TEMA: ELEMENTE DE TEORIA REZIDUURILOR

CHIȘINĂU 2021

“

Reziduu: definiţie, calcul, teorema reziduurilor

Să considerăm în cele ce urmează o funcţie olomorfă $f : D \to \mathbb{C}$ ($D \subset \mathbb{C}$, D domeniu).Fie acum $a \in \mathbb{C}$ astfel încât f admite dezvolare în serie Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

în coroana circulară:

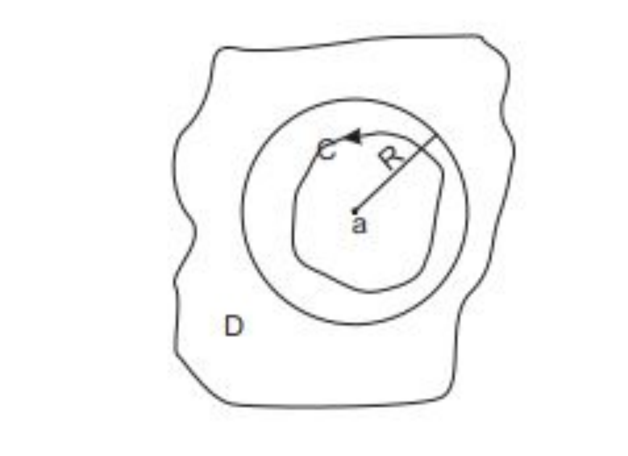
$$0 < |z-a| < R$$

”

Definitia 1.1 *Punctul a se numeşte* punct ordinar *dacă seria Laurent 1.1.1 este serie Taylor (nu are termeni cu puteri negative ale lui $(z-a)$),* punct singular esenţial izolat *dacă partea principală are un număr infinit de termeni şi* pol de ordin k *dacă partea principală are un număr finit de termeni, primul coeficient nenul fiind a_{-k} (adică $f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $a_{-k}\neq 0$).*

Definitia 1.2 *Dacă* a *este un punct singular esenţial izolat sau un pol se numeşte reziduul funcţiei f în punctul* a *câtul dintre valoarea integralei funcţiei* f *pe o curbă închisă simplă situată în coroana circulară 1.1.2 (curbă care să înconjoare punctul a şi să fie parcursă în sens direct) şi $2\pi i$:*

Definitia 1.3 *Se numeşte reziduul funcţiei* f *în punctul de la infinit câtul dintre valoarea integralei funcţiei pe o curbă simplă închisă parcursă în sens invers, (în exteriorul curbei funcţia neavând alt punct singular decât (eventual) punctul de la infinit) şi $2\pi i$.*



Teorema *Reziduul funcţiei f în punctul* a *este egal cu coeficientul lui* $\frac{1}{z-a}$ *din dezvoltarea în serie Laurent (1.1.1):*

$$\mathrm{Rez}(f,a)=a_{-1}$$

iar reziduul punctului de la infinit este egal cu acelaşi coeficient înmulţit cu -1:

$$\mathrm{Rez}(f,a)=-a_{-1}$$

din dezvoltarea în serie Laurent în exteriorul unei coroane circulare:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n,\ |z|>R.$$

Teorema *(teorema reziduurilor) Integrala functiei f pe curba* Γ *este egală cu suma reziduurilor funcţiei* f *pe punctele* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *înmulţită cu* $2\pi i$ *:*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Rez}(f, a_k).$$

APLICAȚII

Calculul integralelor de forma $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx$, unde $R(\sin x, \cos x)$ este o funcţie raţională in $\sin x$ şi $\cos x$.

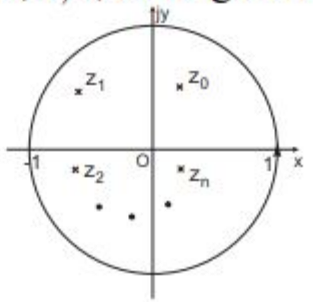
Pentru calculul acestor integrale facem schimbarea de variabilă $z = e^{ix}$ şi conform formulelor lui Euler:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \text{ iar } dz = ie^{ix}dx,$$

de unde $dx = \frac{dz}{iz}$. Cu această schimbare de variabilă integrala va deveni o integrală pe cercul de rază 1 şi centrul O, adică:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx = \oint_{\mathcal{C}(O,1)} R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)\frac{dz}{iz} = \oint_{\mathcal{C}(O,1)} R_1(z)dz.$$

Pentru calculul ultimei integrale din formula 1.2.2 aplicăm teorema reziduurilor pentru funcţia $R_1(z)$ pe cercul $\mathcal{C}(O,1)$ (vezi figura de mai jos).



Conform acestei teoreme

$$\int_{\mathcal{C}(O,1)} R_1(z)dz = 2\pi i \sum_{|z_k|<1, k=\overline{0,n}} \text{Rez}\left(R_1(z), z_k\right)$$

(în sumă se consideră reziduurile funcţiei $R_1(z)$ în toate punctele singulare, care vor fi poli, din interiorul cercului $\mathcal{C}(O,1)$, notate în figura alăturată cu $z_{0,} z_1, z_2, \cdots z_n$)

Calculul integralelor de forma $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, unde $P(x)$ şi $Q(x)$ sunt polinoame.

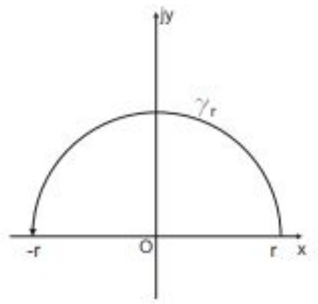
Pentru convergenţa integralei de mai sus e necesar ca P să aibă gradul cu cel puţin două unităţi mai mic decât gradul lui Q. Pentru a putea aplica teorema reziduurilor la calculul acestor integrale avem nevoie de următoarea lemă:

Lemma ***(lema 1 Jordan)*** *Dacă Γ_R este un arc de cerc cu centrul în origine şi de rază R, $f : D \to C$ o funcţie olomorfă cu $\Gamma_R \subset D$ pentru R suficient de mare şi $\lim_{|z|\to\infty} z f(z) = 0$ atunci*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0.$$

Calculul integralelor de forma $\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, unde $P(x)$ şi $Q\,(x)$ sunt polinoame.

În acest caz se presupune că Q n-are rădăcini reale şi pozitive şi are gradul mai mare cu cel puţin două unităţi ca P. Pentru a calcula această integrală se consideră funcţia $f\,(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \ln z$ şi integrala ei pe conturul (r fiind suficient de mic şi R suficient de mare astfel încât toate rădăcinile lui Q să fie în interiorul conturului):



Calculul integralelor de forma $\int_0^\infty x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, unde $P(x)$ şi $Q(x)$ sunt polinoame, iar $\alpha \in (0,1)$.

Pentru calculul acestor integrale se face acelaşi raţionament ca la cazul precedent, pentru $f(z) = z^\alpha \frac{P(z)}{Q(z)}$, (aceleaşi condiţi asupra gradelor polinoamelor, iar Q poate să aibă ca rădăcină reală (simplă) doar pe 0). Avem:

$$\int_{[B',A']} z^\alpha \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = -\int_r^R x^\alpha e^{2\pi i\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \to -e^{2\pi i\alpha} \int_0^\infty x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

obţinem:

$$\left(1 - e^{2\pi i\alpha}\right) \int_0^\infty x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{z_k, Q(z_k)=0} \text{Rez}\left(z^\alpha \frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right)$$

MULȚUMESC PENTRU ATENȚIE!