Дискретные случайные величины

Практическое занятие по Теории вероятностей и математической статистике от 28.10.2020

- **Необходимо уметь:**
- Строить закон распределения с.в. X по условиям задачи $P(X = x_i) = p_i$ (представлять его в виде ряда и многоугольника распределения).
- Строить функцию распределения вероятностей с.в. $F_X(x)$, зная закон распределения и наоборот.
- Вычислять числовые характеристики с.в. $MX, DX, \sigma X$ и др., зная закон распределения.
- Вычислять вероятность попадания с.в. в интервал $P(a \overset{<}{\le} X \overset{<}{\le} b)$, зная закон распределения.

Для построения закона распределения необходимо правильно определить какие значения может принимать с.в. и вычислить вероятности всех этих значений.

Задачи

- **6.8.1,6.8.8.** В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее последовательно извлекаются шары до первого появления белого шара. Построить ряд и многоугольник распределения с.в. X - числа извлеченных шаров. Найти функцию распределения и числовые характеристики.
- <u>Решение</u>. Определим, какие значения может принимать с.в. X. Минимальное значение $X=1$, т.к. по крайней мере 1 шар необходимо извлечь. Максимальное значение $X=4$, т.к. четвертый шар точно будет белым. Вычислим вероятности:

$$p_1 = P(X=1) = \frac{4}{7},\ \ p_2 = P(X=2) = \frac{3}{7}\frac{4}{6} = \frac{2}{7},\quad p_3 = P(X=3) = \frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{4}{5} = \frac{4}{35},$$

$$p_4 = P(X=4) = \frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{4}{4} = \frac{1}{35}.$$

Для проверки: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$

Запишем ряд распределения:

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

- Для получения многоугольника распределения, представим данные таблицы графически.
- Функция распределения $F_X(x) = P(X < x),\ x \in R^1$

$$x \in (-\infty, 1]\ \ F_X(x) = P(X < 1) = 0$$

$$x \in (1, 2]\ \ F_X(x) = P(X < 2) = P(X = 1) = \frac{4}{7}$$

$$x \in (2, 3]\ \ F_X(x) = P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$x \in (3, 4]\ \ F_X(x) = P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{35} = \frac{34}{35}$$

$$x \in (4, +\infty)\ \ F_X(x) = P(X < +\infty) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{35} + \frac{1}{35} = 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{4}{7}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}, & 2 < x \le 3 \\ \frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{35} = \frac{34}{35}, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

- **Числовые характеристики:**

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 1 \cdot \frac{4}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{4}{35} + 4 \cdot \frac{1}{35} = \frac{56}{35} = 1.6$$

$$DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(MX\right)^2 = 1 \cdot \frac{4}{7} + 4 \cdot \frac{2}{7} + 9 \cdot \frac{4}{35} + 16 \cdot \frac{1}{35} - 1.6^2 = 0.64$$

$$\sigma X = \sqrt{DX} = 0.8$$

- Момент *k*-го порядка:

$$\mu_k = MX^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$$

- Центральный момент *k*-го порядка:

$$\gamma_k = M\left(X - MX\right)^k = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - MX\right)^k p_i$$

- Мода распределения: $X = 1$

- **Вероятность попадания в интервал:** $P(a \overset{<}{\leq} X \overset{<}{\leq} b)$,

$$P(-10 \leq X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7}$$

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{35} + \frac{2}{35} = \frac{6}{35}$$

Смотрим, какие значения X *попадают в интервал и складываем соответствующие вероятности.*

- **6.8.4,6.8.25.** Три стрелка, ведущие огонь по цели, сделали по одному выстрелу. Вероятности их попадания в цель соответственно равны 0.5, 0.6, 0.8. Построить ряд и функцию распределения с.в. X – числа попаданий в цель. Найти числовые характеристики.

- Решение. Минимальное значение $X = 0$, т.к. в цель может не попасть никто. Максимальное значение $X = 3$, если в цель попадут все трое. Вычислим вероятности:

$p_1 = 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.04$ - никто не попал

$p_2 = 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.8 = 0.26$ - попал только один

$p_3 = 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.8 = 0.46$ - попали только двое

$p_4 = 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.8 = 0.24$ - все попали

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$$

Запишем ряд распределения:

x_i	1	2	3	4
p_i	0.04	0.26	0.46	0.24

- **Функция распределения** $F_X(x) = P(X < x),\ x \in R^1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0.04, & 0 < x \le 1 \\ 0.04 + 0.26 = 0.3, & 1 < x \le 2 \\ 0.04 + 0.26 + 0.46 = 0.76, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

- **Числовые характеристики:**

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot 0.04 + 1 \cdot 0.26 + 2 \cdot 0.46 + 3 \cdot 0.24 = 1.9$$

$$DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(MX\right)^2 = 0 \cdot 0.04 + 1 \cdot 0.26 + 4 \cdot 0.46 + 9 \cdot 0.24 - 1.9^2 = 0.65$$

$$\sigma X = \sqrt{DX} \approx 0.81$$

- **Вероятность попадания в интервал:**

$$P(1 \le X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0.26 + 0.26 = 0.72$$

- **6.8.10 б).** Задана функция распределения с.в. X. Найти ряд распределения.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 0.2, & 1 < x \le 3 \\ 0.35, & 3 < x \le 6 \\ 0.8, & 6 < x \le 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Значениями с.в. X будут концы интервалов значений $F_X(x)$.

Т.е. $X = 1, 3, 6, 8$

$p_1 = 0.2$

$p_2 = 0.35 - 0.2 = 0.15$

$p_3 = 0.8 - 0.35 = 0.45$

$p_4 = 1 - 0.8 = 0.2$

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$$

x_i	1	3	6	8
p_i	0.2	0.15	0.45	0.2

- **6.8.5.** Вероятность того, что автомат при опускании одной монеты срабатывает правильно, равна 0.98. Построить ряд распределения с.в. X – числа опусканий монет в автомат до первого правильного срабатывания автомата. Найти вероятность того, что будет опущено 5 монет. Решить те же задачу при условии, что в наличии всего 3 монеты.
- Решение. Заметим, что в первом варианте задачи количество монет не ограничено, т.е. с.в. X может принимать сколь угодно большое целое значение. Минимальное же ее значение равно 1.

$$p_1 = 0.98$$
$$p_2 = 0.02 \cdot 0.98 = 0.0196$$
$$p_3 = 0.02^2 \cdot 0.98 = 0.000392$$
$$p_4 = 0.02^3 \cdot 0.98 = 0.00000784$$
$$p_5 = 0.02^3 \cdot 0.98 = 0.0000001568$$

– вероятность, что будет опущено 5 монет

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

x_i	1	2	3	4	5	…
p_i	0.98	0.0196	0.000392	0.00000784	0.0000001568	

- С.в. X имеет геометрическое распределение с законом $P(X = m) = q^{m-1} p$

- Если в наличии всего 3 монеты, то максимальное значение с.в. $X = 3$

$p_1 = 0.98$

$p_2 = 0.02 \cdot 0.98 = 0.0196$

- $p_3 = 0.02^2 \cdot (0.98 + 0.02) = 0.0004$ - т.к. при опускании 3 монеты автомат может сработать или нет, но опыт все равно закончится.

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$$

x_i	1	2	3
p_i	0.98	0.0196	0.0004

- **6.8.19.** Подброшены 2 игральные кости. Построить ряд распределения: а) суммы выпавших очков; б) разности выпавших очков.
- <u>Решение</u>. а) Сумма выпавших очков принимает значения от 2 до 12

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- б) Разность выпавших очков принимает значения от 0 до 5

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Домашнее задание

- 6.8.3, 6.8.12, 6.8.22+6.8.27, 6.8.24