Основы теории нечетких множеств

выполнил: студент
группы ИСМ-51з
Амелин А.С.

Основные понятия и определения

- Универсальное множество U
- Характеристическая функция

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin A; \\ 1, & \text{если } x \in A \quad (x \in U) \end{cases}$$

- Функция принадлежности μ$A(u)$

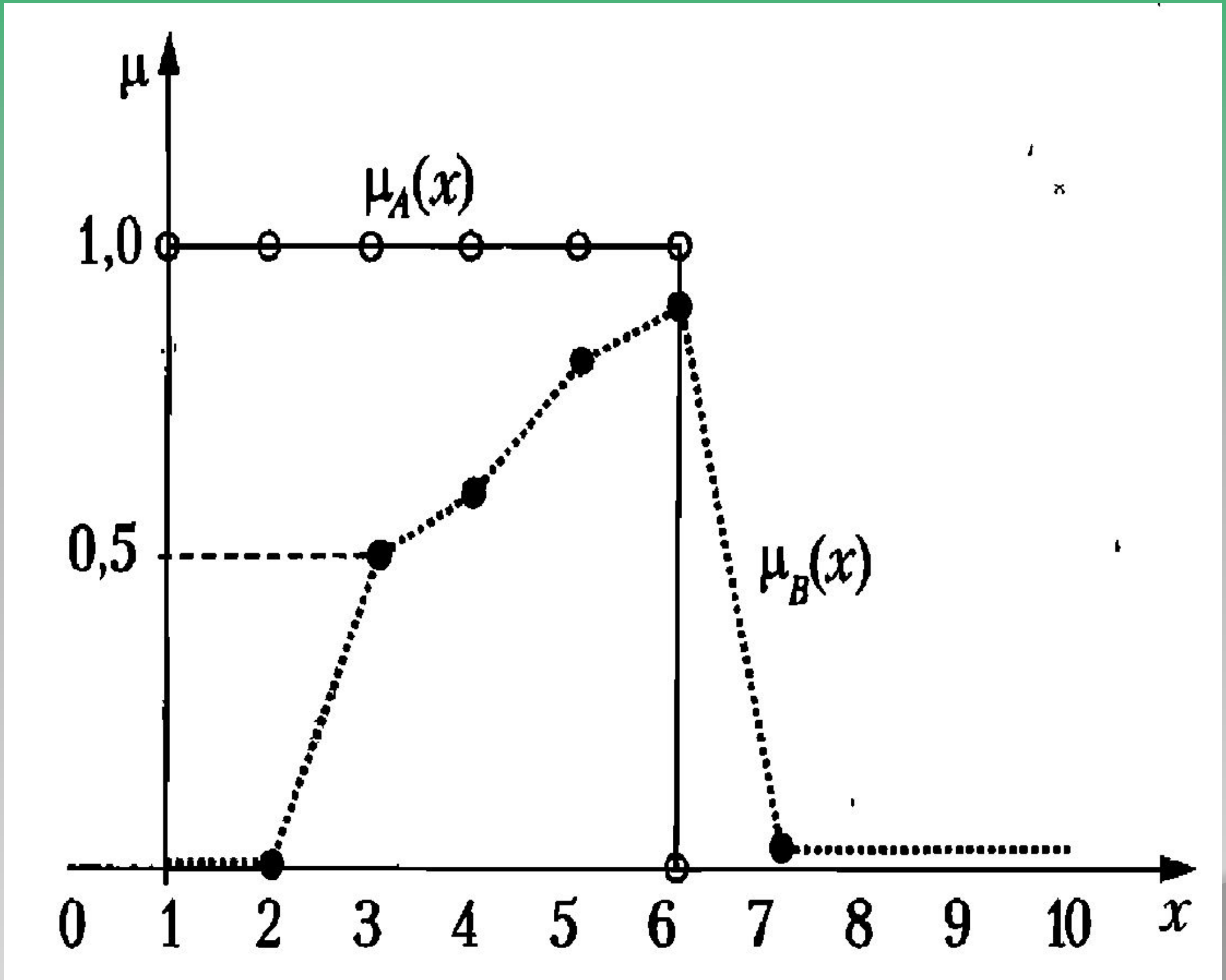
Общая форма записи нечеткого подмножества

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i) / u_i \qquad (u_i \in U)$$

$$A = \int_U \mu_A(u) / u$$

- Точка перехода
- Нормальное и субнормальное множество
- Унимодальная функция
- Сингельтон

Графическое представление



Графическое представление нечетких множеств осуществляется в виде диаграмм Заде (U,)

Множества α-уровня

- Разложение нечеткого множества по множествам уровня

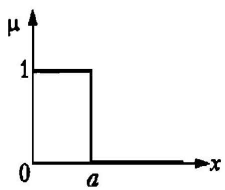
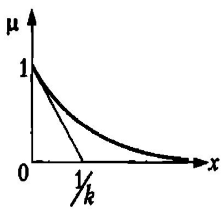
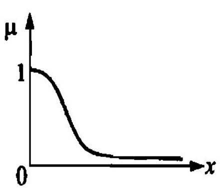
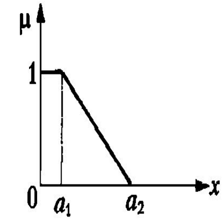
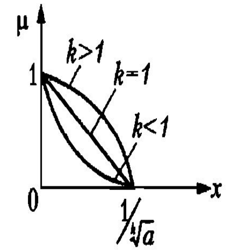
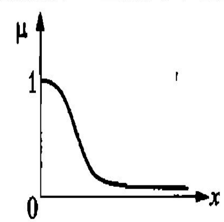
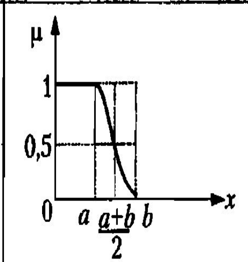
$$A = \sum_{\alpha \in A} \tilde{A}^{\alpha} = \sum_{\alpha \in A} \alpha \cdot A^{\alpha}$$

$$A = \int_0^1 \tilde{A}^{\alpha} = \int_0^1 \alpha \cdot A^{\alpha}$$

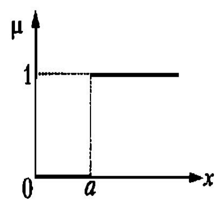
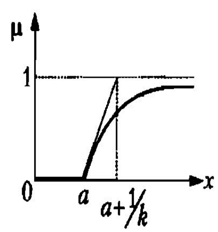
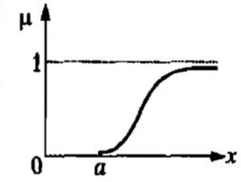
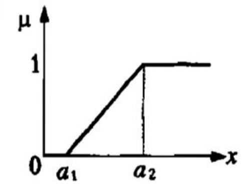
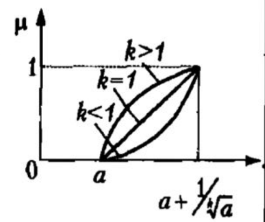
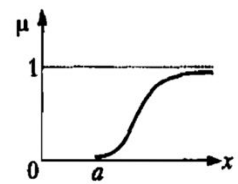
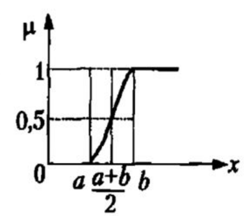
Методы построения функций принадлежности

Прямой **Косвенный**

Функции принадлежности при малой величине x

Универсальное множество	График функции принадлежности	Формула функции принадлежности
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le x \le a; \\ 0, & \text{если} \quad x > a \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = e^{-kx}$, A
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = e^{-kx^2}$, $k > 0$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le x < a_1; \\ \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a_1}, & \text{если} \quad a_1 \le x \le a_2; \\ 0, & \text{если} \quad a_2 < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 1 - ax^k, & \text{если} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}; \\ 0, & \text{если} \quad \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}} < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \dfrac{1}{1 + kx^2}$, $k > 0$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < a; \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{b-a} \cdot \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)\right), & a \le x \le b; \\ 0, & b < x \end{cases}$

Функции принадлежности при большой величине x

Универсальное множество	График функции принадлежности	Формула функции принадлежности
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x \le a; \\ 1, & \text{если } x > a \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < a; \\ 1 - e^{-k(x-a)}, & \text{если } a \le x; \end{cases}$ $k > 0$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le a < x; \\ 1 - e^{-k(x-a)^2}, & \text{если } a \le x; \end{cases}$ $k > 0$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < a_1; \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & \text{если } a_1 \le x \le a_2; \\ 1, & \text{если } a_2 < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a; \\ a(x-a)^k, & a \le x \le a + \frac{1}{\sqrt[k]{a}}; \\ 1, & \frac{1}{\sqrt[k]{a}} < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a; \\ \frac{k(x-a)^2}{1 + k(x-a)^2}, & a \le x; \end{cases}$ $k > 0$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{b-a} \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right), & a \le x \le b; \\ 1, & b < x \end{cases}$

Меры нечеткости множества

- Аксиомы метрики
- 1) *p(x,y) ≥ 0. p(x,y) = 0 при x=y*
- *2) p(x,y)= p(y,x)*
- *3) p(x,y) ≥ p(x,z) + p(z,y)*

Мера нечеткости множества

$$d(A) = p(\mu_A, \mu_{A0})(\mathrm{u}_i \in U)$$

Виды метрик функциональных пространств

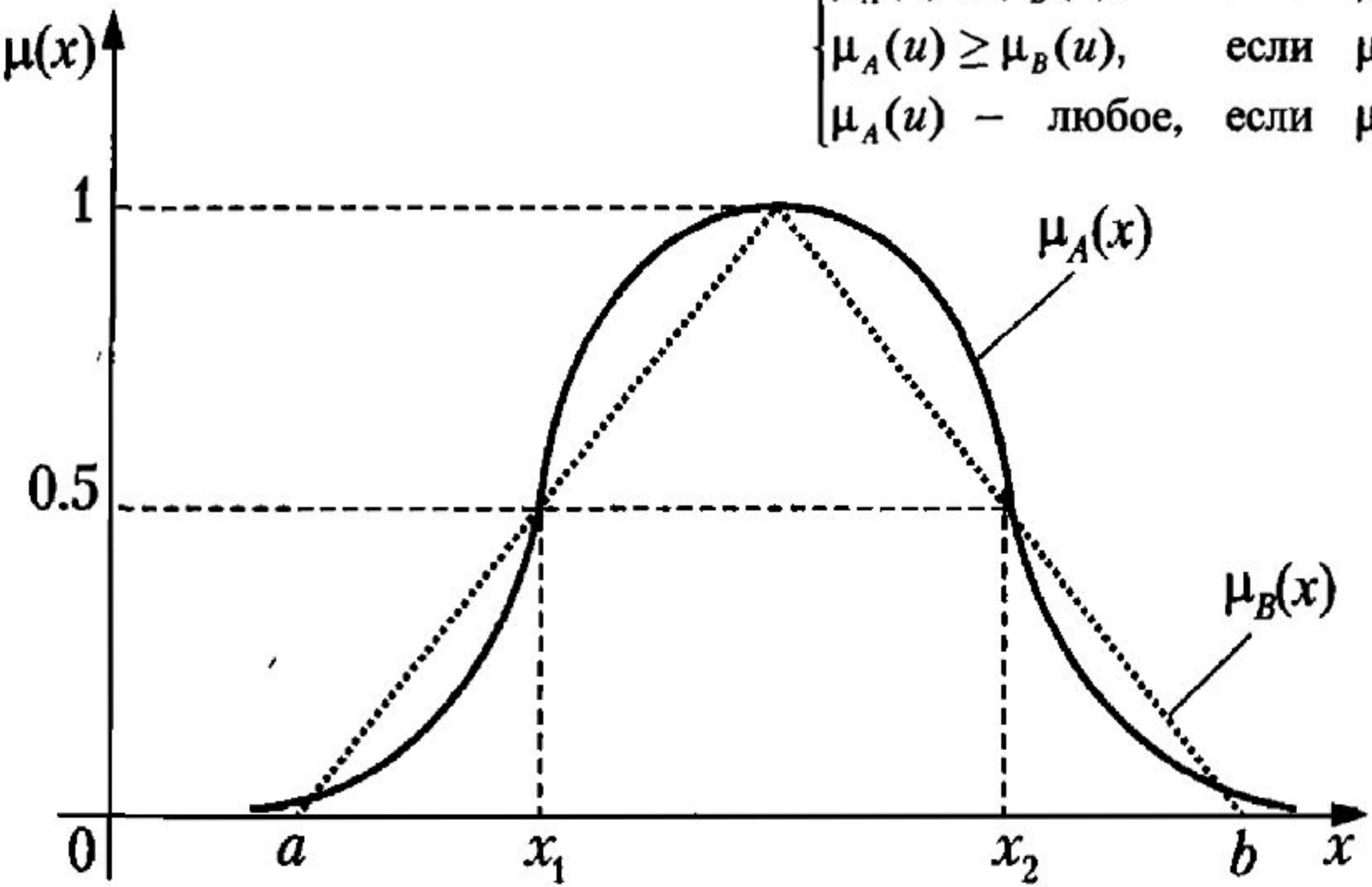
Вид метрики	Вид множества	
	U – дискретное множество, n число его элементов	**$U = [a, b]$ – непрерывное множество**
Линейное расстояние (расстояние Хемминга)	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \sum_{i=1}^{n} \lvert \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \rvert$	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \int_a^b \lvert \mu_A(x) - \mu_B(x) \rvert dx$
Евклидово расстояние	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}$	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \sqrt{\int_a^b (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2 dx}$

Формулы вычисления индекса нечеткости множеств

Вид метрики	Вид множества	
	U – дискретное множество, n число его элементов	**$U = [a, b]$ – непрерывное множество**
Линейное расстояние (расстояние Хемминга)	$I_A^L = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \lvert \mu_A(x_i) - \mu_{A_0}(x_i) \rvert$	$I_A^L = \frac{2}{b-a} \int_a^b \lvert \mu_A(x) - \mu_{A_0}(x) \rvert dx$
Евклидово расстояние	$I_A^E = \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_{A_0}(x_i))^2}$	$I_A^E = \frac{2}{\sqrt{b-a}} \sqrt{\int_a^b (\mu_A(x) - \mu_{A_0}(x))^2 dx}$

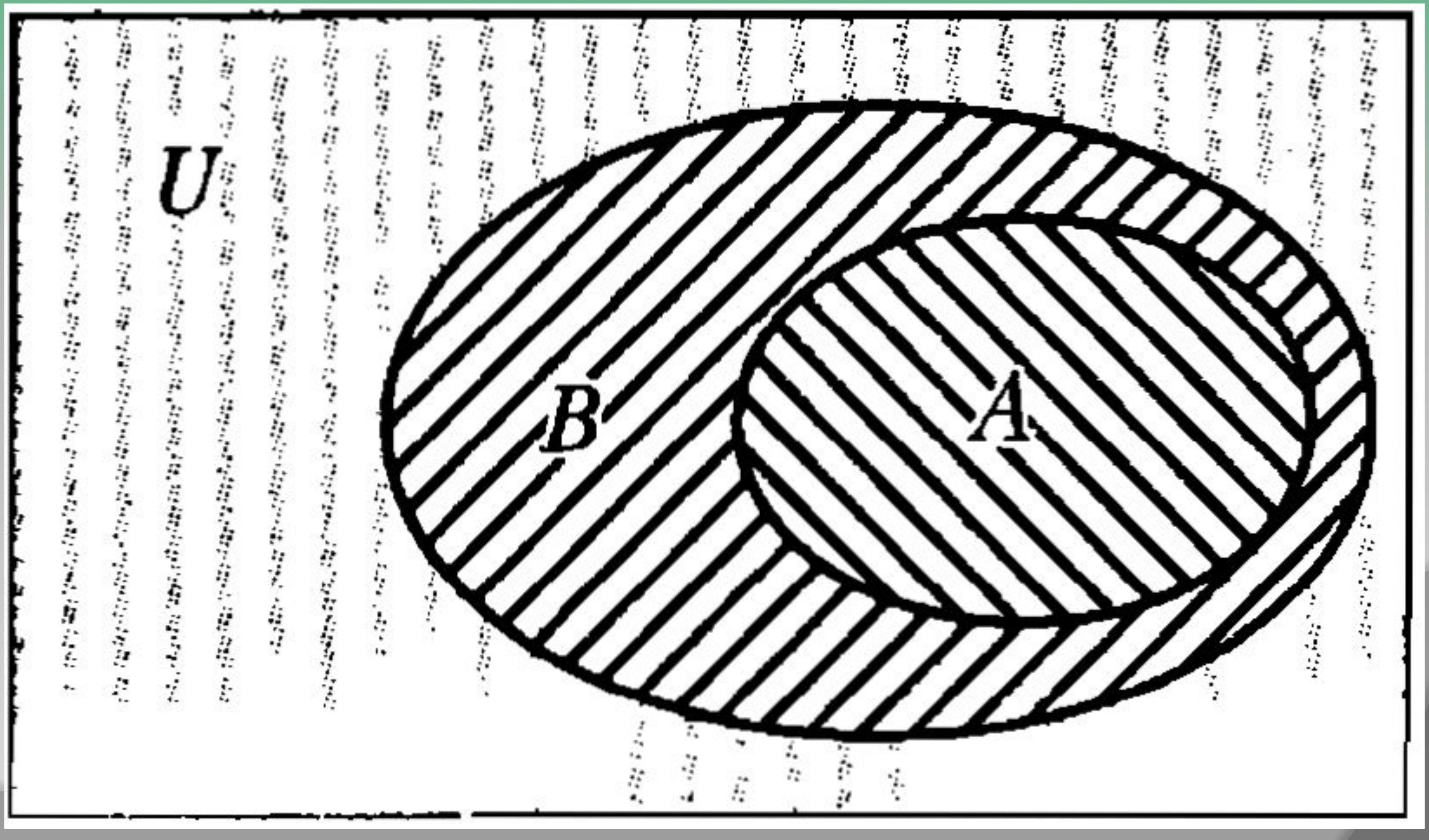
Заострение множества

$$
\begin{cases}
\mu_A(u) \le \mu_B(u), & \text{если} \quad \mu_B(u) < 0{,}5 \\
\mu_A(u) \ge \mu_B(u), & \text{если} \quad \mu_B(u) > 0{,}5 \\
\mu_A(u) \ - \ \text{любое}, & \text{если} \quad \mu_B(u) = 0{,}5
\end{cases}
$$

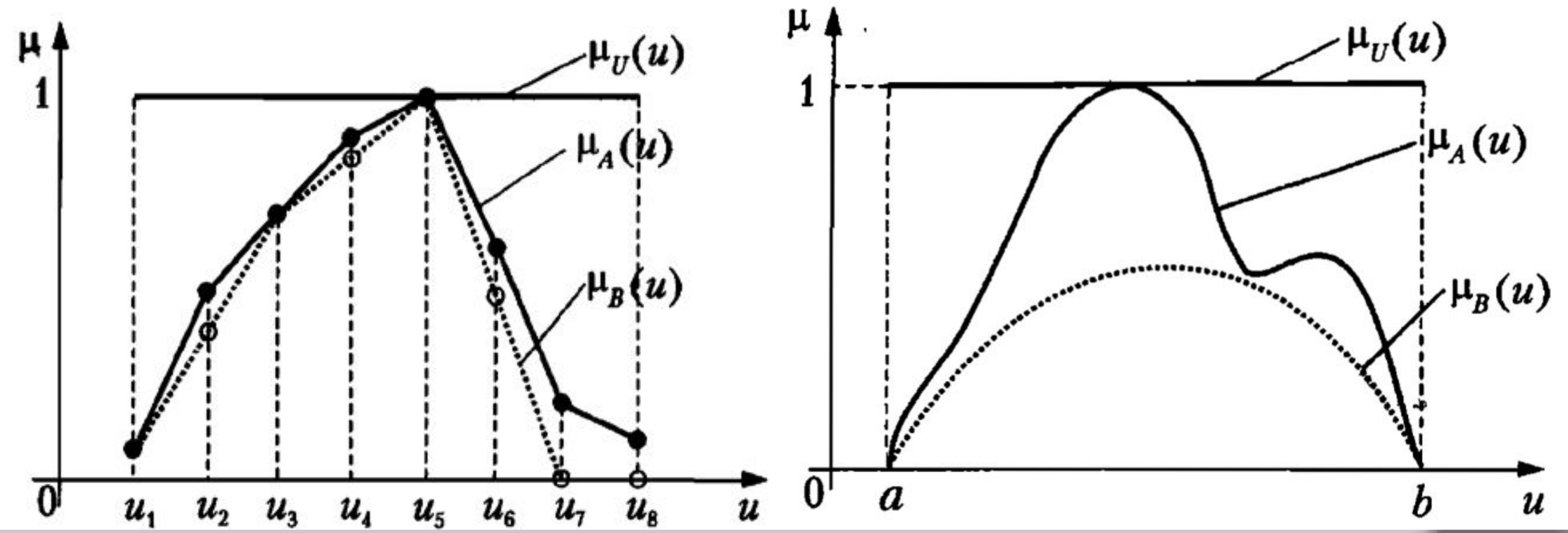


Отношения включения нечетких множеств

- Диаграмма Эйлера-Венна



Графики функции принадлежности нечетких множеств $B \subset A \subset U$



- Множество ϑ всех нечетких подмножеств множества U включает все обычные и нечеткие подмножества, включая U(наибольшее множество) и $\varnothing$ (наименьшее множество)