

# Основы теории нечетких множеств

выполнил: студент  
группы ИСМ-513  
Амелин А.С.

# Основные понятия и определения

- Универсальное множество  $U$
- Характеристическая функция

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin A; \\ 1, & \text{если } x \in A \quad (x \in U) \end{cases}$$

- Функция принадлежности  $\mu_A(u)$

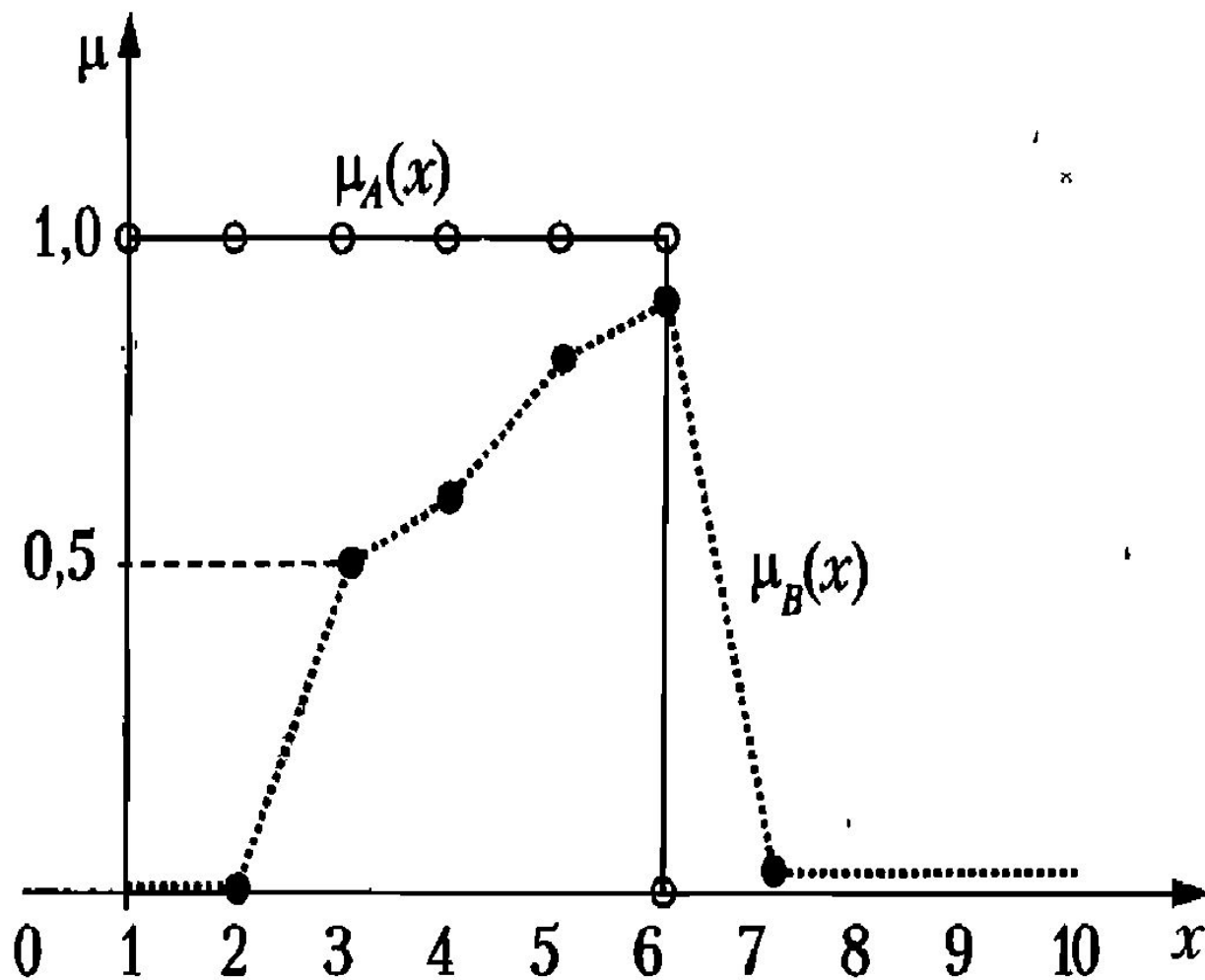
# Общая форма записи нечеткого подмножества

$$A = \sum_{i=1}^n \mu_A(u_i) / u_i \quad (u_i \in U)$$

$$A = \int_U \mu_A(u) / u$$

- Точка перехода
- Нормальное и субнормальное множество
- Унимодальная функция
- Сингелтон

# Графическое представление



Графическое представление нечетких множеств осуществляется в виде диаграмм Заде (U, )

# Множества $\alpha$ -уровня

- ◎ Разложение нечеткого множества по множествам уровня

$$A = \sum_{\alpha \in A} \tilde{A}^{\alpha} = \sum_{\alpha \in A} \alpha \cdot A^{\alpha}$$

$$A = \int_0^1 \tilde{A}^{\alpha} = \int_0^1 \alpha \cdot A^{\alpha}$$

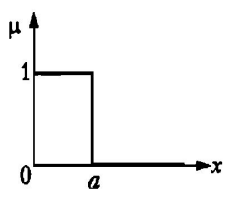
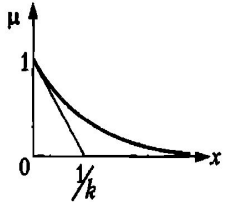
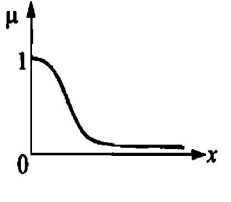
# *Методы построения функций принадлежности*

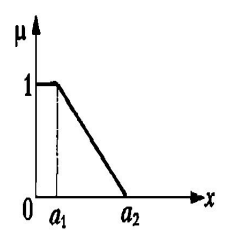
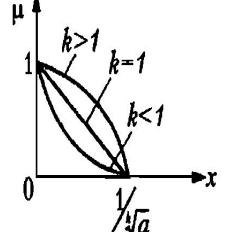
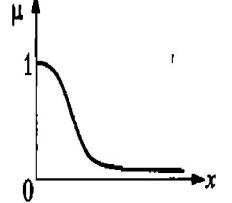
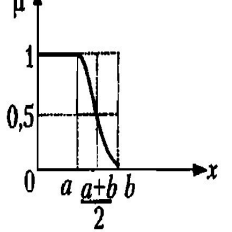


**Прямой**

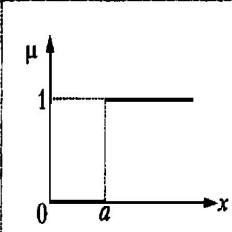
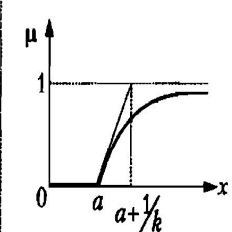
**Косвенный**

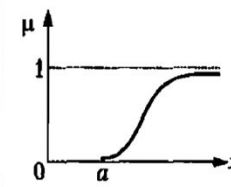
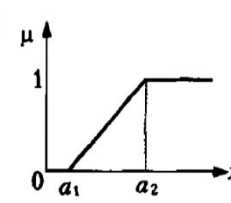
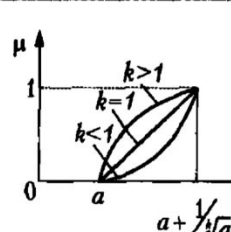
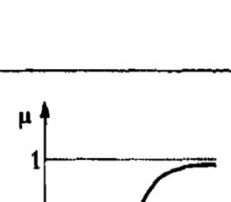
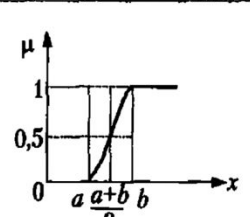
# Функции принадлежности при малой величине $x$

Универсальное множество	График функции принадлежности	Формула функции принадлежности
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq a; \\ 0, & \text{если } x > a \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = e^{-kx}, A$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = e^{-kx^2}, k > 0$

$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x < a_1; \\ \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1}, & \text{если } a_1 \leq x \leq a_2; \\ 0, & \text{если } a_2 < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 1 - ax^k, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[4]{a}}; \\ 0, & \text{если } \frac{1}{\sqrt[4]{a}} < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \frac{1}{1 + kx^2}, k > 0$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a; \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{b-a} \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right), & a \leq x \leq b; \\ 0, & b < x \end{cases}$

# Функции принадлежности при большой величине $x$

Универсальное множество	График функции принадлежности	Формула функции принадлежности
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq a; \\ 1, & \text{если } x > a \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < a; \\ 1 - e^{-k(x-a)}, & \text{если } a \leq x; \\ k > 0 \end{cases}$

$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq a < x; \\ 1 - e^{-k(x-a)}, & \text{если } a \leq x; \\ k > 0 \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < a_1; \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & \text{если } a_1 \leq x \leq a_2; \\ 1, & \text{если } a_2 < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a; \\ a(x-a)^k, & a \leq x \leq a + \frac{1}{\sqrt[4]{a}}; \\ 1, & \frac{1}{\sqrt[4]{a}} < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a; \\ \frac{k(x-a)^2}{1 + k(x-a)^2}, & a \leq x; \\ k > 0 \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{b-a} \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right), & a \leq x \leq b; \\ 1, & b < x \end{cases}$



# Меры нечеткости множества

- ⊙ Аксиомы метрики
- ⊙ 1)  $p(x,y) \geq 0$ .  $p(x,y) = 0$  при  $x=y$
- ⊙ 2)  $p(x,y) = p(y,x)$
- ⊙ 3)  $p(x,y) \geq p(x,z) + p(z,y)$

*Мера нечеткости множества*

$$d(A) = p(\mu_A, \mu_{A0})(u_i \in U)$$

# Виды метрик функциональных пространств

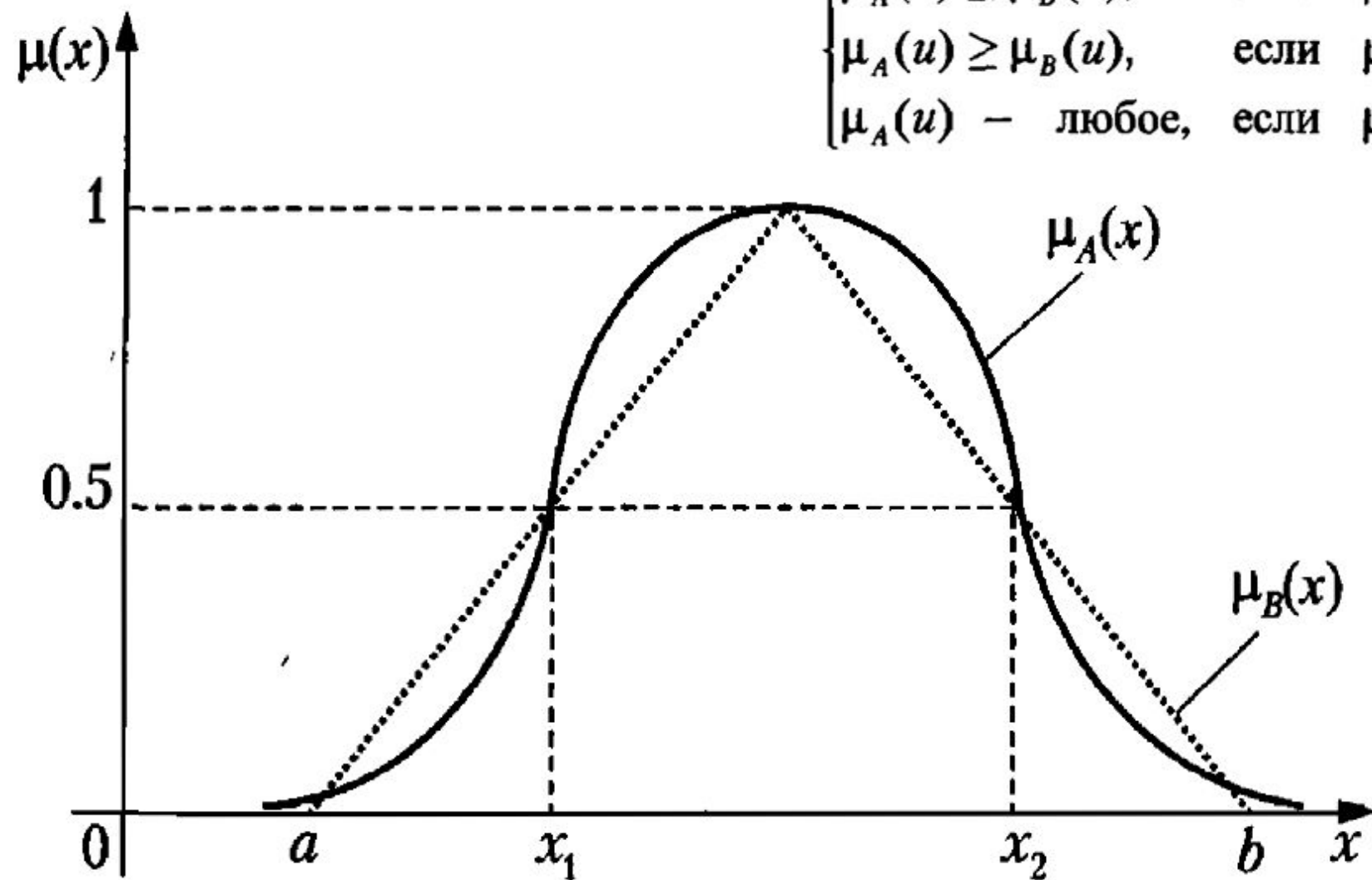
Вид метрики	Вид множества	
	$U$ – дискретное множество, $n$ число его элементов	$U \doteq [a, b]$ – непрерывное множество
Линейное расстояние (расстояние Хемминга)	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \sum_{i=1}^n  \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) $	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \int_a^b  \mu_A(x) - \mu_B(x)  dx$
Евклидово расстояние	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}$	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \sqrt{\int_a^b (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2 dx}$

## Формулы вычисления индекса нечеткости множеств

Вид метрики	Вид множества	
	$U$ – дискретное множество, $n$ число его элементов	$U = [a, b]$ – непрерывное множество
Линейное расстояние (расстояние Хемминга)	$I_A^L = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n  \mu_A(x_i) - \mu_{A_0}(x_i) $	$I_A^L = \frac{2}{b-a} \int_a^b  \mu_A(x) - \mu_{A_0}(x)  dx$
Евклидово расстояние	$I_A^E = \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_{A_0}(x_i))^2}$	$I_A^E = \frac{2}{\sqrt{b-a}} \sqrt{\int_a^b (\mu_A(x) - \mu_{A_0}(x))^2 dx}$

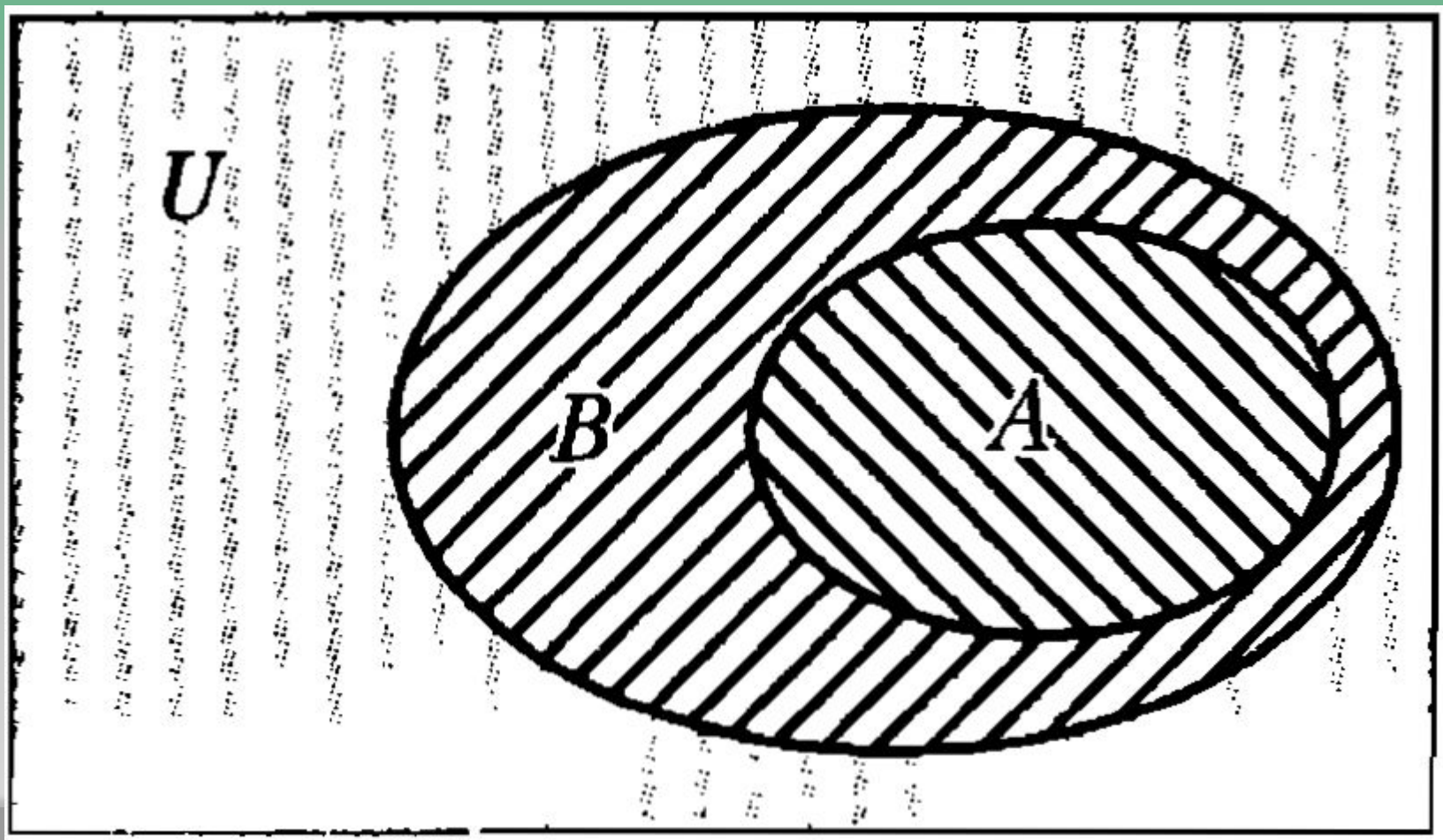
# Заострение множества

$$\begin{cases} \mu_A(u) \leq \mu_B(u), & \text{если } \mu_B(u) < 0,5 \\ \mu_A(u) \geq \mu_B(u), & \text{если } \mu_B(u) > 0,5 \\ \mu_A(u) - \text{любое}, & \text{если } \mu_B(u) = 0,5 \end{cases}$$

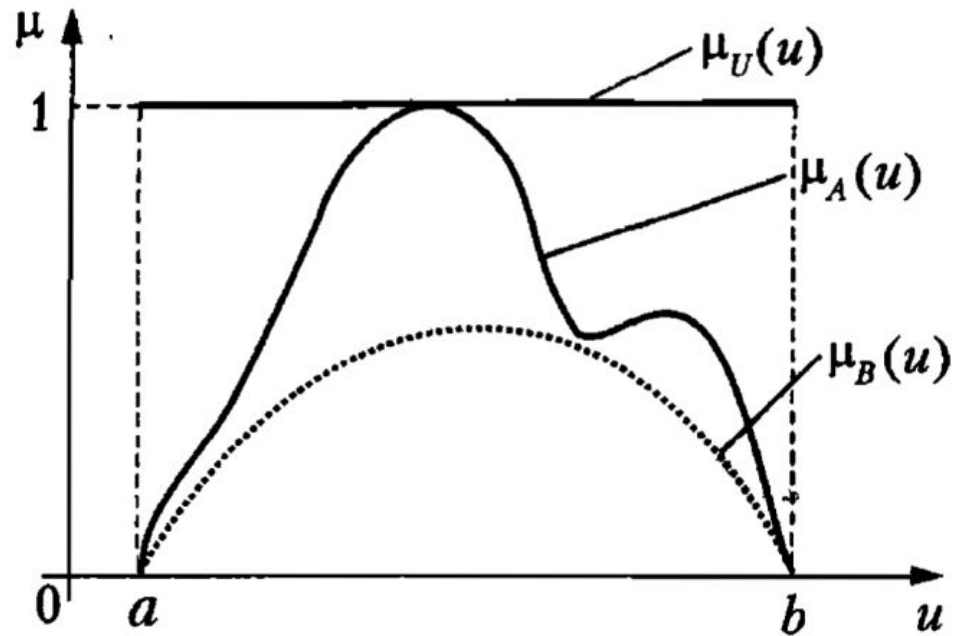
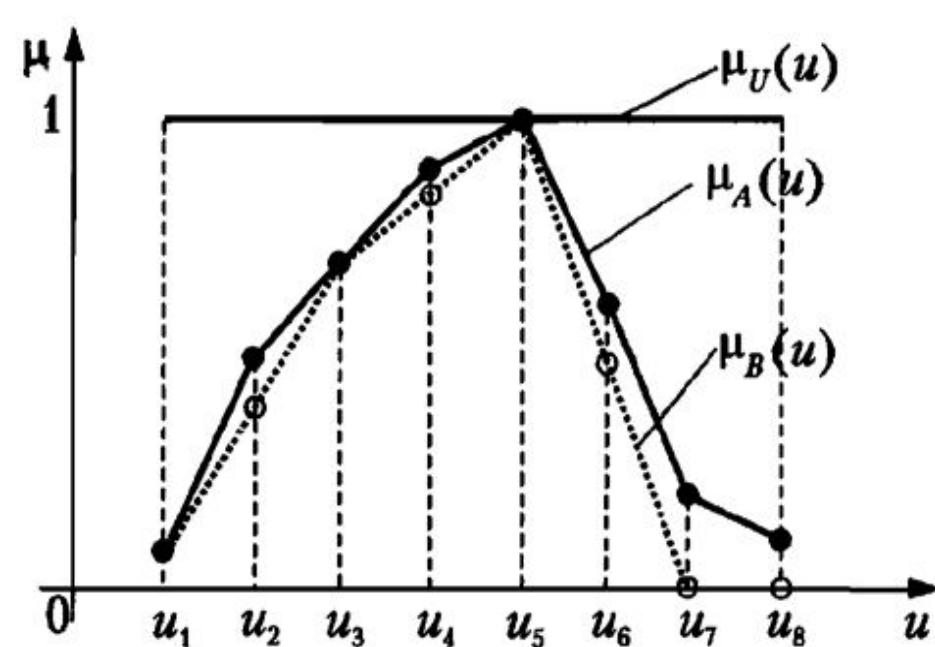


# Отношения включения нечетких множеств

- Диаграмма Эйлера-Венна



# Графики функции принадлежности нечетких множеств $B \subset A \subset U$



- Множество  $\mathcal{F}$  всех нечетких подмножеств множества  $U$  включает все обычные и нечеткие подмножества, включая  $U$  (наибольшее множество) и  $\emptyset$  (наименьшее множество)