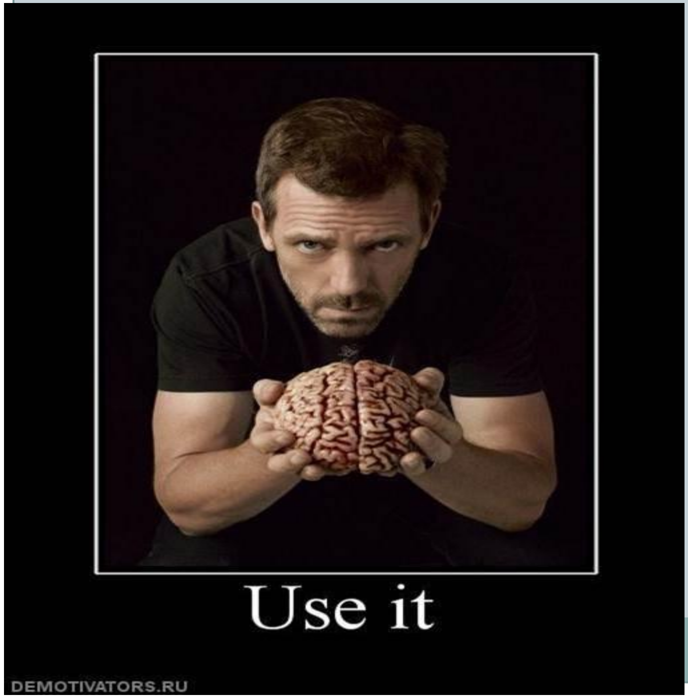
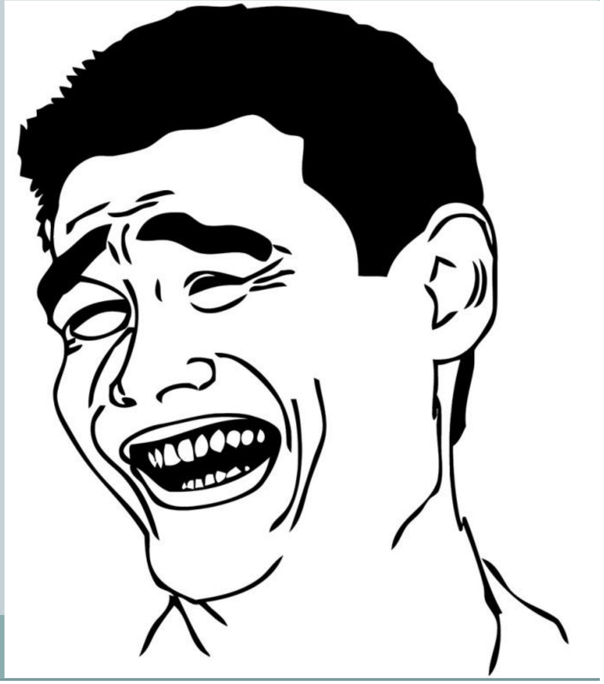
Попов Максим Александрович

Старший преподаватель кафедры высшей математики
РГУ нефти и газа имени И. М. Губкина

Семинар №1

Решение задач, возникающих в реальной жизни, с использованием теоретико-множественного подхода





Примеры операций над множествами

- Рассмотрим однократное бросание кубика

A={выпало четное количество очков}

A={2;4;6}

B={выпало хотя бы 4 очка}

B={4;5;6}

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$={2;4;5;6}

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$={4;6}

***A* \ *B*=**{2}

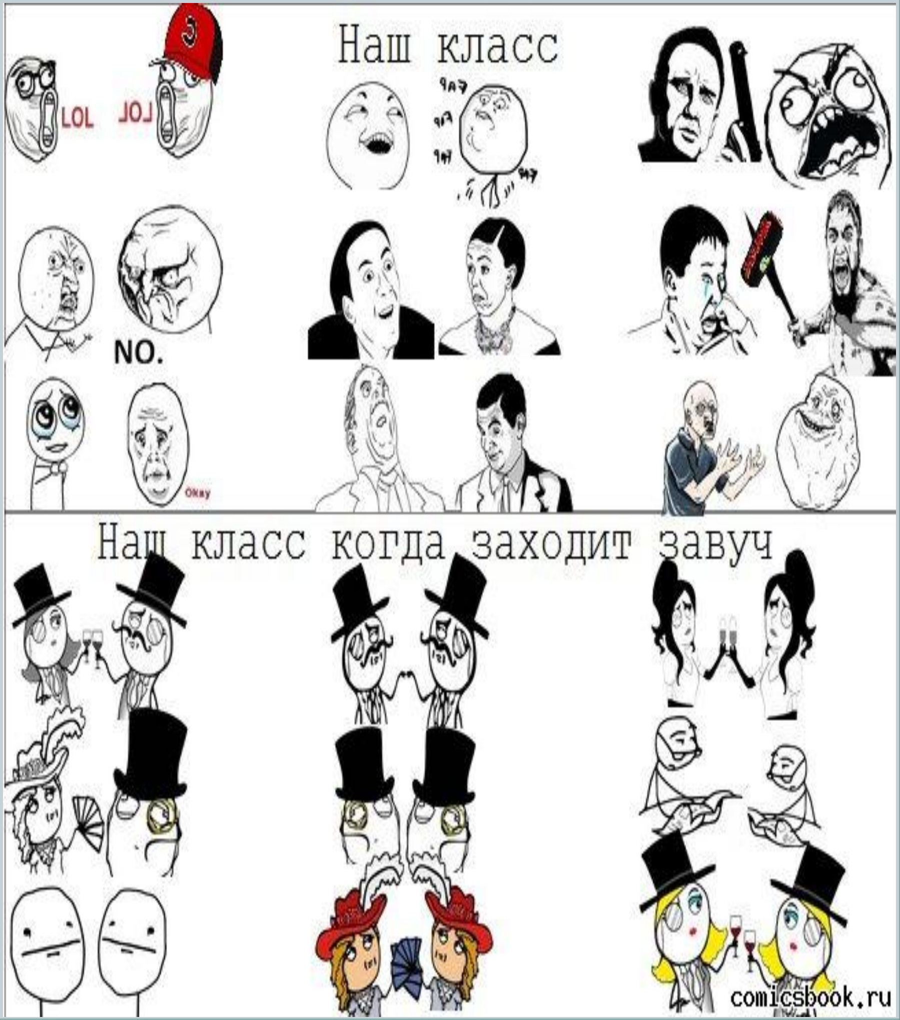
$\boldsymbol{A \Delta B}$={2;5}

Задание из ЕГЭ (Германия)

Формулировка задачи:

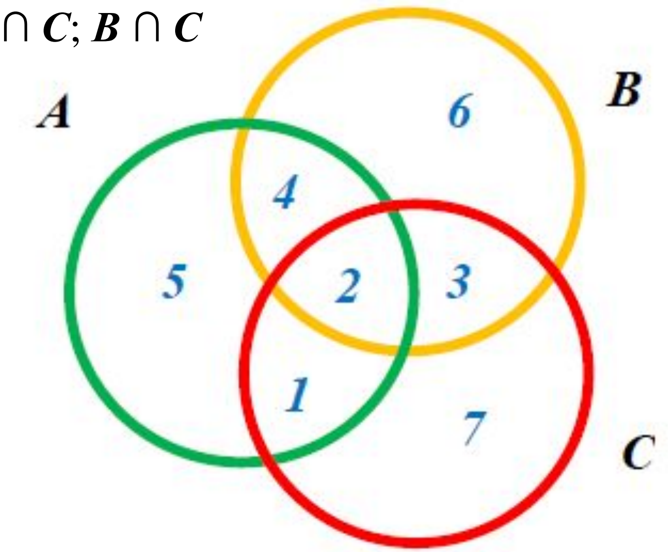
В классе 20 учеников, из которых 12 изучают биологию, 15 - историю и 2 не изучают ни биологию, ни историю. Сколько учеников изучает и биологию и историю?

Ответ: 9

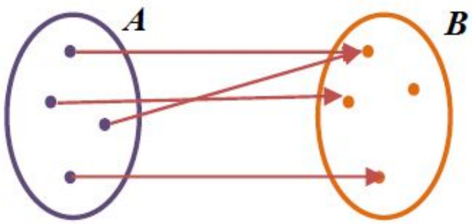


Основные тождества теории множеств

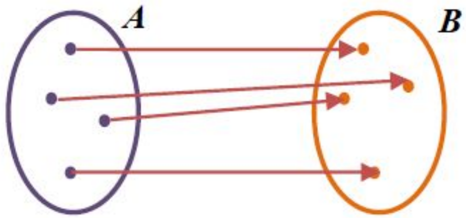
- Коммутативность объединения и пересечения $A \cup B = B \cup A;\ A \cap B = B \cap A$
- Дистрибутивность объединения и пересечения
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Взаимная дистрибутивность объединения и пересечения
  $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$
- Формальное доказательство взаимной дистрибутивности (1-го тождества)
- Пусть $x \in (A \cup B) \cap C$ Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in C$
- Значит, x принадлежит хотя бы одному из множеств $A; B$ и принадлежит C
- Тогда x принадлежит хотя бы одному из множеств $A \cap C$; $B \cap C$
- Значит, x принадлежит правой части тождества
- Доказали ли мы формулу?
- **НЕТ!**
- В обратную сторону устно.
- Геометрическое доказательство:
- Принцип двойственности
  $S \setminus (A_1 \cup A_2) = (S \setminus A_1) \cap (S \setminus A_2)$
  $S \setminus (A_1 \cap A_2) = (S \setminus A_1) \cup (S \setminus A_2)$



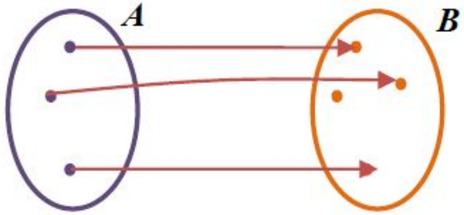
Отображения множеств



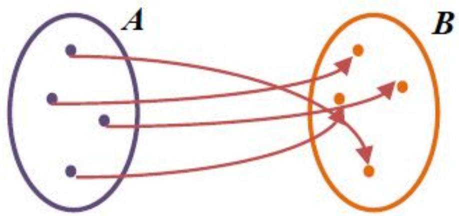
- Отображение $f: A \to B$ - это правило, которое каждому элементу множества A ставит в соответствие один и только один элемент множества B
- Если $f(A) = B$, то f называется **сюръекцией**



- Если для $x_1 , x_2 \in A$, таких что $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$, то f называется **инъекцией**
- Если f инъекция и сюръекция, то такое отображение называется **биекцией**
- Множества называются **равномощными**, если между ними существует биекция



- Теорема: Для всякого множества A множество $P(A)$ его подмножеств не равномощно самому множеству A
- Доказательство: Предложим, $\exists$ биекция $f : A \to P(A)$
- $a \in A$ назовём «хорошим», если $a \in f(a)$ и «плохим», если $a \notin f(a)$



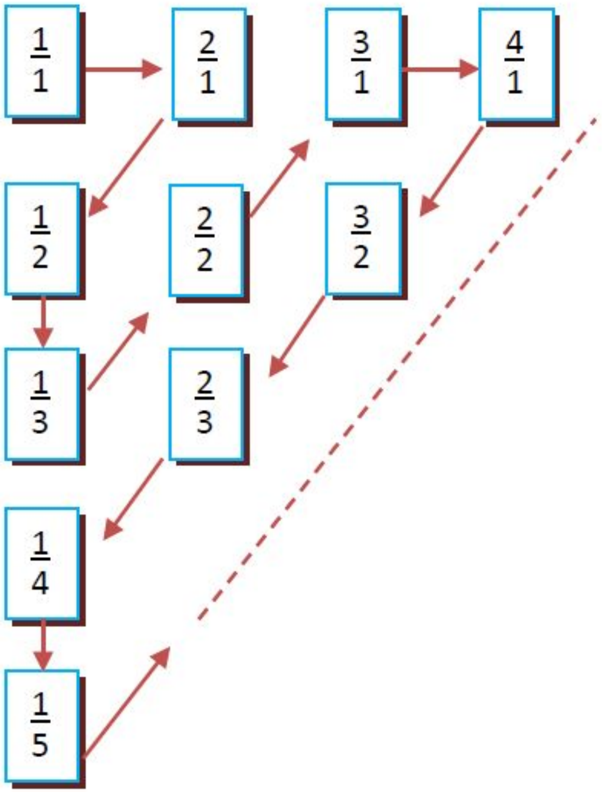
- Пусть $П \subset A$ - множество всех плохих элементов. Так как f- биекция, то $\exists$ $x \in A$, такой что $f(x) = П$. x – хороший или плохой?
- Если x - хороший, то $x \in f(x) = П$ - противоречие
- Если x - плохой, то $x \notin f(x) = П \Rightarrow x$ - хороший, противоречие Теорема доказана.

Счётность ℚ и несчётность ℝ

- Множество A называется счётным, если $\exists$ биекция $f: A \to \mathbb{N}$
  - ℤ счётно

0	-1	1	-2	2	…
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	…

- ℚ счётно

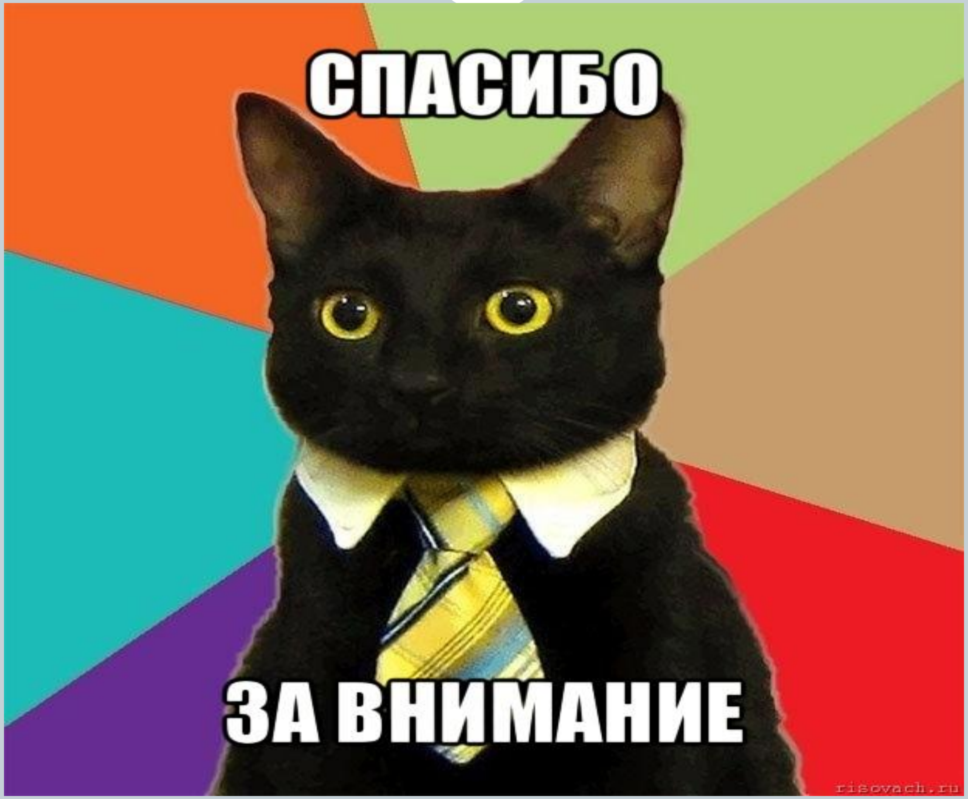


- ℝ несчётно

$x_1 = A, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots$
$x_2 = B, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots$
$x_3 = C, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \dots$

$\overline{a} = \{1$, если $a \neq 1$; 2, если $a = 1\}$
$y = 0, \overline{\alpha_1}\, \overline{\beta_2}\, \overline{\gamma_3} \dots$
$y \notin \{ x_1; x_2; x_3 \dots \}$

ВНИМАНИЕ!



Хотелось бы сказать огромное СПАСИБО следующим людям за следующие книжки:

1) Ященко Ивану Валерьевичу, «Парадоксы теории множеств»

2) Болибруху Андрею Андреевичу (светлая память!), «Проблемы Гильберта (100 лет спустя)»