Вывод нелинейных УУН для сети переменного тока

Предпосылки для вывода

- Из предыдущей лекции

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{N}(\dot{Y}_{i,j}\cdot\dot{U}_j)=\dot{I}_i, i=1\ldots(N-1)\\ \bar{\bar{\dot{Y}}}\cdot\bar{\dot{U}}_F=\bar{\dot{I}}\end{cases}$$

Как известно,

$$\dot{S}_i=\dot{U}_i\cdot\hat{I}_i, i=1\ldots(N-1), \text{или } \bar{\dot{S}}=diag\left(\bar{\dot{U}}\right)\cdot\bar{\hat{I}}$$

Тогда

$$\dot{I}_i=\frac{\hat{S}_i}{\hat{U}_i}, i=1\ldots(N-1), \text{или } \bar{\dot{I}}=\left(diag\left(\bar{\hat{U}}\right)\right)^{-1}\cdot\bar{\hat{S}}$$

- Декартовы координаты

$$\dot{S}=P+j\cdot Q$$

- Полярные применяются крайне редко

Общий вывод нелинейной системы УУН для сети переменного тока

-

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \dot{I}_i, i = 1 \dots (N-1) \\ \bar{\bar{\dot{Y}}} \cdot \bar{\dot{U}}_F = \bar{\dot{I}} \end{cases}$$

УУН в комплексном виде в форме баланса токов

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \dfrac{\hat{S}_i}{\widehat{U}_i}, i = 1 \dots (N-1) \\ \bar{\bar{\dot{Y}}} \cdot \bar{\dot{U}}_F = \left(diag\left(\bar{\widehat{U}}\right)\right)^{-1} \cdot \bar{\hat{S}} \end{cases}$$

УУН в комплексном виде в форме баланса мощностей

$$\begin{cases} \widehat{U}_i \cdot \sum_{j=1}^{N} (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \hat{S}_i, i = 1 \dots (N-1) \\ diag\left(\bar{\widehat{U}}\right) \cdot \bar{\bar{\dot{Y}}} \cdot \bar{\dot{U}}_F = \bar{\hat{S}} \end{cases}$$

Нелинейная система УУН для сети постоянного тока (для учебных примеров)

- В форме баланса токов:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N-1} \left(Y_{i,j} \cdot U_j\right) = \frac{P_i}{U_i} - Y_{i,N} \cdot U_N, i = 1 \dots (N-1) \\ \bar{\bar{Y}}_S \cdot \bar{U} = \left(diag(\bar{U})\right)^{-1} \cdot \bar{P} - \bar{Y}_{SN} \cdot U_N \end{cases}$$

В форме баланса мощностей:

$$\begin{cases} U_i \cdot \sum_{j=1}^{N-1} \left(Y_{i,j} \cdot U_j\right) = P_i - U_i \cdot Y_{i,N} \cdot U_N, i = 1 \dots (N-1) \\ diag(\bar{U}) \cdot \bar{\bar{Y}}_S \cdot \bar{U} = \bar{P} - diag(\bar{U}) \cdot \bar{Y}_{SN} \cdot U_N \end{cases}$$

Нелинейная система УУН для сети переменного тока в декартовых координатах в форме баланса токов

- Вспомним, что

$$\dot{U} = U' + j \cdot U''$$
$$\dot{S} = P + j \cdot Q$$

Тогда

$$\left\{ \sum_{j=1}^{N} \left(\left(G_{i,j} + j \cdot B_{i,j} \right) \cdot \left(U_j' + j \cdot U_j'' \right) \right) = \frac{P_i - j \cdot Q_i}{U_i' - j \cdot U_i''}, i = 1 \dots (N-1) \right.$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^{N} \left(\left(G_{i,j} \cdot U_j' - B_{i,j} \cdot U_j'' \right) + j \cdot \left(B_{i,j} \cdot U_j' + G_{i,j} \cdot U_j'' \right) \right) = \frac{(P_i - j \cdot Q_i) \cdot (U_i' + j \cdot U_i'')}{(U_i' - j \cdot U_i'') \cdot (U_i' + j \cdot U_i'')}, \quad i = 1 \dots (N-1) \right.$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} \left(G_{i,j} \cdot U_j' - B_{i,j} \cdot U_j'' \right) = \dfrac{P_i \cdot U_i' + Q_i \cdot U_i''}{U_i'^2 + U_i''^2}, i = 1 \dots (N-1) \\ \sum \left(B_{i,j} \cdot U_j' + G_{i,j} \cdot U_j'' \right) = \dfrac{P_i \cdot U_i'' - Q_i \cdot U_i'}{U_i'^2 + U_i''^2}, i = 1 \dots (N-1) \end{cases}$$

Нелинейная система УУН для сети переменного тока в декартовых координатах в форме баланса мощностей

- $$\left\{\hat{U}_i \cdot \sum_{j=1}^{N}(\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \hat{S}_i, i = 1 \dots (N-1)\right.$$

$$\left\{(U_i' - j \cdot U_i'') \cdot \sum_{j=1}^{N}\Big(\big(G_{i,j} + j \cdot B_{i,j}\big) \cdot \big(U_j' + j \cdot U_j''\big)\Big) = P_i - j \cdot Q_i, i = 1 \dots (N-1)\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{N}\Big((U_i' - j \cdot U_i'') \cdot \Big(\big(G_{i,j} \cdot U_j' - B_{i,j} \cdot U_j''\big) + j \cdot \big(B_{i,j} \cdot U_j' + G_{i,j} \cdot U_j''\big)\Big)\Big) = P_i - j \cdot Q_i, \\ i = 1 \dots (N-1)\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{N}\Big(G_{i,j} \cdot (U_i' \cdot U_j' + U_i'' \cdot U_j'') - B_{i,j} \cdot (U_i' \cdot U_j'' - U_i'' \cdot U_j')\Big) = P_i, i = 1 \dots (N-1) \\ \sum_{j=1}^{N}\Big(B_{i,j} \cdot (U_i' \cdot U_j' + U_i'' \cdot U_j'') + G_{i,j} \cdot (U_i' \cdot U_j'' - U_i'' \cdot U_j')\Big) = -Q_i, i = 1 \dots (N-1)\end{array}\right.$$

Нелинейная система УУН для сети переменного тока в полярных координатах в форме баланса мощностей (полярная форма проводимостей) 1

- Полярные координаты для проводимостей

$$\dot{Y} = Y \cdot \exp(\psi) = Y \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$
$$= Y \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) =$$
$$= Y \cdot (j \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha))$$

- Полярные координаты для напряжений

$$\dot{U} = V \cdot \exp(j \cdot \delta) =$$
$$= V \cdot (\cos(\delta) + j \cdot \sin(\delta))$$

- $$\left\{ \hat{U}_i \cdot \sum_{j=1}^{N} (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \hat{S}_i, i = 1 \dots (N-1) \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} V_i \cdot (\cos(\delta_i) - j \cdot \sin(\delta_i)) \cdot \sum_{j=1}^{N} \left(Y_{i,j} \cdot (j \cdot \cos(\alpha_{i,j}) - \sin(\alpha_{i,j})) \cdot V_j \cdot (\cos(\delta_j) + j \cdot \sin(\delta_j))\right) = P_i - j \cdot Q_i, \\ i = 1 \dots (N-1) \end{array} \right.$$

Нелинейная система УУН для сети переменного тока в полярных координатах в форме баланса мощностей (полярная форма проводимостей) 2

- $$\begin{cases}\sum_{j=1}^{N}\left(Y_{i,j}\cdot V_i\cdot V_j\cdot(\jmath\cdot\cos(\alpha_{i,j})-\sin(\alpha_{i,j}))\cdot(\cos(\delta_i)-\jmath\cdot\sin(\delta_i))\cdot(\cos(\delta_j)+\jmath\cdot\sin(\delta_j))\right)=P_i-\jmath\cdot Q_i,\\ i=1\ldots(N-1)\end{cases}$$

Раскроем скобки множителей, содержащих δ

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{N}\left(Y_{i,j}\cdot V_i\cdot V_j\cdot(\jmath\cdot\cos(\alpha_{i,j})-\sin(\alpha_{i,j}))\cdot\left((\cos(\delta_i)\cdot\cos(\delta_j)+\sin(\delta_i)\cdot\sin(\delta_j))+\jmath\cdot(\cos(\delta_i)\cdot\sin(\delta_j)-\sin(\delta_i)\cdot\cos(\delta_j))\right)\right)=P_i-\jmath\cdot Q_i,\\ i=1\ldots(N-1)\end{cases}$$

Воспользуемся формулами синуса и косинуса разности $\cos(\delta_j-\delta_i)=\cos(\delta_i)\cdot\cos(\delta_j)+\sin(\delta_i)\cdot\sin(\delta_j)$ и $\sin(\delta_j-\delta_i)=\sin(\delta_i)\cdot\cos(\delta_j)-\cos(\delta_i)\cdot\sin(\delta_j)$

- $$\begin{cases}\sum_{j=1}^{N}\left(Y_{i,j}\cdot V_i\cdot V_j\cdot(\jmath\cdot\cos(\alpha_{i,j})-\sin(\alpha_{i,j}))\cdot(\cos(\delta_j-\delta_i)-\jmath\cdot\sin(\delta_j-\delta_i))\right)=P_i-\jmath\cdot Q_i,\\ i=1\ldots(N-1)\end{cases}$$

Раскроем оставшиеся скобки

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{N}\left(Y_{i,j}\cdot V_i\cdot V_j\cdot\left((\cos(\alpha_{i,j})\cdot\sin(\delta_j-\delta_i)-\sin(\alpha_{i,j})\cdot\cos(\delta_j-\delta_i))+\jmath\cdot(\cos(\alpha_{i,j})\cdot\cos(\delta_j-\delta_i)+\sin(\alpha_{i,j})\cdot\sin(\delta_j-\delta_i))\right)\right)=P_i-\jmath\cdot Q_i,\\ i=1\ldots(N-1)\end{cases}$$

Нелинейная система УУН для сети переменного тока в полярных координатах в форме баланса мощностей (полярная форма проводимостей) 3

- Снова воспользуемся формулами синуса и косинуса разности

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} \left(Y_{i,j} \cdot V_i \cdot V_j \cdot \left(-\sin(\delta_j - \delta_i - \alpha_{i,j}) + j \cdot \cos\left(\delta_j - \delta_i - \alpha_{i,j}\right) \right) \right) = P_i - j \cdot Q_i, \\ i = 1 \dots (N-1) \end{cases}$$

Запишем уравнения, исходя из равенства действительных и мнимых составляющих

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} \left(Y_{i,j} \cdot V_i \cdot V_j \cdot \sin(\delta_j - \delta_i - \alpha_{i,j}) \right) = -P_i, i = 1 \dots (N-1) \\ \sum_{j=1}^{N} \left(Y_{i,j} \cdot V_i \cdot V_j \cdot \cos(\delta_j - \delta_i - \alpha_{i,j}) \right) = Q_i, i = 1 \dots (N-1) \end{cases}$$

Нелинейная система УУН для сети переменного тока в полярных координатах в форме баланса мощностей (декартова форма проводимостей)1

- Полярные координаты для проводимостей

$$\dot{Y} = G + j \cdot B$$

- Полярные координаты для напряжений

$$\dot{U} = V \cdot \exp(j \cdot \delta) =$$
$$= V \cdot (\cos(\delta) + j \cdot \sin(\delta))$$

- $$\left\{ \hat{U}_i \cdot \sum_{j=1}^{N} (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \hat{S}_i,\ i = 1 \ldots (N-1) \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} V_i \cdot (\cos(\delta_i) - j \cdot \sin(\delta_i)) \cdot \sum_{j=1}^{N} \Big((G_{i,j} + j \cdot B_{i,j}) \cdot V_j \cdot \big(\cos(\delta_j) + j \cdot \sin(\delta_j)\big) \Big) = P_i - j \cdot Q_i, \\ i = 1 \ldots (N-1) \end{array} \right.$$

Нелинейная система УУН для сети переменного тока в полярных координатах в форме баланса мощностей (декартова форма проводимостей)2

- $$\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{N}\left(V_i \cdot V_j \cdot (G_{i,j} + \jmath \cdot B_{i,j}) \cdot (\cos(\delta_i) - \jmath \cdot \sin(\delta_i)) \cdot \left(\cos(\delta_j) + \jmath \cdot \sin(\delta_j)\right)\right) = P_i - \jmath \cdot Q_i, \\ \qquad i = 1 \ldots (N-1)\end{array}\right.$$

Раскроем скобки множителей, содержащих δ

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{N}\left(V_i \cdot V_j \cdot (G_{i,j} + \jmath \cdot B_{i,j}) \cdot \left(\left(\cos(\delta_i) \cdot \cos(\delta_j) + \sin(\delta_i) \cdot \sin(\delta_j)\right) + \jmath \cdot \left(\cos(\delta_i) \cdot \sin(\delta_j) - \sin(\delta_i) \cdot \cos(\delta_j)\right)\right)\right) = P_i - \jmath \cdot Q_i, \\ \qquad i = 1 \ldots (N-1)\end{array}\right.$$

Воспользуемся формулами синуса и косинуса разности $\cos(\delta_j - \delta_i) = \cos(\delta_i) \cdot \cos(\delta_j) + \sin(\delta_i) \cdot \sin(\delta_j)$ и $\sin(\delta_j - \delta_i) = \sin(\delta_i) \cdot \cos(\delta_j) - \cos(\delta_i) \cdot \sin(\delta_j)$

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{N}\left(V_i \cdot V_j \cdot (G_{i,j} + \jmath \cdot B_{i,j}) \cdot \left(\cos(\delta_j - \delta_i) - \jmath \cdot \sin(\delta_j - \delta_i)\right)\right) = P_i - \jmath \cdot Q_i, \\ \qquad i = 1 \ldots (N-1)\end{array}\right.$$

Нелинейная система УУН для сети переменного тока в полярных координатах в форме баланса мощностей (декартова форма проводимостей)3

- Раскроем оставшиеся скобки

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} \left(V_i \cdot V_j \cdot (G_{i,j} + j \cdot B_{i,j}) \cdot \left(\cos(\delta_j - \delta_i) - j \cdot \sin(\delta_j - \delta_i) \right) \right) = P_i - j \cdot Q_i, \\ i = 1 \ldots (N-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} \left(V_i \cdot V_j \cdot \left(\left(G_{i,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i) + B_{i,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i) \right) + j \cdot \left(-G_{i,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i) + B_{i,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i) \right) \right) \right) = P_i - j \cdot Q_i, \\ i = 1 \ldots (N-1) \end{cases}$$

Запишем уравнения, исходя из равенства действительных и мнимых составляющих

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} \left(V_i \cdot V_j \cdot \left(G_{i,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i) + B_{i,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i) \right) \right) = P_i, i = 1 \ldots (N-1) \\ \sum_{j=1}^{N} \left(V_i \cdot V_j \cdot \left(G_{i,j} \cdot \sin(\delta_j - \delta_i) - B_{i,j} \cdot \cos(\delta_j - \delta_i) \right) \right) = Q_i, i = 1 \ldots (N-1) \end{cases}$$

Часто встречающиеся формы записи нелинейных УУН 1

- УУН в комплексном виде в форме баланса токов

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \frac{\hat{S}_i}{\widehat{U}_i}, i = 1 \ldots (N-1) \\ \dot{\bar{\bar{Y}}} \cdot \dot{\bar{U}}_F = \left(diag\left(\bar{\widehat{U}}\right)\right)^{-1} \cdot \hat{\bar{S}} \end{cases}$$

УУН в комплексном виде в форме баланса мощностей

$$\begin{cases} \widehat{U}_i \cdot \sum_{j=1}^{N} (\dot{Y}_{i,j} \cdot \dot{U}_j) = \hat{S}_i, i = 1 \ldots (N-1) \\ diag\left(\bar{\widehat{U}}\right) \cdot \dot{\bar{\bar{Y}}} \cdot \dot{\bar{U}}_F = diag\left(\bar{\widehat{U}}\right)^{-1} \cdot \hat{\bar{S}} \end{cases}$$

УУН в декартовых координатах в форме баланса токов

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} \left(G_{i,j} \cdot U'_j - B_{i,j} \cdot U''_j\right) = \frac{P_i \cdot U'_i + Q_i \cdot U''_i}{U_i'^2 + U_i''^2}, i = 1 \ldots (N-1) \\ \sum_{j=1}^{N} \left(B_{i,j} \cdot U'_j + G_{i,j} \cdot U''_j\right) = \frac{P_i \cdot U''_i - Q_i \cdot U'_i}{U_i'^2 + U_i''^2}, i = 1 \ldots (N-1) \end{cases}$$

Часто встречающиеся формы записи нелинейных УУН 2

- УУН в декартовых координатах в форме баланса мощностей

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N}\left(G_{i,j}\cdot\left(U_i'\cdot U_j'+U_i''\cdot U_j''\right)-B_{i,j}\cdot\left(U_i'\cdot U_j''-U_i''\cdot U_j'\right)\right)=P_i, i=1\ldots(N-1) \\ \sum_{j=1}^{N}\left(B_{i,j}\cdot\left(U_i'\cdot U_j'+U_i''\cdot U_j''\right)+G_{i,j}\cdot\left(U_i'\cdot U_j''-U_i''\cdot U_j'\right)\right)=-Q_i, i=1\ldots(N-1) \end{cases}$$

УУН в полярных координатах в форме баланса мощностей (полярная форма проводимостей)

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N}\left(Y_{i,j}\cdot V_i\cdot V_j\cdot\sin(\delta_j-\delta_i-\alpha_{i,j})\right)=-P_i, i=1\ldots(N-1) \\ \sum_{j=1}^{N}\left(Y_{i,j}\cdot V_i\cdot V_j\cdot\cos(\delta_j-\delta_i-\alpha_{i,j})\right)=Q_i, i=1\ldots(N-1) \end{cases}$$

УУН в полярных координатах в форме баланса мощностей (декартова форма проводимостей)

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N}\left(V_i\cdot V_j\cdot\left(G_{i,j}\cdot\cos\left(\delta_j-\delta_i\right)+B_{i,j}\cdot\sin\left(\delta_j-\delta_i\right)\right)\right)=P_i, i=1\ldots(N-1) \\ \sum_{j=1}^{N}\left(V_i\cdot V_j\cdot\left(G_{i,j}\cdot\sin\left(\delta_j-\delta_i\right)-B_{i,j}\cdot\cos\left(\delta_j-\delta_i\right)\right)\right)=Q_i, i=1\ldots(N-1) \end{cases}$$

Именно последняя форма чаще всего используется в расчетных программах (!!!)

Конец

- $$\left(\left(\bar{\bar{G}}_S + j \cdot \bar{\bar{B}}_S\right) \cdot \left(\overline{U'_F} + j \cdot \overline{U''_F}\right)\right) = \left(diag\left(\overline{U'} - j \cdot \overline{U''}\right)\right)^{-1} \cdot \left(\bar{P} - j \cdot \bar{Q}\right)$$