РАЗДЕЛ X. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Принятые обозначения числовых множеств

Сегменты (замкнутые множества) $[a; b] = \{a \le x \le b\}$

Интервалы (открытые множества)

$$(a; b) = \{a < x < b\} \qquad (-\infty; +\infty) = \{-\infty < x < +\infty\}$$

$$(-\infty; b) = \{-\infty < x < b\} \qquad (a; +\infty) = \{a < x < +\infty\}$$

Интервалы полуоткрытые

полуинтервалы $(a; b] = \{a < x \le b\}$ $(-\infty; b] = \{-\infty < x \le b\}$

полусегменты $[a; b) = \{a \le x < b\}$ $[a; +\infty) = \{a \le x < +\infty\}$

Окрестностью точки x_0 называется любой открытый интервал, содержащий точку x_0.

Понятие функции

- В математике различают два вида величин - постоянные и переменные. Величина, всё время сохраняющая одно и тоже значение , называется ***постоянной*** и обычно обозначается символом *«c o n s t» (константа).*
- Величина, которая принимает одно и тоже значение только в условиях данной задачи (характеристика какого-либо свойства исследуемого проесса), но может изменить его при переходе к другой задаче, называется ***параметром***.
- Величина, принимающая в условиях данной задачи различные значения, называется ***переменной.***
- Пусть D и P – непустые множества.

Функцией называется соответствие f, которое каждому элементу x из D ($\boldsymbol{x} \ni D$) сопоставляет один (*однозначная функция*) или несколько (*многозначная функция*) элементов y множества P ($y \ni P$):

Для функционального соответствия приняты обозначения

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(x); \quad D \xrightarrow{f} P; \quad x \xrightarrow{f} y$$

Предел функции в точке и на бесконечности

Число А называется ***пределом функции f(x) при x стремящемся к a***, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x таких, что при $0 < |x - a| < \delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

Число А называется ***пределом функции f(x) при x стремящемся в бесконечность***, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M(\varepsilon)>0$, что при $|x|>M$ выполняется неравенство $|A - f(x)| < \varepsilon$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

Аналогичным образом определяется предел функции при $x \to -\infty$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и имеют конечные пределы при $x\to x_0$. Тогда:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, где C = const,

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

3. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

(в частности $\lim\limits_{x\to x_0} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$)

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

З а м е ч а н и е. Иррациональное (бесконечное) число e = 2.71828... ≈ 2.72 -

и принято за основание натуральных логарифмов: $\log_e x=\ln[.$

Часто используются следующие следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{x}=\alpha; \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e; \quad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m; \quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Функция f(x) называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Функция называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, где A - одна из величин ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные функции.

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β.

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = A, \quad A \neq 0, \quad A = const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**.

Некоторые эквивалентные бесконечно малыми функции

Факт эквивалентности бесконечно малых α и γ обозначают $\alpha \sim \gamma$.

$$\sin\alpha \sim \alpha, \quad 1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}, \quad tg\alpha \sim \alpha, \quad \arcsin\alpha \sim \alpha, \quad arctg\alpha \sim \alpha,$$

$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$, $b^\alpha - 1 \sim \alpha \ln b$, (в частности, $e^\alpha - 1 \sim \alpha$), $\sqrt[n]{1+\alpha} - 1 \sim \dfrac{\alpha}{n}$.

Данное определение особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене одной бесконечно малой величины на другую, эквивалентную ей.

Пример

Найдём предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 7x}$ Так как $tg5x \sim 5x$ и $\sin 7x \sim 7x$ при $x \to 0$,

то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 7x} = \dfrac{5}{7}.$

Раскрытие неопределенностей.

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty$$

Задача . Найти пределы

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+10}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{10}{x^2}}=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{10}{\infty^2}}=\frac{2-0}{1-0}=2$

Задача . Найти пределы

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}==\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-4}{x-6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{matrix}y=x-1\\ x\to\infty\\ y\to\infty\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}=$

$\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^4$

Непрерывность функции в точке.

Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}$, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Локальные свойства непрерывных функций**.**

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.
2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция в точке x_0 при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.
3) Суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция.

Точки разрыва, их классификация.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва первого рода***, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

Точка x_0 называется ***точкой разрыва второго рода***, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.