)$$

Замечание. Переопределяя $g(b) := 0$, видим, что утверждение леммы представляет собой частный случай теоремы 1.

Доказательство. Очевидно (из неотрицательности и убывания), что g измерима и ограничена, причем

$$m = \min_{t \in [a; b]} g(t) = g(b), M = \max_{t \in [a; b]} g(t) = g(a).$$

Следовательно,

$$m \cdot f \leq f \cdot g \leq M \cdot f.$$

Отсюда и из измеримости $f \cdot g$ следует, что функция $f \cdot g$ суммируема на $[a; b]$, поэтому интегралы в (2) существуют и конечны.

Для $n \in \mathbb{N}$ разобьем сегмент $[a; b]$ на равные промежутки длины $\frac{b-a}{n}$ каждый:

$$J_{n1} = [a; x_{n,1}], J_{n2} = [x_{n,1}; x_{n,2}], \dots, J_{nn} = [x_{n,n-1}; b]. \quad (3)$$

Определим простые функции на $[a; b]$:

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n g(x_{n,k-1}) \cdot \chi_{J_{n,k}}, \quad n \in N. \quad (4)$$

Поскольку функция g убывает и неотрицательна, то, очевидно,

$$0 \leq \varphi_n(t) \leq g(a), \quad \forall t \in [a; b], \quad \forall n \in N \quad (5)$$

Если $x \in [a; b]$ и функция f в точке x непрерывна, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = g(x) \quad (6)$$

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta > 0$ таково, что

$$|g(t) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |t - x| < \delta.$$

Возьмем номер n_0 так, что $\frac{b-a}{n_0} < \delta$.

Пусть $n \geq n_0$. Выберем k так что $x \in J_{nk}$. По определению J_{nk} имеем

$$|x - x_{n,k-1}| \leq \frac{b-a}{n} < \delta,$$

следовательно, $|g(x) - \varphi_n(x)| = |g(x) - g(x_{n,k-1})| < \varepsilon$.

Таким образом, равенство (6) доказано.

Убывающая функция имеет не более чем счетное число точек разрыва, значит, она непрерывна почти всюду. Следовательно равенство (6) справедливо почти всюду на $[a; b]$.

Из (5) следует, что последовательность функций

$$f \cdot \varphi_n : [a; b] \rightarrow R, n \in N \quad (7)$$

мажорируется на $[a; b]$ функцией $g(a) \cdot |f| : [a; b] \rightarrow R$, которая так же суммируема, как и функция f . Значит, к последовательности функций (7) применима теорема Лебега о мажорирующей сходимости. Применяя ее, получим

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f(t) \cdot \varphi_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cdot \varphi_n(t) dt \quad (8)$$

Введем функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a; b].$$

Отметим, что по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_{J_{nk}} f(t)dt = F(x_{nk}) - F(x_{n,k-1}), \forall n, k \in N$$

Из (3) и (4) имеем

$$\int_a^b f(t) \cdot \varphi_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{J_{nk}} f(t) \varphi_n(t) dt =$$
$$\sum_{k=1}^n g(x_{n,k-1}) \int_{J_{nk}} f(t) dt = \sum_{k=1}^n g(x_{n,k-1}) \cdot (F(x_{nk}) - F(x_{n,k-1})) =$$

<перегруппировав слагаемые в сумме, получим>

$$\sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{n,k-1}) - g(x_{n,k})) \cdot F(x_{n,k}) + g(x_{n,n-1})F(x_{n,n}) - g(x_{n,0})F(x_{n,0})$$

Учитывая, что $x_{n,n} = b$, $x_{n,0} = a$, $F(a) = 0$, получим

$$\int_a^b f(t) \cdot \varphi_n(t) dt = \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{n,k-1}) - g(x_{n,k})) \cdot F(x_{n,k}) + g(x_{n,n-1})F(b) \quad (9)$$

По теореме 1 §2 функция F непрерывна на $[a; b]$, следовательно, она в некоторых точках $\bar{x}, \bar{x} \in [a; b]$ достигает минимума и максимума соответственно, то есть

$$\forall x \in [a; b] \quad F(\bar{x}) \leq F(x) \leq F(\bar{x}),$$

в частности, для всех n, k имеем

$$F(\bar{x}) \leq F(x_{nk}) \leq F(\bar{x}),$$

Отметим еще, что по условию функция g убывает.

Следовательно

$$g(x_{n,k-1}) - g(x_{nk}) \geq 0, \quad g(x_{n,n-1}) \geq g(b) \geq 0,$$

поэтому из (9) имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{n,k-1}) - g(x_{nk})) + g(x_{n,n-1}) \right\} \cdot F(\bar{x}) &\leq \int_a^b f(t) \cdot \varphi_n(t) dt \leq \\ &\leq \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{n,k-1}) - g(x_{nk})) + g(x_{n,n-1}) \right\} F(\bar{x}) \end{aligned} \quad (10)$$

Легко убедиться, что выражение в фигурных скобках представляет собой $g(a)$. Поэтому оценку (10) можно записать короче

$$g(a)F(\bar{x}) \leq \int_a^b f(t) \cdot \varphi_n(t) dt \leq g(a)F(\bar{x}), \quad \forall n \in N.$$

Отсюда и из (8) получим

$$g(a)F(\bar{x}) \leq \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt \leq g(a)F(\bar{x})$$

По теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции $g(a)F(x)$ существует точка $\xi \in [\bar{x}; \bar{x}]$ (или $\xi \in [\bar{x}; \bar{x}]$), такая что

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt = g(a)F(\xi) = g(a) \int_a^{\xi} f(t) dt. \quad \square$$

Докажем теперь вторую теорему о среднем.