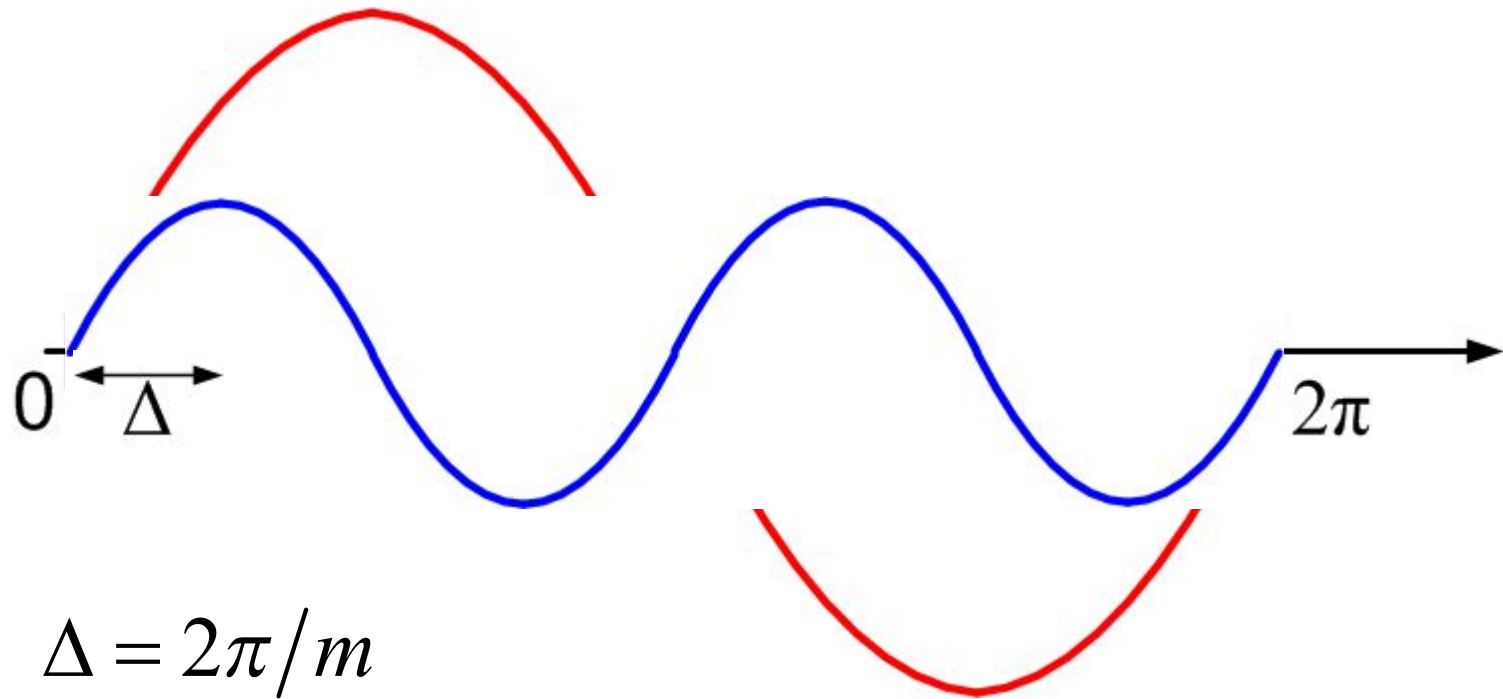


# Определение коэффициентов ряда Фурье



$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d\omega t \approx \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m f(n\Delta);$$

$$B_k \approx \frac{2}{m} \sum_{n=1}^m f(n\Delta) \sin(kn\Delta); \quad (4)$$

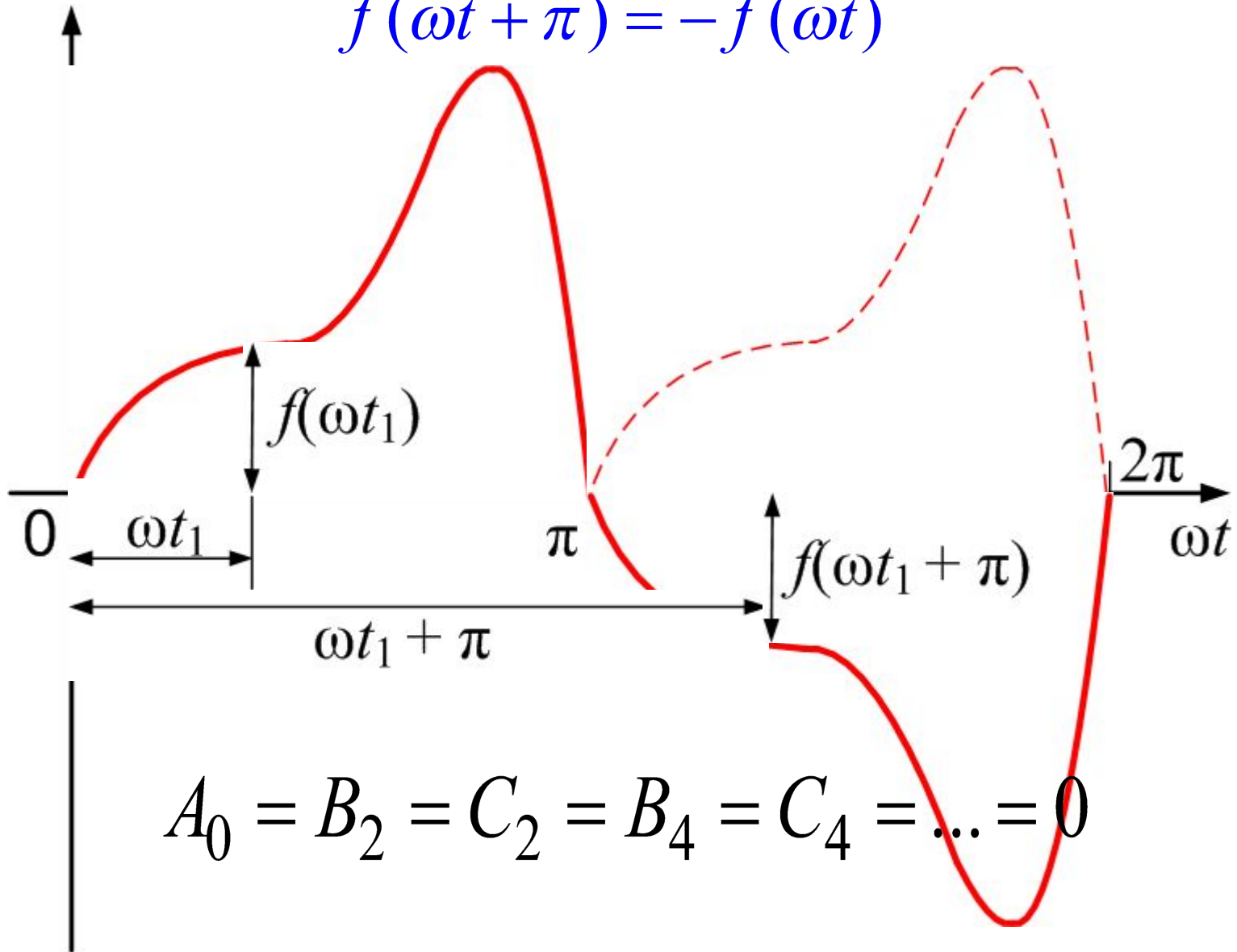
$$C_k \approx \frac{2}{m} \sum_{n=1}^m f(n\Delta) \cos(kn\Delta);$$

$$k = 1, 2, \dots$$

# Свойства периодических несинусоидальных функций, обладающих симметрией

# Симметрия относительно оси абсцисс

$$f(\omega t + \pi) = -f(\omega t)$$



$$A_0 = B_2 = C_2 = B_4 = C_4 = \dots = 0$$

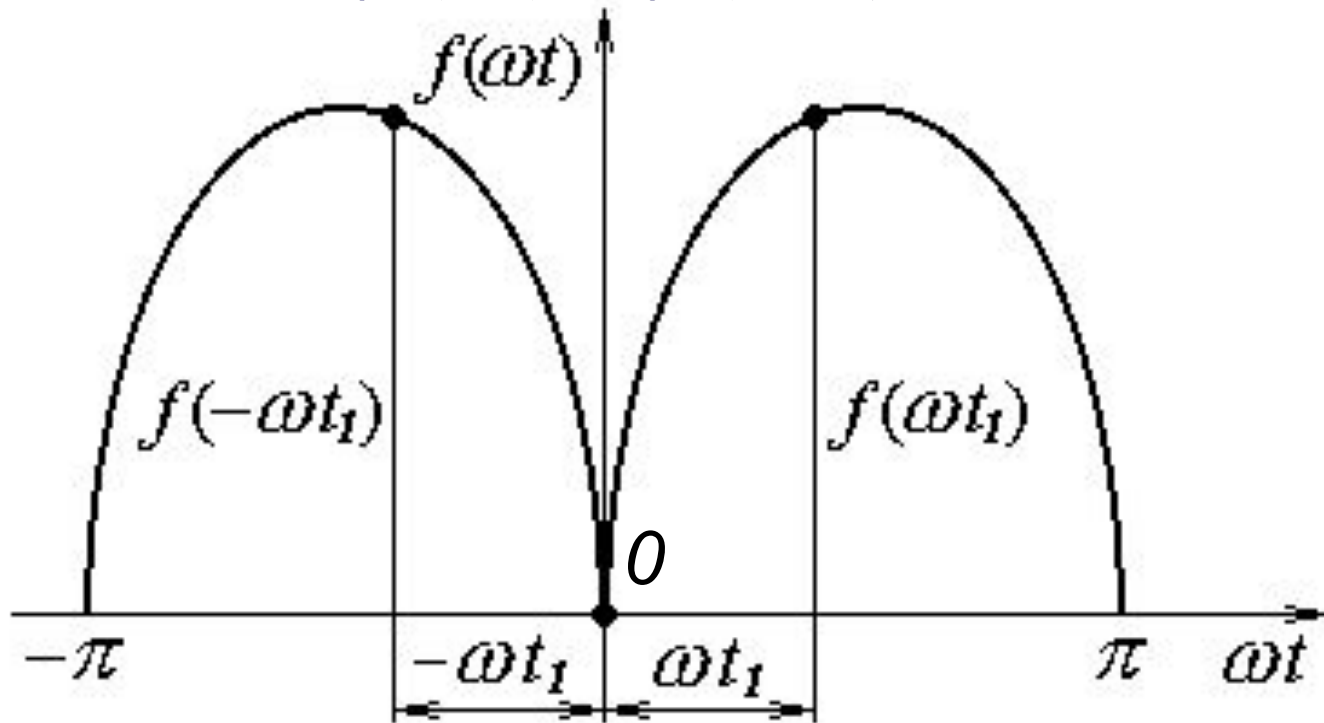
## Симметрия относительно **оси абсцисс**

$$f(\omega t) = B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + B_3 \sin 3\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \\ + B_5 \sin 5\omega t + C_5 \cos 5\omega t + \dots;$$

$$f(\omega t) = A_{1m} \sin(\omega t + \Psi_1) + A_{3m} \sin(3\omega t + \Psi_3) + \\ + A_{5m} \sin(5\omega t + \Psi_5) + \dots$$

# Симметрия относительно оси ординат (четная)

$$f(\omega t) = f(-\omega t)$$



$$B_1 = B_2 = B_3 = \dots = 0$$

Симметрия относительно **оси ординат** (четная)

$$f(\omega t) = A_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots$$

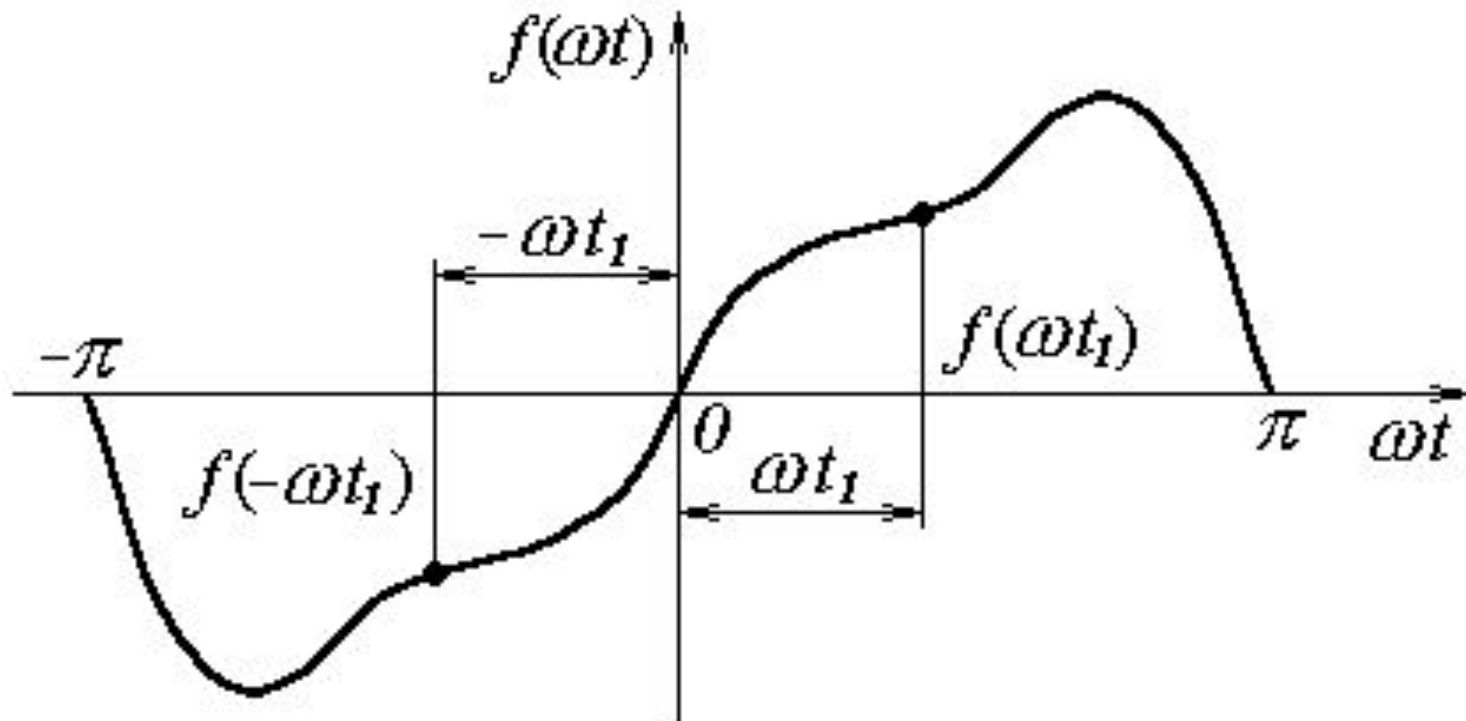
$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega t$$

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin \left( k\omega t \pm \frac{\pi}{2} \right).$$



# Симметрия относительно начала координат (нечетная)

$$f(\omega t) = -f(-\omega t)$$



$$A_0 = C_1 = C_2 = C_3 = \dots = 0$$

Симметрия относительно **начала координат** (нечетная)

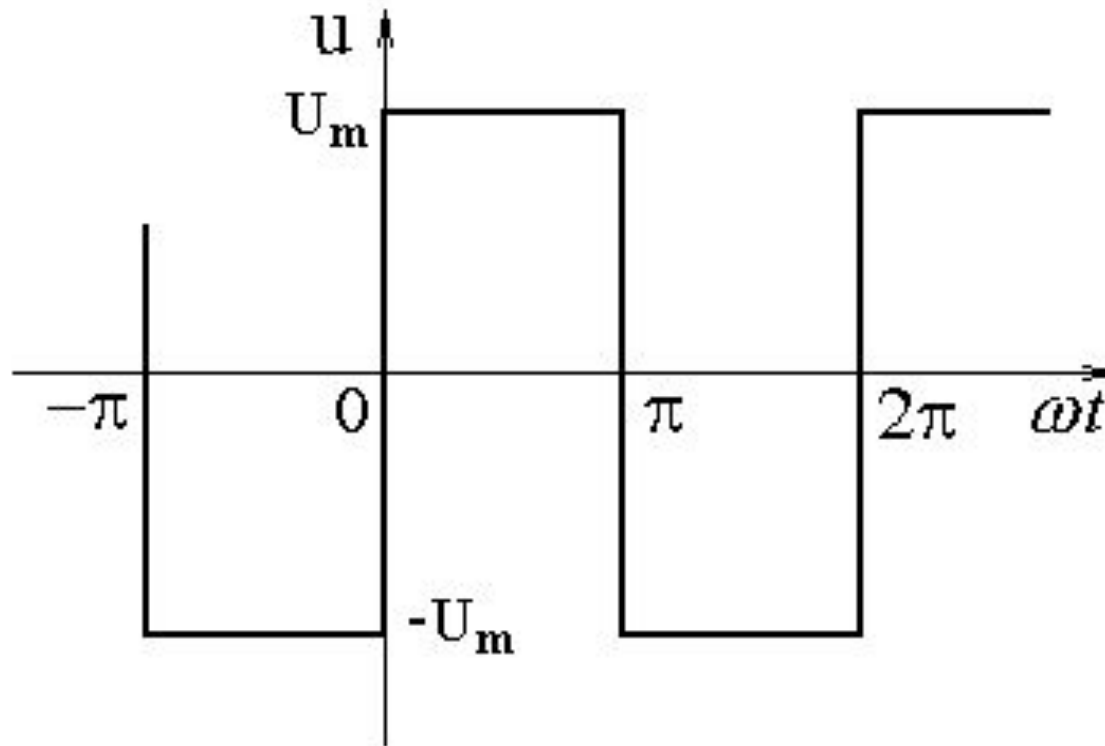
$$f(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots$$

$$f(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t).$$

$$f(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \Psi_k), \quad \Psi_k =$$

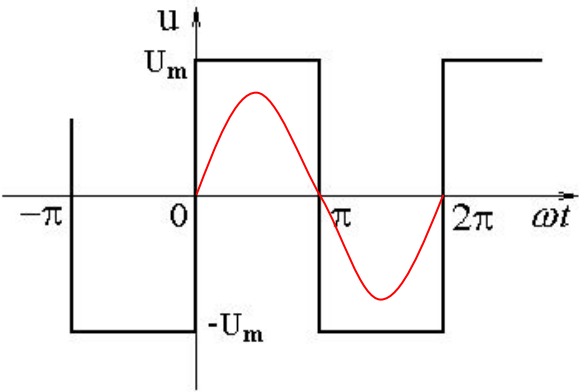
○

## Пример аналитического определения коэффициентов ряда Фурье



Периодическое несинусоидальное напряжение

$$f(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_3 \sin 3\omega t + B_5 \sin 5\omega t + \dots$$

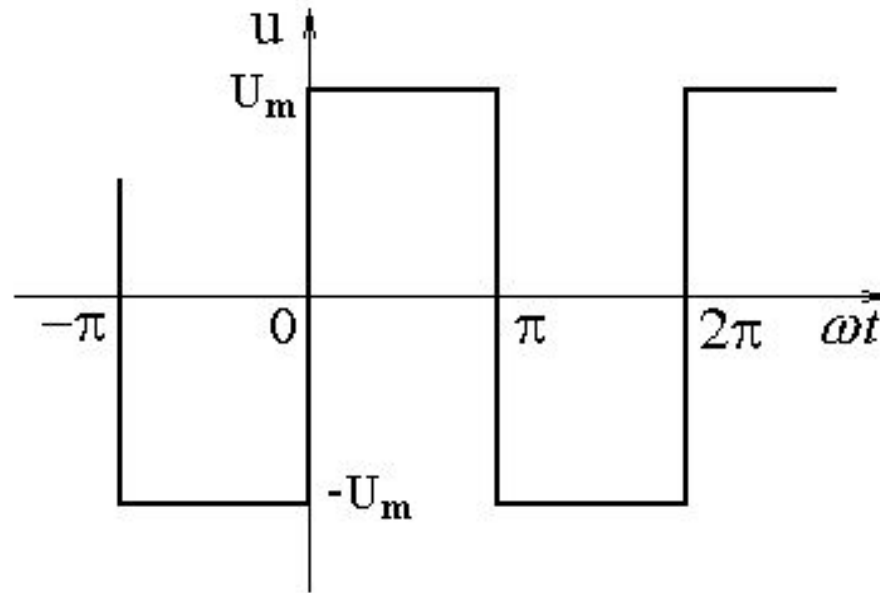


$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \sin k\omega t d\omega t =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_m \sin k\omega t d\omega t + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-U_m) \sin k\omega t d\omega t =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U_m \sin k\omega t d\omega t = \frac{2U_m}{\pi} \frac{(-\cos k\omega t)}{k} \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2U_m}{\pi k} (1 + 1) = \frac{4U_m}{\pi k}.$$



Функция  $u(\omega t)$  описывается рядом:

$$u = \frac{4U_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right).$$

## Пример приближенного определения коэффициентов ряда Фурье

$$\Delta = \frac{2\pi}{m}$$

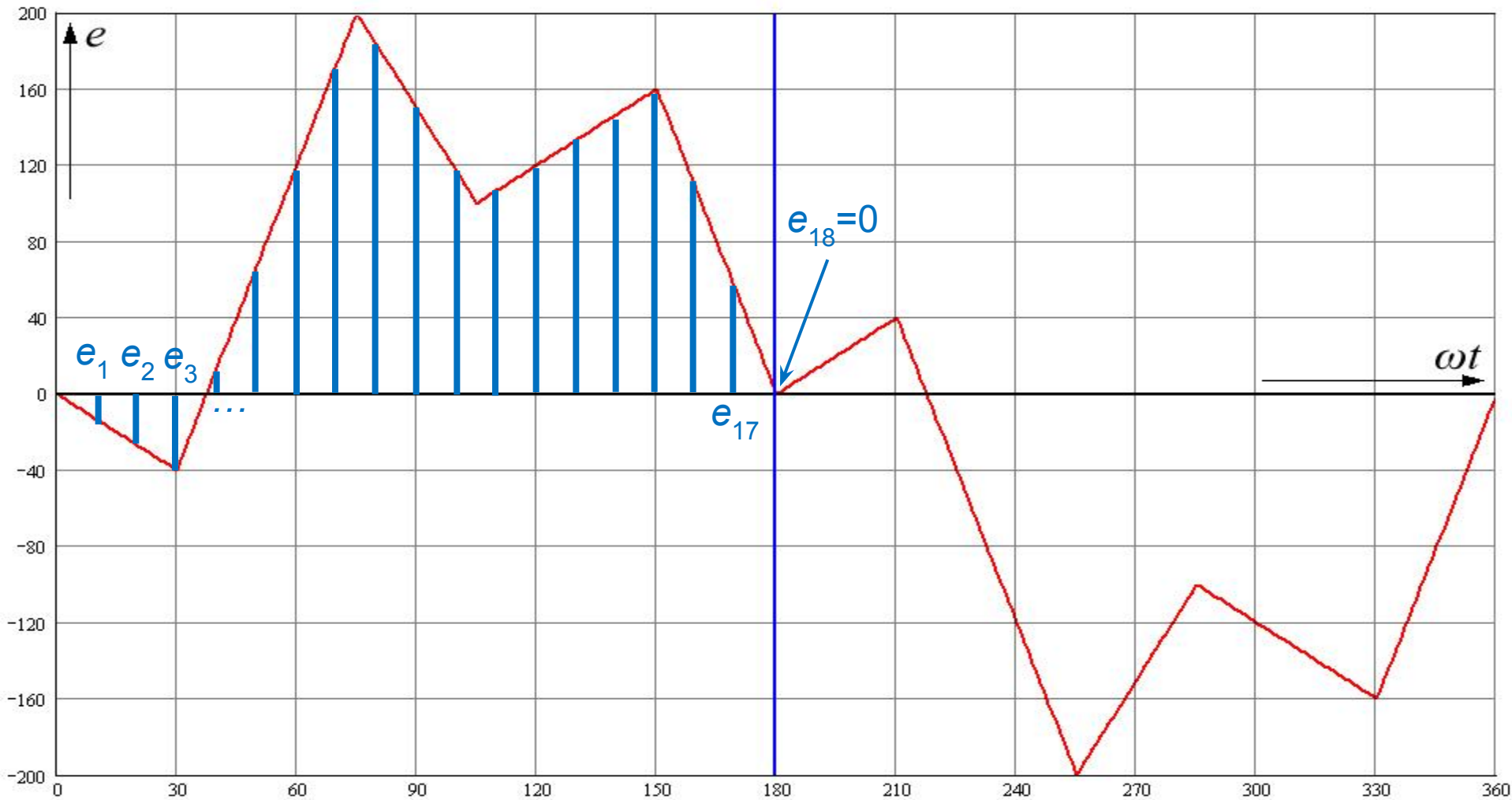
$$A_0 \approx \frac{2}{m} \sum_{n=1}^{m/2} f(n\Delta);$$

$$B_k \approx \frac{4}{m} \sum_{n=1}^{m/2} f(n\Delta) \sin(kn\Delta);$$

$$C_k \approx \frac{4}{m} \sum_{n=1}^{m/2} f(n\Delta) \cos(kn\Delta).$$



$$\frac{m}{2} = 18; \quad \Delta = \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{18} = 10^\circ;$$



$$A_0 \approx \frac{1}{18} \sum_{n=1}^{18} e(n10^\circ);$$

$$B_k \approx \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{18} e(n10^\circ) \sin(kn10^\circ);$$

$$C_k \approx \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{18} e(n10^\circ) \cos(kn10^\circ).$$

В нашем примере  $A_0=0$ ,  $B_k$  и  $C_k$  – только нечетные.

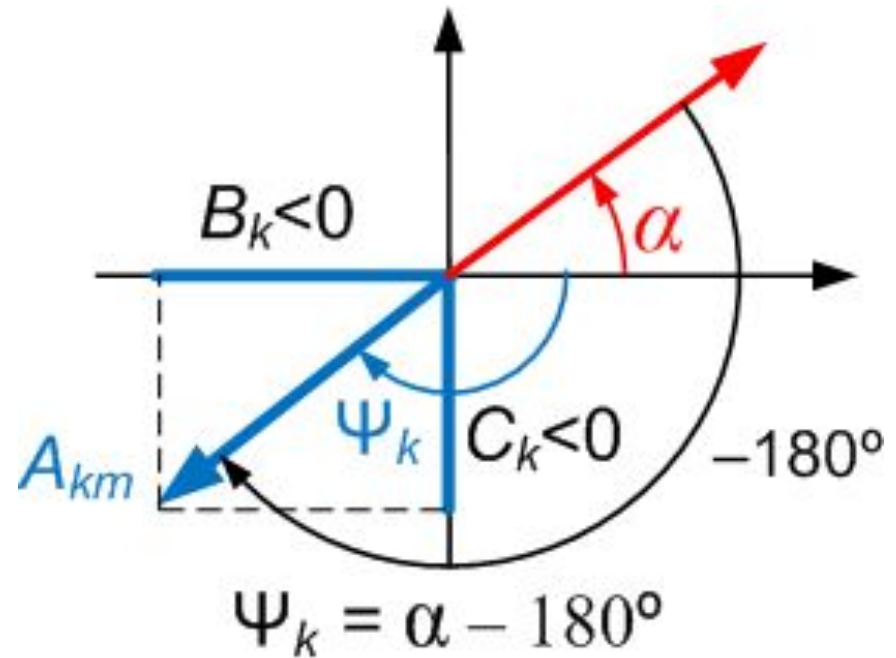
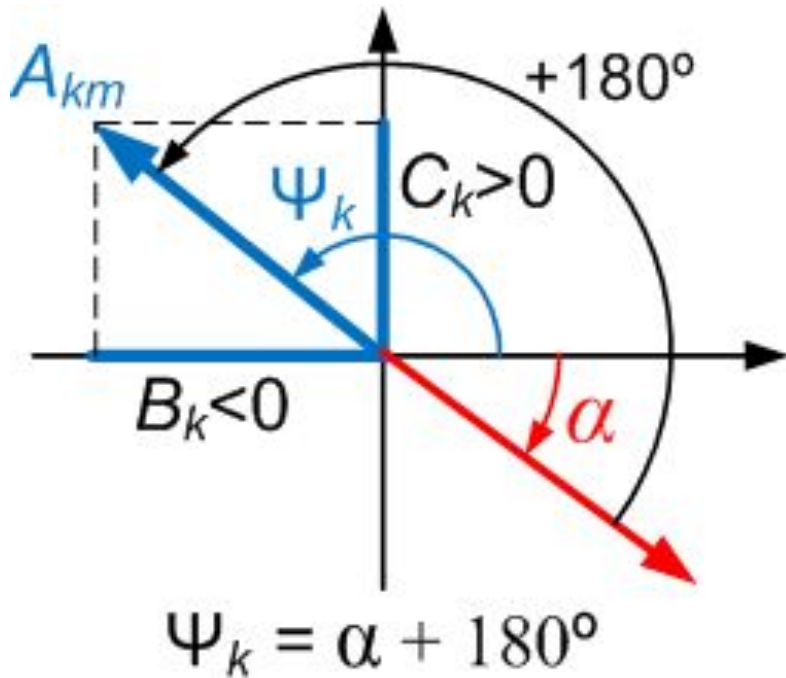
## Расчет коэффициентов $B_k$ и $C_k$

$\alpha = n10^\circ$	$e(\alpha)$	$k\alpha$	$\sin(k\alpha)$	$\cos(k\alpha)$	$e(\alpha) \cdot \sin(k\alpha)$	$e(\alpha) \cdot \cos(k\alpha)$
10°	<div style="border: 2px solid red; border-radius: 50%; padding: 10px; display: inline-block;"> <p style="color: blue; margin: 0;">по графику <math>e(\omega t)</math></p> </div>	10°	0,1736	0,9848		
20°		20°	0,3420	0,9397		
...		...	...	...		
180°		180°	0	-1		
$A_0 = \frac{\sum^{\uparrow}}{18}$		<p>при <math>k = 1</math></p>			$B_1 = \frac{\sum^{\uparrow}}{9}$	$C_1 = \frac{\sum^{\uparrow}}{9}$

$\alpha = n10^\circ$	$e(\alpha)$	$k\alpha$	$\sin(k\alpha)$	$\cos(k\alpha)$	$e(\alpha) \cdot \sin(k\alpha)$	$e(\alpha) \cdot \cos(k\alpha)$
10°	<p>по графику</p>	20°	0,3420	0,9397		
20°		40°	0,6428	0,7660		
...		...	...	...		
180°		360°	0	1		
<p>при <math>k = 2</math></p>					$B_2 = \frac{\sum^{\uparrow}}{9}$	$C_2 = \frac{\sum^{\uparrow}}{9}$

$$A_{km} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2};$$

$$\Psi_k = \arctg \frac{C_k}{B_k} = \arctg \frac{\sin \Psi_k}{\cos \Psi_k}.$$



Если  $B_k < 0$ , то к углу  $\alpha$ , полученному на калькуляторе, необходимо прибавить  $\pm 180^\circ$ !!!

$$e = 51 \sin(\omega t - 20^\circ) + 17 \sin(3\omega t + 224^\circ) + 52 \sin(5\omega t + 88^\circ),$$



## Действующее значение несинусоидальной функции

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}.$$

$$\begin{aligned} i &= I_0 + i_1 + i_2 + \dots = \\ &= I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots \end{aligned}$$

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \alpha_k) + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{p=0 \\ q=0}}^{\infty} I_{pm} I_{qm} \sin(p\omega t + \alpha_p) \sin(q\omega t + \alpha_q) \right] dt, \quad (p \neq q).$$

$$\int_0^T \sin^2(k\omega t + \alpha_k) dt = \frac{T}{2},$$

$$\int_0^T \sin(p\omega t + \alpha_p) \sin(q\omega t + \alpha_q) dt = 0, \quad (p \neq q),$$

$$I^2 = I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \dots \quad I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \dots}$$

$$I_{km} = \sqrt{2}I_k \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}$$

Аналогично:

$$E = \sqrt{E_0^2 + \frac{E_{1m}^2}{2} + \frac{E_{2m}^2}{2} + \dots} = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \dots},$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1m}^2}{2} + \frac{U_{2m}^2}{2} + \dots} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}.$$