

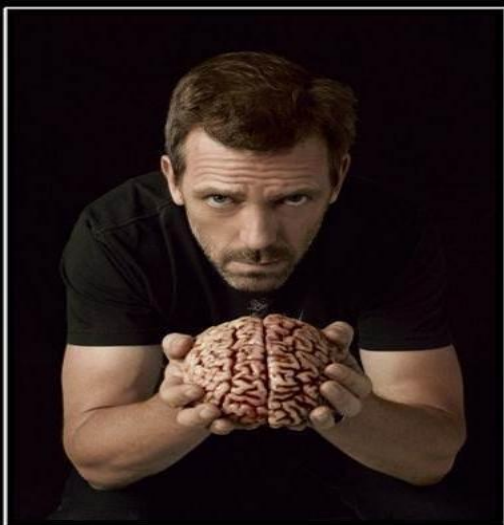
# Попов Максим Александрович

Старший преподаватель кафедры высшей математики  
РГУ нефти и газа имени И. М. Губкина

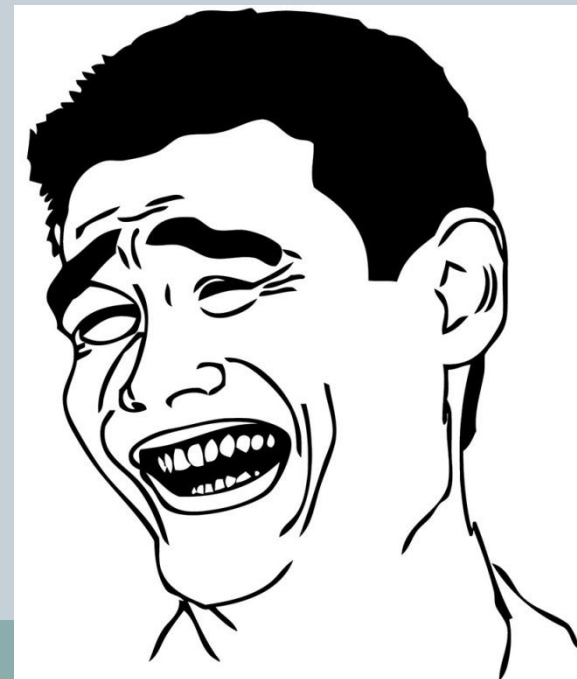
Семинар №1



**Решение задач, возникающих в реальной жизни, с использованием теоретико-множественного подхода**



Use it



# Примеры операций над множествами

Рассмотрим однократное бросание кубика

$A = \{\text{выпало четное количество очков}\}$

$A = \{2; 4; 6\}$

$B = \{\text{выпало хотя бы 4 очка}\}$

$B = \{4; 5; 6\}$

$A \cup B = \{2; 4; 5; 6\}$

$A \cap B = \{4; 6\}$

$A \setminus B = \{2\}$

$A \Delta B = \{2; 5\}$

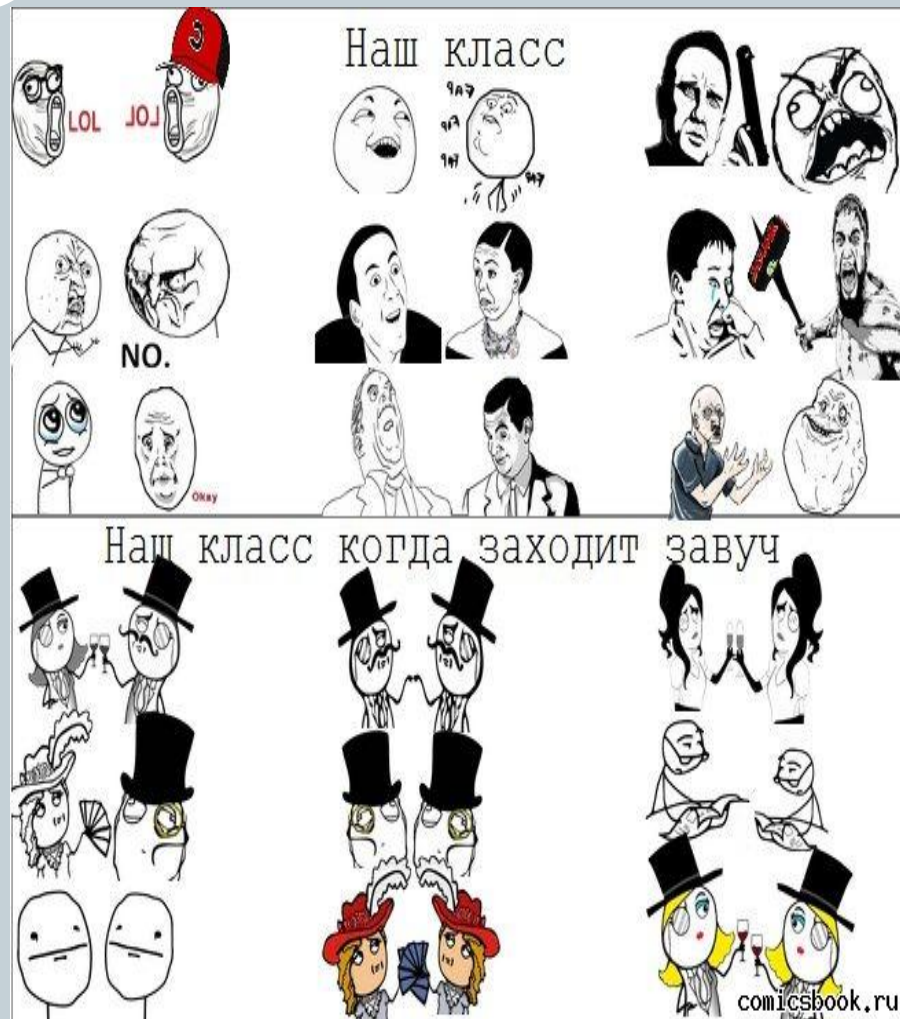


# Задание из ЕГЭ (Германия)

Формулировка задачи:

В классе 20 учеников, из которых 12 изучают биологию, 15 - историю и 2 не изучают ни биологию, ни историю. Сколько учеников изучает и биологию и историю?

Ответ: 9

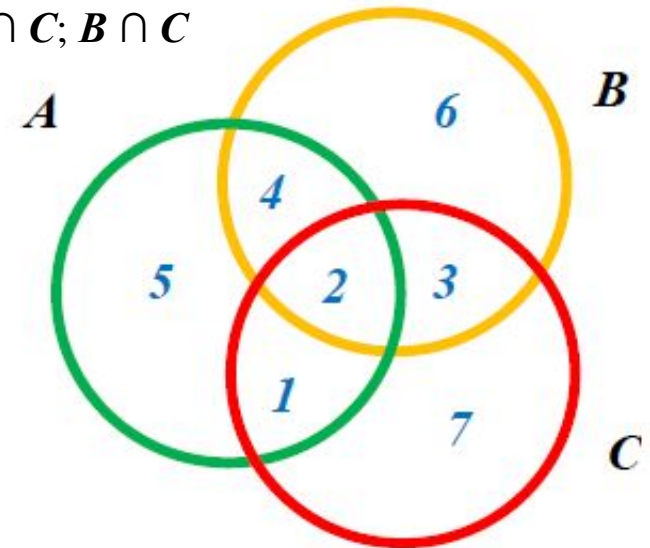


# Основные тождества теории

## множеств



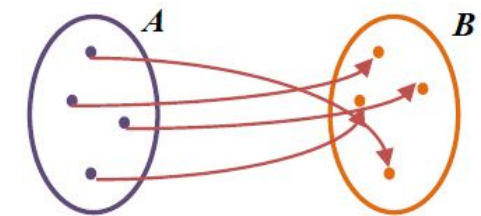
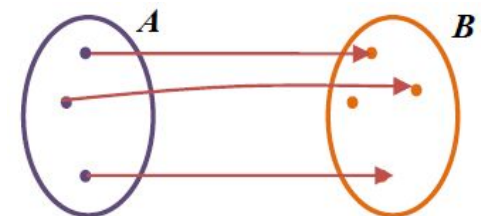
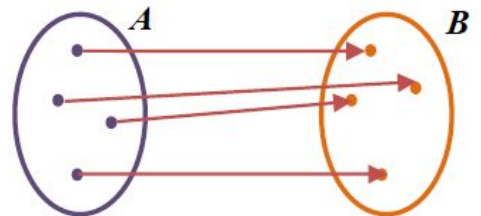
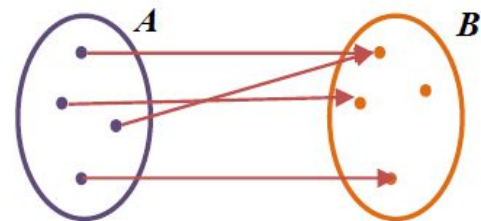
- Коммутативность объединения и пересечения  $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$
- Дистрибутивность объединения и пересечения  
 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ;  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- Взаимная дистрибутивность объединения и пересечения  
 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ;  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- **Формальное доказательство взаимной дистрибутивности (1-го тождества)**
- Пусть  $x \in (A \cup B) \cap C$  Тогда  $x \in A \cup B$  и  $x \in C$
- Значит,  $x$  принадлежит хотя бы одному из множеств  $A$ ;  $B$  и принадлежит  $C$
- Тогда  $x$  принадлежит хотя бы одному из множеств  $A \cap C$ ;  $B \cap C$
- Значит,  $x$  принадлежит правой части тождества
- Доказали ли мы формулу?
- **НЕТ!**
- В обратную сторону устно.
- **Геометрическое доказательство:**
- Принцип двойственности  
 $S \setminus (A_1 \cup A_2) = (S \setminus A_1) \cap (S \setminus A_2)$   
 $S \setminus (A_1 \cap A_2) = (S \setminus A_1) \cup (S \setminus A_2)$



# Отображения множеств



- Отображение  $f: A \rightarrow B$  - это правило, которое каждому элементу множества  $A$  ставит в соответствие один и только один элемент множества  $B$
  - Если  $f(A) = B$ , то  $f$  называется **сюръекцией**
  - Если для  $x_1, x_2 \in A$ , таких что  $x_1 \neq x_2$ ,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , то  $f$  называется **инъекцией**
  - Если  $f$  инъекция и сюръекция, то такое отображение называется **биекцией**
  - Множества называются **равномощными**, если между ними существует биекция
  - **Теорема:** Для всякого множества  $A$  множество  $P(A)$  его подмножеств не равномощно самому множеству  $A$
  - **Доказательство:** Предложим,  $\exists$  биекция  $f: A \rightarrow P(A)$
  - $a \in A$  назовём «хорошим», если  $a \in f(a)$  и «плохим», если  $a \notin f(a)$
  - Пусть  $\Pi \subset A$  - множество всех плохих элементов. Так как  $f$  - биекция, то  $\exists x \in A$ , такой что  $f(x) = \Pi$ .  $x$  - хороший или плохой?
  - Если  $x$  - хороший, то  $x \in f(x) = \Pi$  - противоречие
  - Если  $x$  - плохой, то  $x \notin f(x) = \Pi \Rightarrow x$  - хороший, противоречие
- Теорема доказана.**



# Счётность $\mathbb{Q}$ и несчётность $\mathbb{R}$



- Множество  $A$  называется счётным, если  $\exists$  биекция  $f: A$

→  $\mathbb{N}$   
●  $\mathbb{Z}$  счётно

0	-1	1	-2	2	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	...

- $\mathbb{R}$  несчётно

$$x_1 = A, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots$$

$$x_2 = B, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots$$

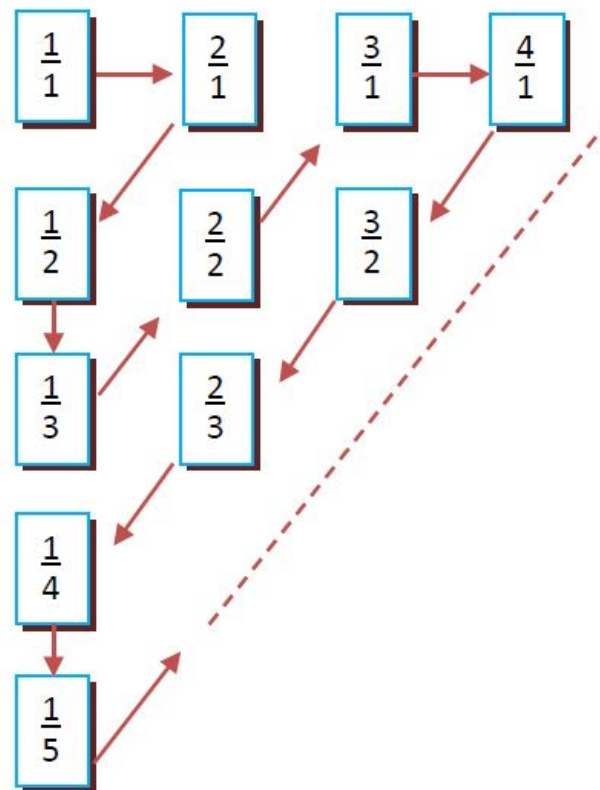
$$x_3 = C, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \dots$$

$$\bar{a} = \{1, \text{если } a \neq 1; 2, \text{если } a =$$

$$1\} = 0, \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_3 \dots$$

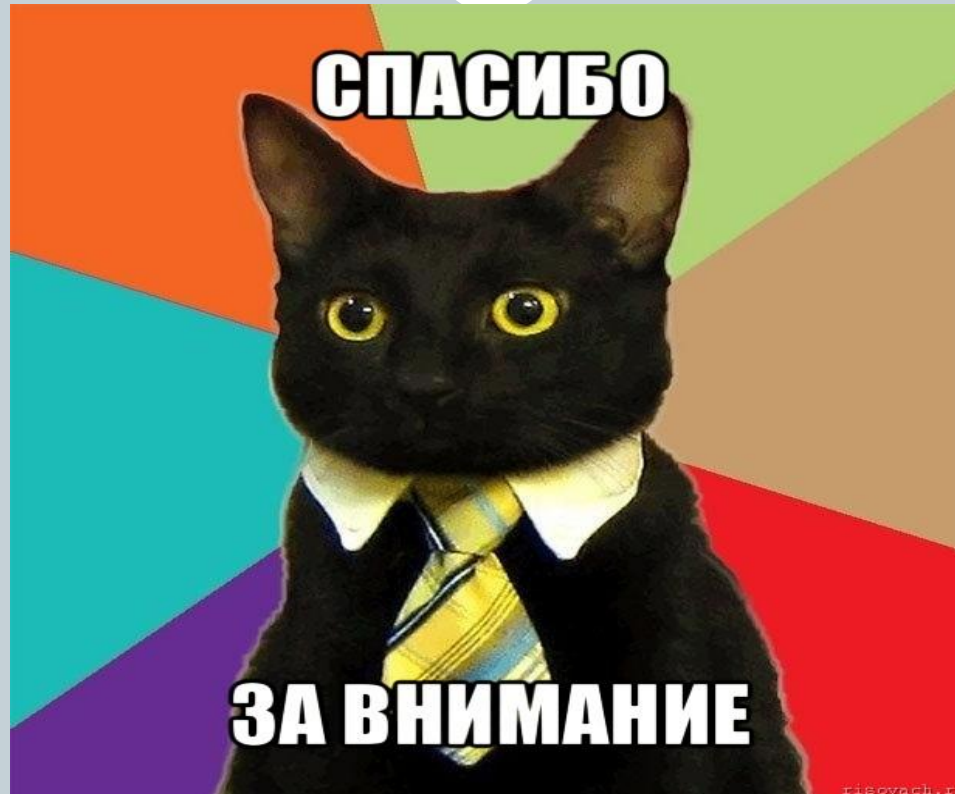
$$y \notin \{x_1; x_2; x_3 \dots\}$$

- $\mathbb{Q}$  счётно





# ВНИМАНИЕ!



Хотелось бы сказать огромное **СПАСИБО** следующим людям за следующие книжки:

- 1) **Яценко Ивану Валерьевичу**, «Парадоксы теории множеств»
- 2) **Болибруху Андрею Андреевичу** (светлая память!), «Проблемы Гильберта (100 лет спустя)»