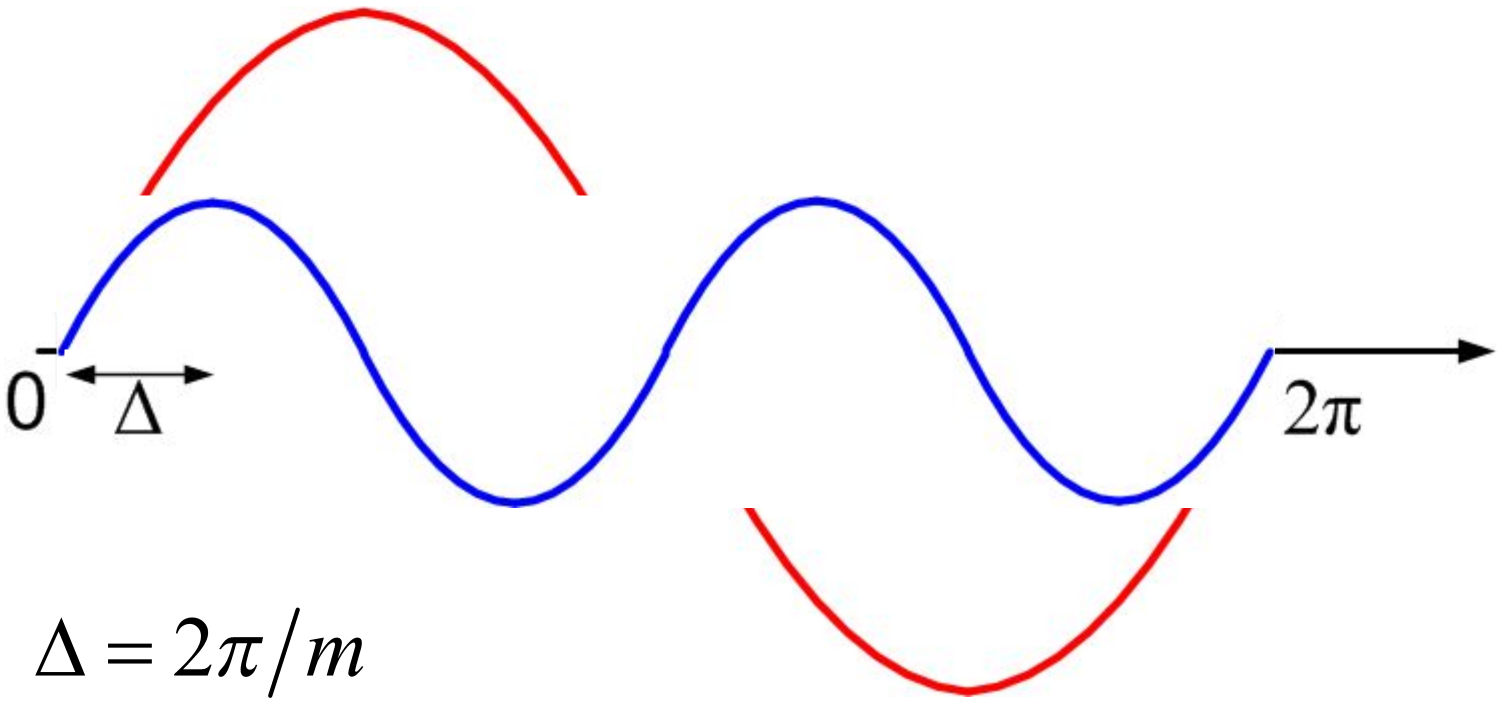
Определение коэффициентов ряда Фурье



$$\Delta = 2\pi / m$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)d\omega t \approx \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} f(n\Delta);$$

$$B_k \approx \frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m} f(n\Delta)\sin(kn\Delta); \qquad (4)$$

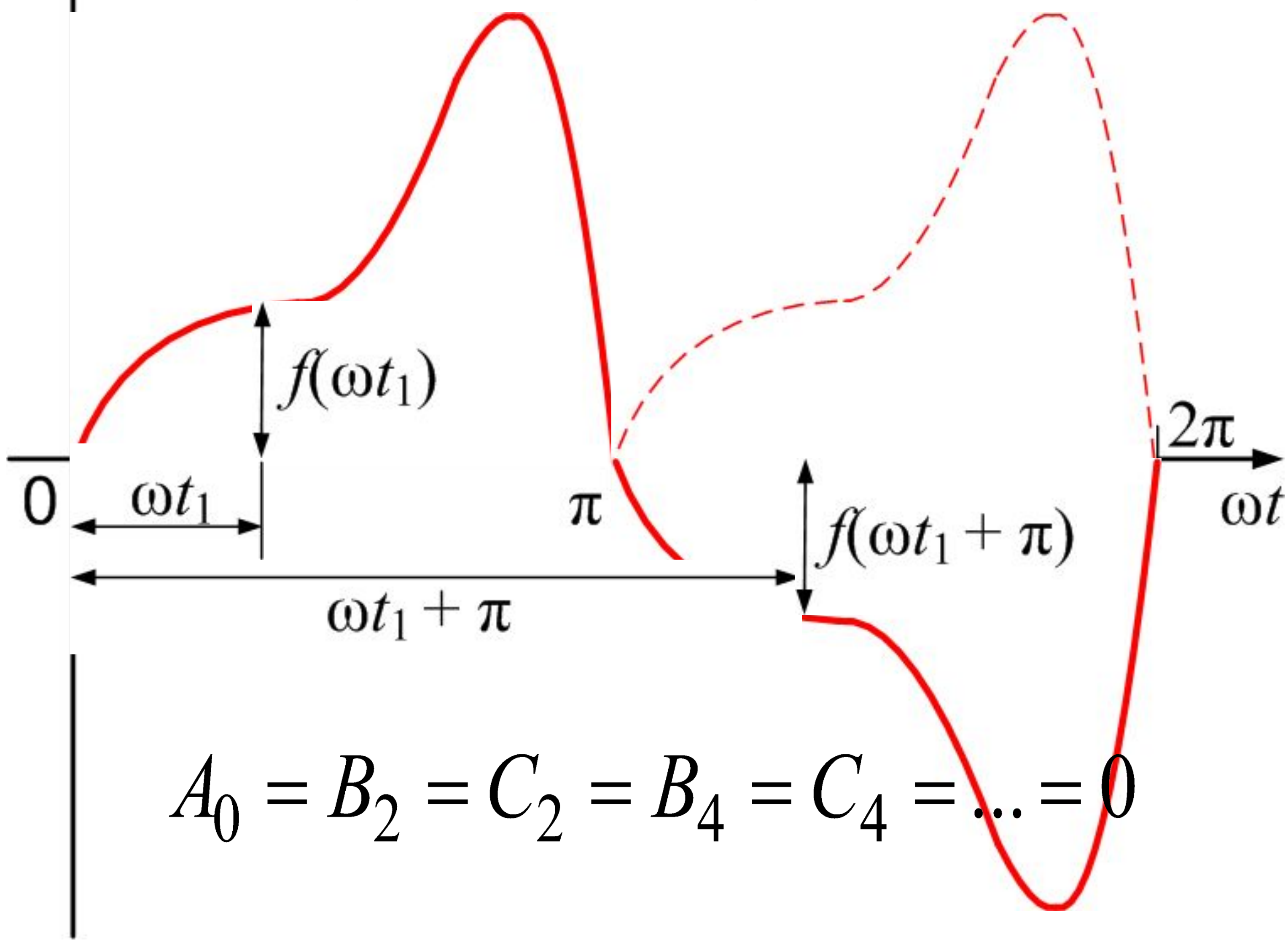
$$C_k \approx \frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m} f(n\Delta)\cos(kn\Delta);$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Свойства
периодических несинусоидальных функций, обладающих симметрией

Симметрия относительно **оси абсцисс**

$$f(\omega t+\pi)=-f(\omega t)$$



$$A_0=B_2=C_2=B_4=C_4=\ldots=0$$

Симметрия относительно **оси абсцисс**

$$f(\omega t) = B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + B_3 \sin 3\omega t + C_3 \cos 3\omega t +$$

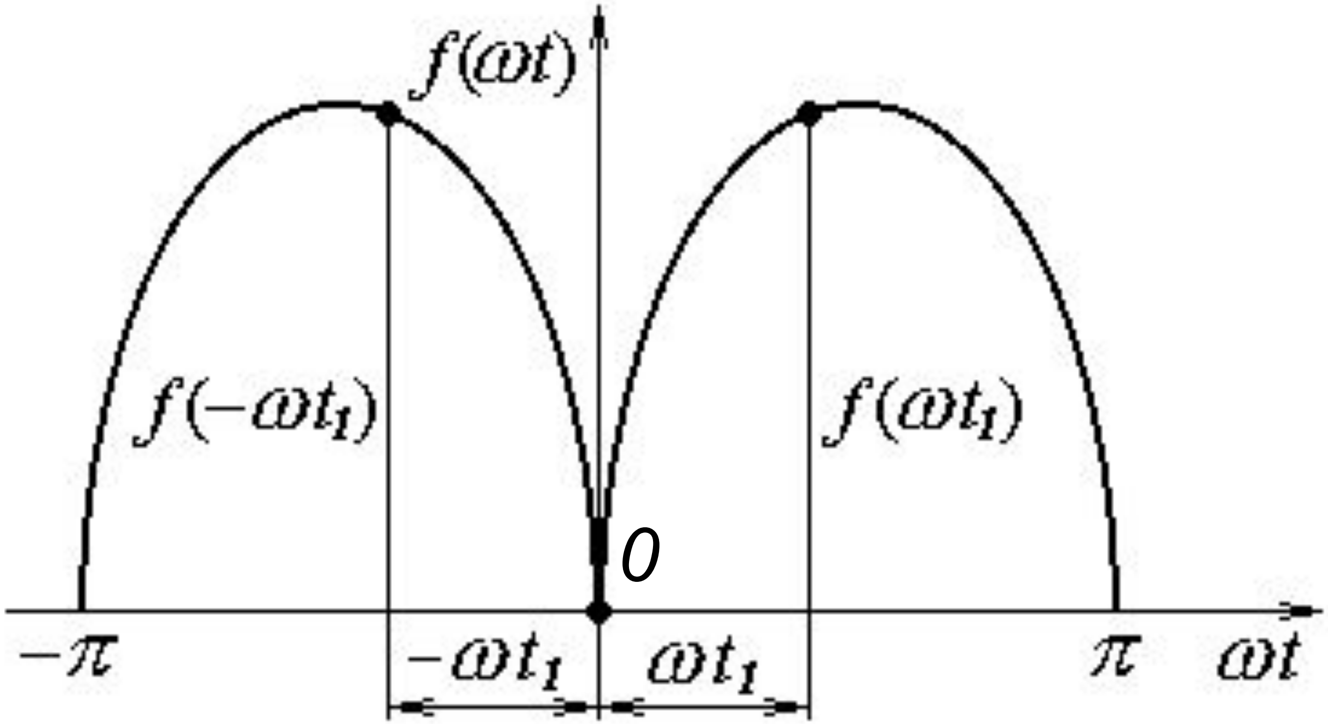
$$+ B_5 \sin 5\omega t + C_5 \cos 5\omega t + \ldots;$$

$$f(\omega t) = A_{1m} \sin\left(\omega t + \Psi_1\right) + A_{3m} \sin\left(3\omega t + \Psi_3\right) +$$

$$+ A_{5m} \sin\left(5\omega t + \Psi_5\right) + \ldots$$

Симметрия относительно **оси ординат** (четная)

$$f(\omega t) = f(-\omega t)$$



$$B_1 = B_2 = B_3 = \ldots = 0$$

Симметрия относительно **оси ординат** (четная)

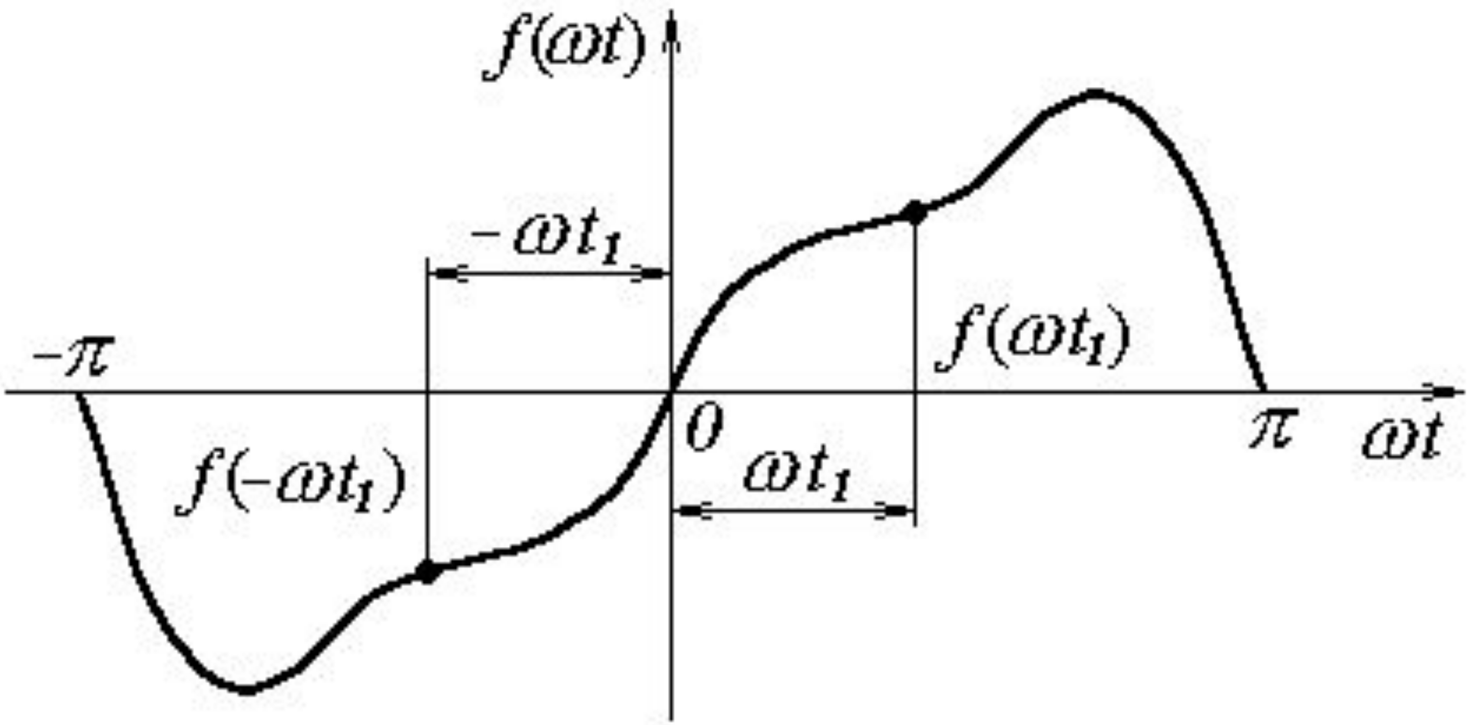
$$f(\omega t) = A_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \ldots$$

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega t$$

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin\left(k\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

Симметрия относительно **начала координат** (нечетная)

$$f(\omega t) = -f(-\omega t)$$



$$A_0 = C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = 0$$

Симметрия относительно **начала координат** (нечетная)

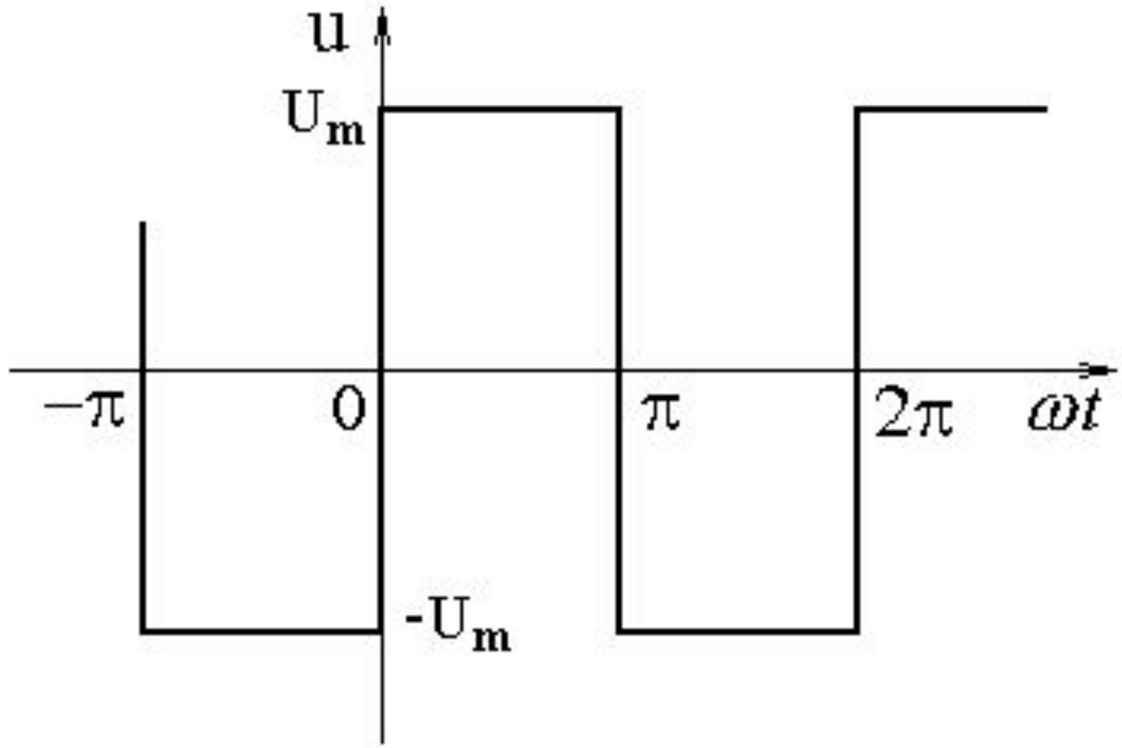
$$f(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \ldots$$

$$f(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t).$$

$$f(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \Psi_k),$$

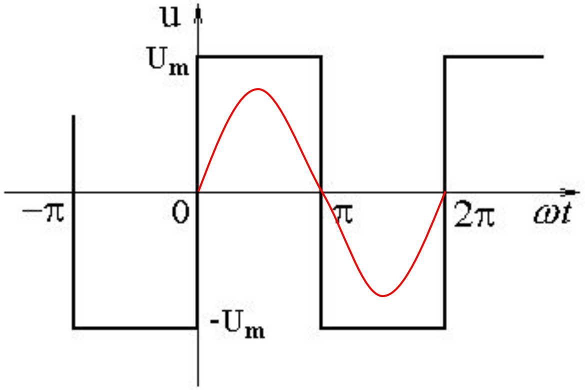
где $\Psi_k = 0$ или 180°

Пример аналитического определения коэффициентов ряда Фурье



Периодическое несинусоидальное напряжение

$$f(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_3 \sin 3\omega t + B_5 \sin 5\omega t + \ldots$$

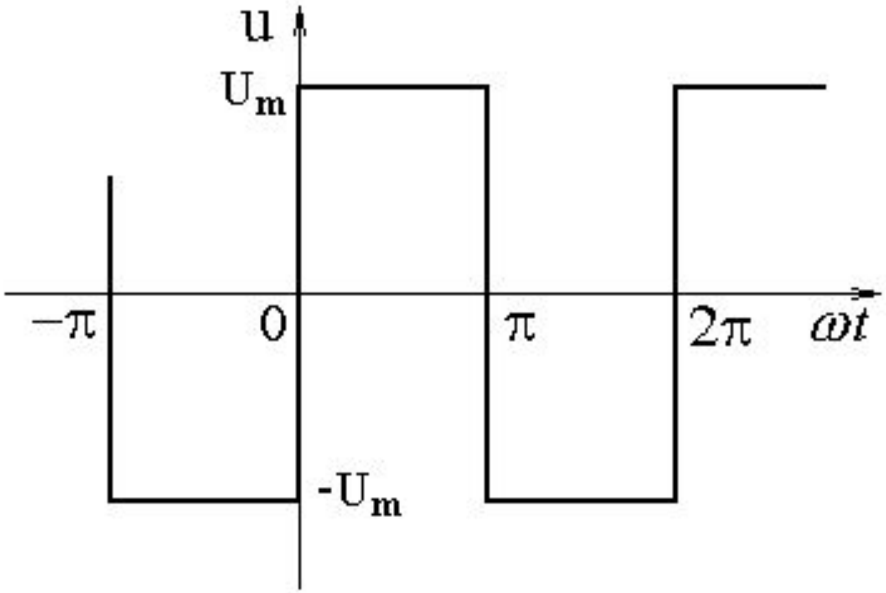


$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\omega t)\sin k\omega t\, d\omega t =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} U_m \sin k\omega t\, d\omega t + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (-U_m)\sin k\omega t\, d\omega t =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} U_m \sin k\omega t\, d\omega t = \frac{2U_m}{\pi}\frac{(-\cos k\omega t)}{k}\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2U_m}{\pi k}(1+1) = \frac{4U_m}{\pi k}.$$



Функция *u(ωt)* описывается рядом:

$$u = \frac{4U_m}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + ... \right).$$

Пример приближенного определения коэффициентов ряда Фурье

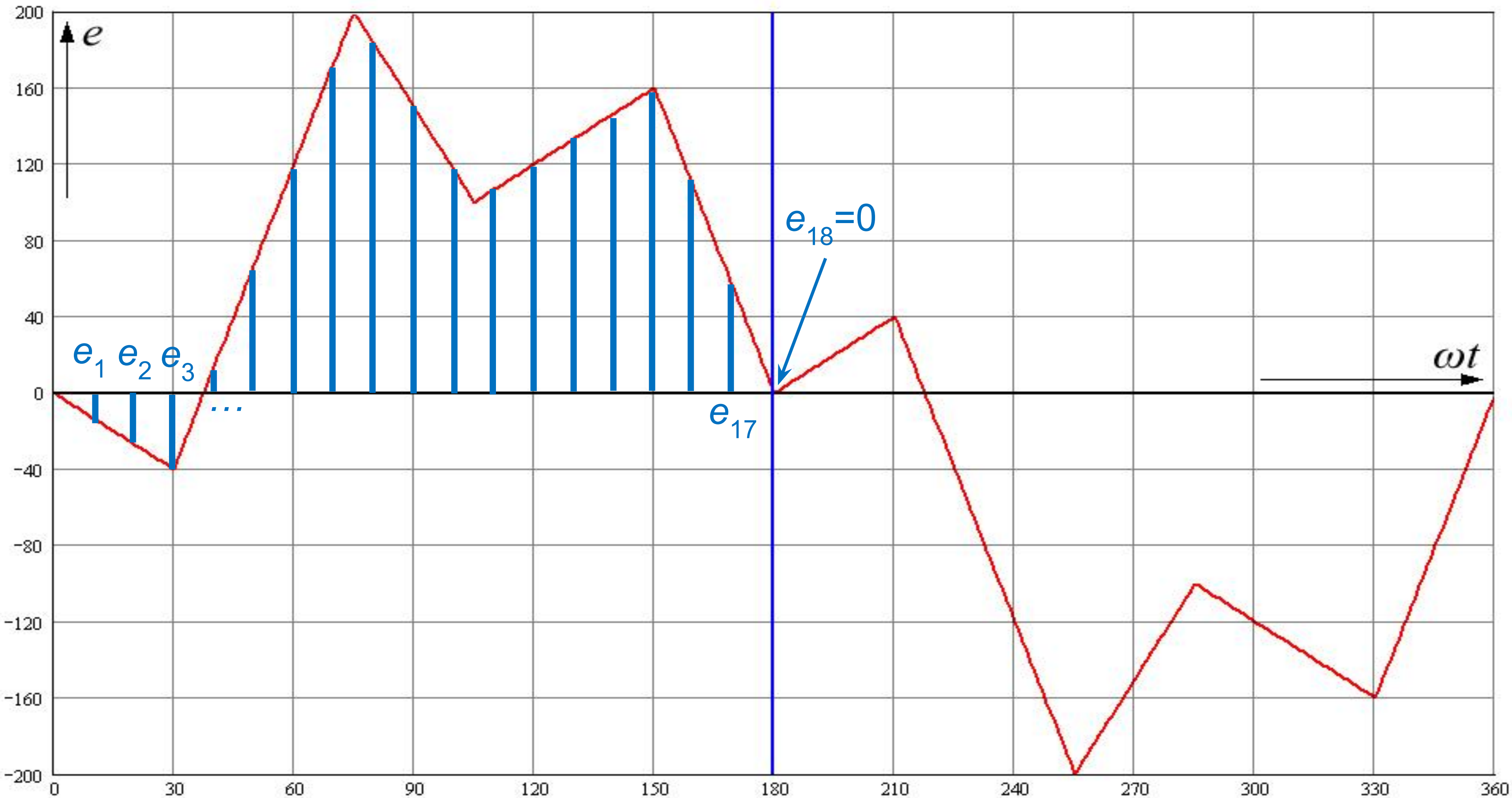
$$\Delta = \frac{2\pi}{m}$$

$$A_0 \approx \frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m/2} f(n\Delta);$$

$$B_k \approx \frac{4}{m}\sum_{n=1}^{m/2} f(n\Delta)\sin(kn\Delta);$$

$$C_k \approx \frac{4}{m}\sum_{n=1}^{m/2} f(n\Delta)\cos(kn\Delta).$$

$$\frac{m}{2} = 18; \qquad \Delta = \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{18} = 10°;$$



$$A_0 \approx \frac{1}{18}\sum_{n=1}^{18} e(n10^\circ);$$

$$B_k \approx \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{18} e(n10^\circ)\sin(kn10^\circ);$$

$$C_k \approx \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{18} e(n10^\circ)\cos(kn10^\circ).$$

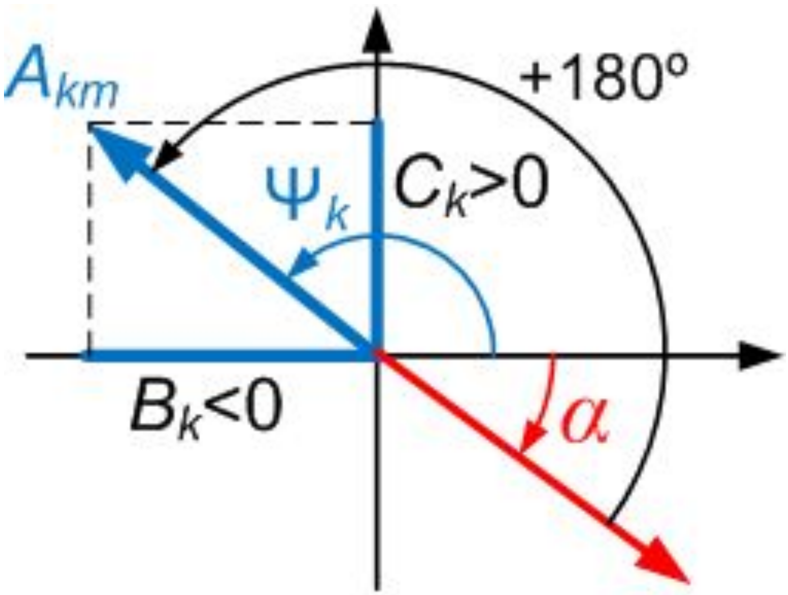
В нашем примере A_0=0, B_k и C_k – только нечетные.

Расчет коэффициентов B_k и C_k

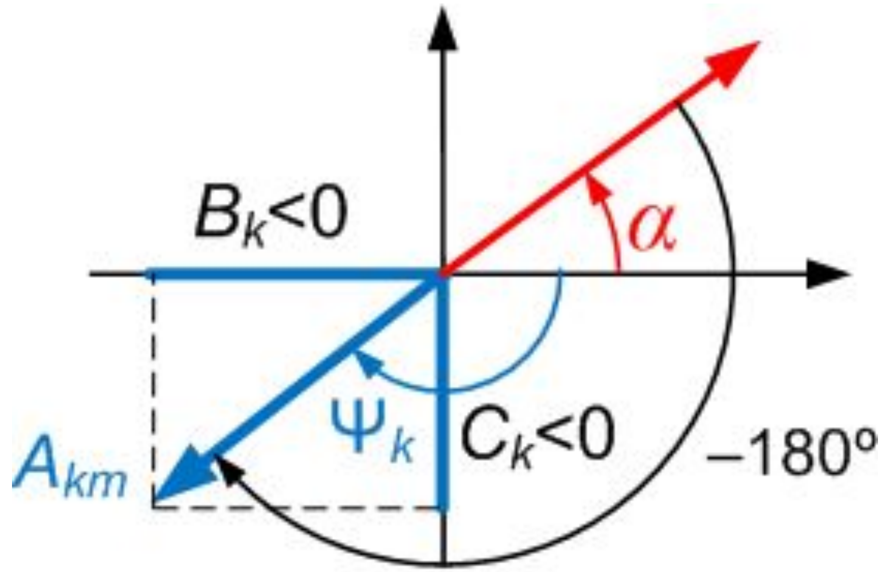
$\alpha=n10^o$	$e(\alpha)$	$k\alpha$	$\sin(k\alpha)$	$\cos(k\alpha)$	$e(\alpha)\cdot\sin(k\alpha)$	$e(\alpha)\cdot\cos(k\alpha)$
10º 20º … 180º	**по графику $e(\omega t)$**	10º 20º … 180º	0,1736 0,3420 … 0	0,9848 0,9397 … –1		
	$A_0=\dfrac{\sum\uparrow}{18}$	при k = 1			$B_1=\dfrac{\sum\uparrow}{9}$	$C_1=\dfrac{\sum\uparrow}{9}$

$\alpha=n10^o$	$e(\alpha)$	$k\alpha$	$\sin(k\alpha)$	$\cos(k\alpha)$	$e(\alpha)\cdot\sin(k\alpha)$	$e(\alpha)\cdot\cos(k\alpha)$
10º 20º … 180º	по графику	**20º 40º … 360º**	0,3420 0,6428 … 0	0,9397 0,7660 … 1		
при k = 2					$B_2=\dfrac{\sum\uparrow}{9}$	$C_2=\dfrac{\sum\uparrow}{9}$

$$A_{km} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}; \qquad \Psi_k = \operatorname{arctg}\frac{C_k}{B_k} = \operatorname{arctg}\frac{\sin\Psi_k}{\cos\Psi_k}.$$



$\Psi_k = \alpha + 180°$



$\Psi_k = \alpha - 180°$

Если B_k<0, то к углу α, полученному на калькуляторе, необходимо прибавить ±180º!!!

$$e = \boxed{151\sin(\omega t - 20^\circ)} + \boxed{17\sin(3\omega t + 224^\circ)} + \boxed{52\sin(5\omega t + 88^\circ)},$$

Действующее значение несинусоидальной функции

$$F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}.$$

$$i = I_0 + i_1 + i_2 + ... =$$

$$= I_0 + I_{1m}\sin(\omega t + \alpha_1) + I_{2m}\sin(2\omega t + \alpha_2) + ...$$

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \Bigg[I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \alpha_k) +$$

$$+\sum_{\substack{p=0\\q=0}}^{\infty} I_{pm} I_{qm} \sin(p\omega t + \alpha_p)\sin(q\omega t + \alpha_q)\Bigg] dt, (p \neq q).$$

$$\int_0^T \sin^2(k\omega t + \alpha_k) dt = \frac{T}{2},$$

$$\int_0^T \sin(p\omega t + \alpha_p)\sin(q\omega t + \alpha_q) dt = 0, (p \neq q),$$

$$I^2 = I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \ldots \qquad I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \ldots}$$

$$I_{km} = \sqrt{2} I_k \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots}$$

Аналогично:

$$E = \sqrt{E_0^2 + \frac{E_{1m}^2}{2} + \frac{E_{2m}^2}{2} + \ldots} = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \ldots},$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1m}^2}{2} + \frac{U_{2m}^2}{2} + \ldots} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots}.$$