

*У всякой случайности  
есть своя причина...*

**Петроний,**  
римский писатель (I в. н.э.)

**Теория вероятностей** - наука, изучающая случайные события на основе предположения: при многократном осуществлении комплекса условий **G** доля той части наблюдений, при которых сл. событие **A** наступило, незначительно отклоняется от некоторого положительного числа, называемого его вероятностью.

**1-ый метод определения вероятности:**

**Статистический** - основан на свойстве устойчивости частоты появления события **A** при осуществлении достаточно большого количества комплекса условий **G**.

**ПРИМЕР:** При большом числе подбрасываний монеты были получены результаты, известные из истории развития теории вероятности:

	<b>Кол-во испытаний</b>	<b>Герб</b>	<b>Частота</b>
• <u><b>Бюффон</b></u>	<u><b>4040 раз</b></u>	<u><b>2048</b></u>	<u><b>0,5080</b></u>
• <u><b>Пирсон</b></u>	<u><b>12000 раз</b></u>	<u><b>6019</b></u>	<u><b>0,5016</b></u>
• <u><b>Пирсон</b></u>	<u><b>24000 раз</b></u>	<u><b>12012</b></u>	<u><b>0,5005</b></u>

Анализ частоты выпадения герба показывает, что при увеличении числа экспериментов она близка к определенному числу:  $P(A) = 0,5$ .

# Частоты появления букв русского языка

Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота
А	0,075		0,034	Ф	0,002
Б	0,017	Л	0,042	Х	0,011
В	0,046	М	0,031	Ц	0,005
Г	0,016	Н	0,065	Ч	0,015
Д	0,030	О	0,110	Ш	0,007
Е, Ё	0,087	П	0,023	Щ	0,004
Ж	0,009	Р	0,048	Ь, Ь	0,017
З	0,018	С	0,055	Ы	0,019
И	0,075	Т	0,065	Э	0,003
И	0,012	У	0,025	Ю	0,007
				Я	0,022

- При бросании кубика (игральной кости) пространство исходов имеет вид  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ;
- каждому из шести исходов приписывается  $1/6$ .

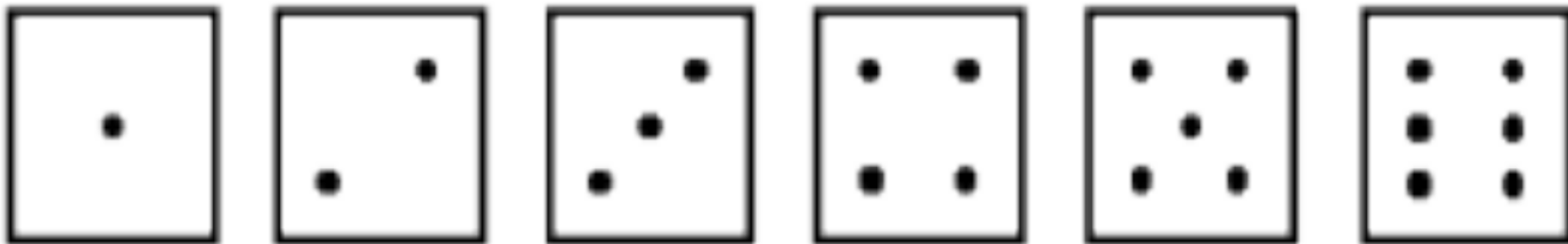


Рис. 2

Таким образом, **вероятность** - количественное выражение возможности того, что событие  $A$  произойдет при осуществлении комплекса условий  $G$ .

Этот факт выражается формулой:  $P(A) = p$

Принято обозначать достоверное событие -  $\Omega$ ,

а невозможное событие -  $\emptyset$ .

$$P(\Omega) = 1; \quad P(\emptyset) = 0; \quad 0 \leq P(A) = p \leq 1.$$

## 2-ой метод определения вероятности:

### Классическое определение.

Пусть  $n$  – число всех равновозможных исходов данного испытания, наблюдения, эксперимента),

$m$  – число исходов благоприятствующих событию  $A$  (т.е.

таких, появление любого из которых приводит к

наступлению события  $A$  ). Тогда вероятность события  $A$

определяют по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Вероятность - мера достоверности данного события.  
обозначают  $P$  (англ. **probability** – вероятность).

Чем более достоверным представляется наступление события, тем больше его вероятность.

### **Свойства вероятности**

. Вероятность достоверного события равна 1, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию.

В этом случае  $m = n$ , тогда  **$P(A) = m / n = n / n = 1$** .



2. Вероятность невозможного события равна 0.

если событие невозможно - ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае  $m = 0$ :

$$P(A) = m / n = 0 / n = 0.$$

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1.

В этом случае  $0 < m < n$ , значит,  $0 < m / n < 1$ ,

следовательно,

$$0 < P(A) < 1$$

**Пример.** В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

**Решение.** Вынуть 2 шара из 10 можно следующим числом способов:

$$n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

Число случаев, когда среди двух шаров будут 2 белых:

$$m = C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15$$

Искомая вероятность

$$P = \frac{m}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

**Пример.** Выпущено 100 лотерейных билетов, установлены призы, из которых 8 по 1 руб., 2- по 5 руб. и 1- 10 руб.

Найти вероятность, что купленный билет выиграл: а) 5 рублей; б) не более 5 рублей.

**Решение:**

а) используем формулу классического определения вероятности. Число исходов  $n$  равно числу выпущенных билетов ( $n = 100$ ). Число благоприятных событий  $m$  равно числу лотерейных билетов с выигрышем в 5 рублей ( $m = 2$ ).

Искомая вероятность равна:  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{100} = 0,02$

б) Условие выигрыш “не более 5 рублей” означает, что купленный билет должен иметь либо выигрыш, равный 1 рублю (таких билетов 8), либо выигрыш, равный 5 рублям (таких билетов 2).

Число исходов  $n$  равно числу всех билетов ( $n = 100$ ).

Число благоприятных событий  $m$  равно числу лотерейных билетов с выигрышем в 1 рубль и 5 рублей ( $m = 8 + 2 = 10$ )

Искомая вероятность равна:  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{100} = 0,1$

**Пример.** В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность, что среди отобранных окажутся 3 женщины.

**Решение.**  $n$  - общее число исходов (число способов, которыми можно отобрать семь человек из десяти  $n = C_{10}^7$ );

$A$  - событие, состоящее в том, что отобраны по табельным номерам 3 женщины и 4 мужчин;  $m$  - число исходов, благоприятствующих появлению событию  $A$ .

$$m = C_4^3 \cdot C_6^4$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^7} = \frac{60}{120} = 0,5$$

**Пример.** В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц.

Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность, что пуговицы будут одноцветными?

**Решение.** Событие  $A = \{\text{вынуты пуговицы одного цвета}\}$  представим в виде суммы  $A = A_1 + A_2$ , где  $A_1$  - выбор пуговицы красного, а  $A_2$  - синего цветов соответственно.

Вероятность вытащить 2 красные пуговицы

$$P(A_1) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2}$$

2 синие одновременно, то:  $P(A) = \frac{C_{10}^2 + C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{10!}{2!8!} + \frac{5!}{2!3!} = 0,524.$

## Задание:

1. После бури на участке между 50-ым и 70-ым километрами высоковольтной линии электропередач произошел обрыв проводов.

Тогда вероятность того, что авария произошла между 60-ым и 63-им километрами, равна...

2. Из урны, в которой находятся 7 черных и 3 белых шаров, вынимают одновременно 2 шара.

Тогда вероятность того, что оба шара будут черными, равна ....

Классическое определение вероятности применимо при двух условиях:

- 1) все исходы опыта должны быть равновероятными;
- 2) опыт должен иметь конечное число исходов.

На практике сложно доказать, что события равновероятные: например, при производстве опыта с подбрасыванием монеты на результат опыта могут влиять несимметричность монеты, влияние ее формы на аэродинамические характеристики полета, атмосферные условия и т.д., кроме того, существуют опыты с бесконечным числом исходов. В этом случае пользуются геометрическим подходом к определению вероятности.



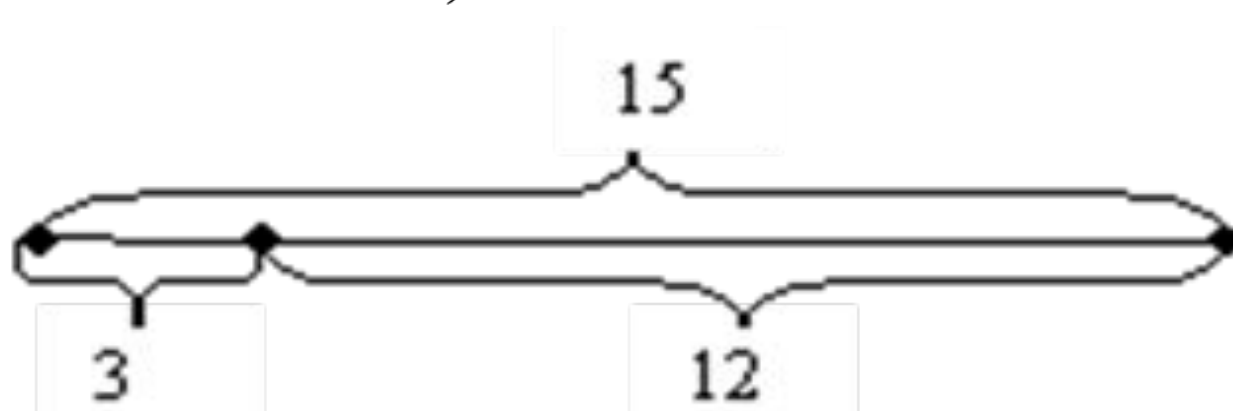
## Геометрическое определение вероятности.

Геометрической вероятностью, характеризующей вероятность появления случайной точки внутри некоторой области, называется отношение размера этой области к размеру всей области, в которой может появляться данная точка.

$P_d = \frac{S_d}{S}$ , где  $P_d$  - вероятность попадания случайной точки в область  $S_d$ ;  $S$  - общая область, где может появляться случайная точка.

**Пример.** Ребенок бросает мяч, и максимальное расстояние, на которое он может забросить мяч – 15 метров. Найти вероятность того, что мяч улетит за отметку 3 м.

**Решение.** Искомая вероятность находится, как отношение длины отрезка, находящегося за отметкой 3 м (благоприятная область) к длине всего отрезка (всевозможные исходы):

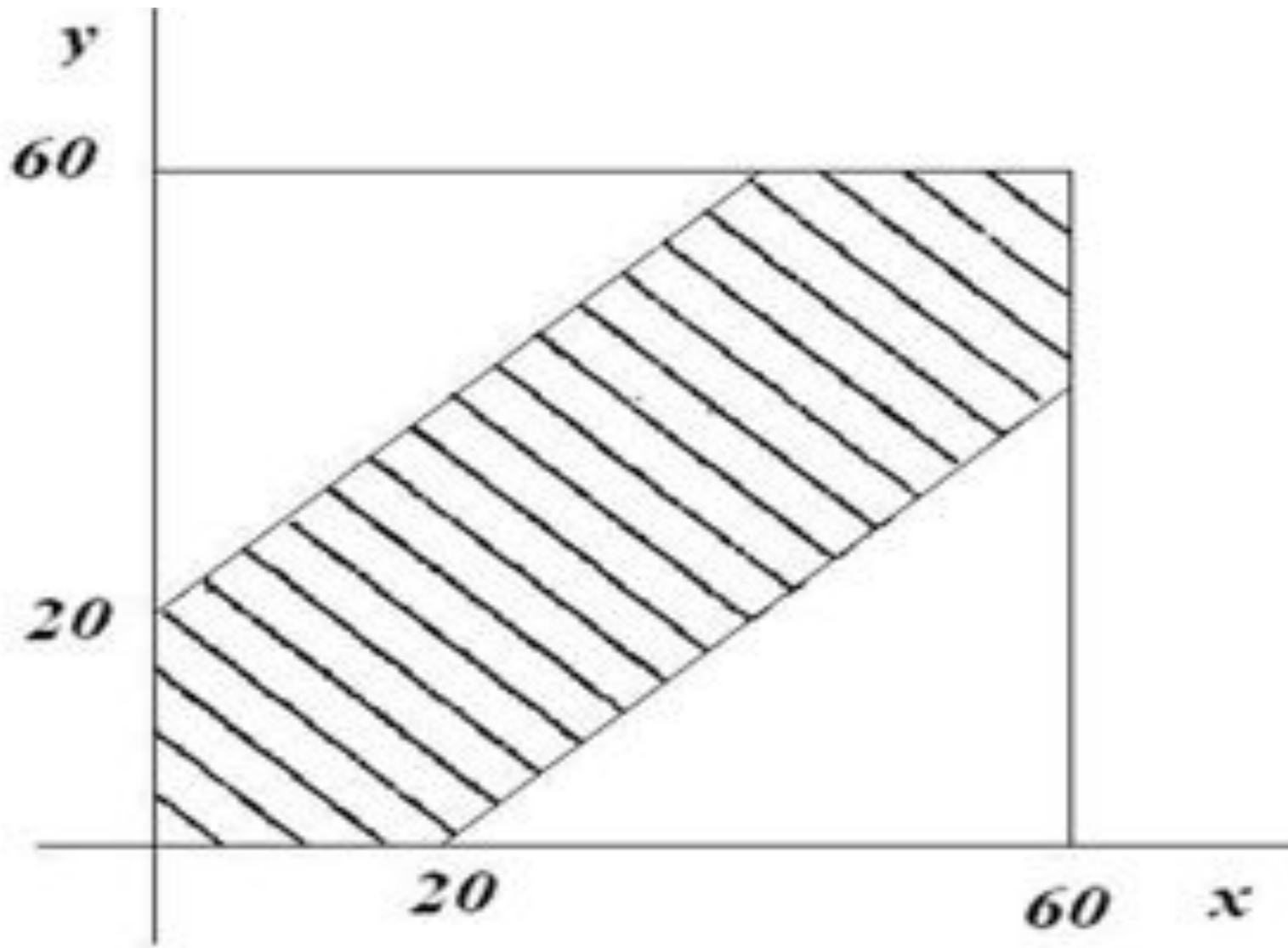


$$P(A) = \frac{12}{15}$$

**Пример.** Два лица А и В условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет другого в течении 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи лиц А и В, если приход каждого из них может произойти наудачу в течении указанного часа и моменты прихода независимы?

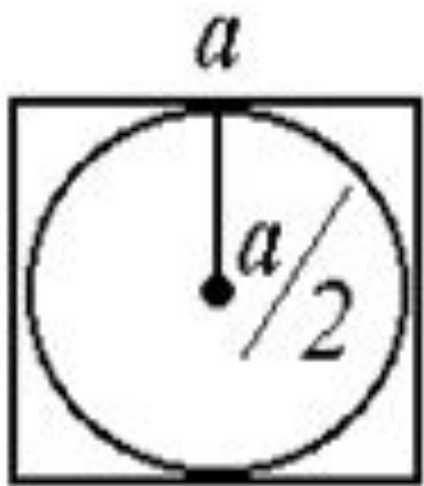
**Решение.** Момент прихода лица А обознач. –  $x$ , лица В –  $y$ .  
Чтобы встреча произошла, необходимо  $|x - y| \leq 20$ .

Изобразим  $x$  и  $y$  как координаты на плоскости с единицей масштаба - 1 мин. Все исходы - квадрат со стороной 60, а



Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата:

$$P(A) = (60^2 - 40^2) / 60^2 = 5/9$$



**Пример.** В квадрат со сторонами равными  $a$  наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что точка попадет внутрь вписанного в квадрат круга.

По формуле геометрического определения вероятности мерой пространства элементарных событий  $\Omega$  является площадь квадрата  $S_{\text{кв}} = a^2$ .

Площадь круга - мера события  $A$ .  $S_{\text{кр}} = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$

Искомая вероятность определяется по формуле:

$$P(A) = \frac{S_{\text{кр}}}{S_{\text{кв}}} = \frac{\pi a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{4}$$

## Задание:

1. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии  $2a$ . На плоскость наудачу брошена монета радиуса  $r < a$ .

Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной прямой.

2. Внутри круга радиуса  $R$  наудачу брошена точка.

Найти вероятность того, что точка окажется:

а) внутри вписанного в круг квадрата;

б) за пределами вписанного в круг квадрата.

# Теоремы сложения и умножения вероятностей

**Условной вероятностью** события  $A$  при условии  $B$  (обозн.  $P(A|B)$ ) наз. вероятность, вычисленную при условии, что событие  $B$  уже произошло и, тем самым, изменило ход эксперимента.

События называют **зависимыми**, если наступление одного из них изменяет вероятность появления другого.

События наз. **независимыми**, если происхождение одного из них никак не влияет на вероятность появления другого.

## **Теорема сложения совместных событий.**

Вероятность суммы 2-х совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B).$$

## **Теорема сложения несовместных событий.**

Вероятность суммы 2-х несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$p(A + B) = p(A) + p(B).$$



## Теорема умножения вероятностей

Если события  $A$  и  $B$  независимы (наступление одного из них никак не влияет на шансы наступления другого), то вероятность произведения этих событий  $A \cdot B$  равна произведению их вероятностей:  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ .

### Зависимые испытания.

Пусть  $A$  и  $B$  - зависимые. Условной вероятностью  $P(B|A)$  события  $B$  называют вероятность события  $B$ , найденную в предположении, что событие  $A$  наступило.

Вероятность произведения двух зависимых событий  $A$  и  $B$  равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденного в

## Пример.

При подготовке к экзамену две студентки успели выучить только первые пять билетов из двадцати.

Пусть событие  $A$  – «первая студентка вытянула один из этих (счастливых для неё) билетов»,

а событие  $B$  – «вторая студентка вытянула счастливый билет».

- Если событие  $A$  произошло, то среди оставшихся 19 билетов окажется только 4 счастливых, и значит, вероятность события  $B$  равна

$$P(B) = \frac{4}{19}$$

- Если же событие  $A$  не произошло, то число счастливых билетов среди оставшихся 19 не изменится, и значит, вероятность события  $B$  будет другой:

$$P(B) = \frac{5}{19}$$

## Пример.

Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них независимо от другого может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. После поимки одного из них, в связи с увеличением числа сотрудников занятых в поисках, вероятность найти второго возрастает до 0,7.

С какой вероятностью в течение суток будут обнаружены оба преступника?

## Решение.

Событие  $A$  – «обнаружены оба преступника».

Разобьем его на простые:

$B_1$  – «обнаружен 1-ый»,  $B_2$  – «обнаружен 2-ой после того, как пойман 1-ый преступник».

По определению произведения событий

$$A = B_1 \cdot B_2.$$

Тогда по теореме умножения вероятностей для зависимых событий:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) = \\ &= 0,5 \cdot 0,7 = 0,35 \end{aligned}$$

## Пример.

Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень.

Вероятность попадания первого стрелка – **0,9**;

второго стрелка – **0,8**.

Найти вероятность того, что

а) в мишень попадет только один стрелок.

б) мишень будет поражена.

**Решение: а)** Пусть событие  $A$  – в мишень попадет только один стрелок.

Рассмотрим события:  $A_1$  – в мишень попадет 1-ый;  
 $A_2$  – в мишень попадет 2-ой.

По условию:  $p(A_1) = 0,9$ ;  $p(A_2) = 0,8$ .

**Тогда вероятности промахов стрелков:**

$$p(\bar{A}_1) = 1 - 0,9 = 0,1; \quad p(\bar{A}_2) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Событие  $A$  означает: в мишень попадет только 1-ый (т. е. 1-ый попадет и 2-ой промахнётся) или попадет только 2-ой (т.е. 1-ый промахнётся и 2-ой попадет).

Тогда  $P(A) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,26$ .

б) Найдем вероятность события **В** – мишень будет поражена. Событие **В** произойдет, если в мишень попадет **хотя бы один** стрелок: **или** только 1-ый, **или** только 2-ой, **или** оба. Тогда:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{B}) &= \mathbf{0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 + 0,9 \cdot 0,8 =} \\ &= \mathbf{0,18 + 0,08 + 0,72 = \underline{0,98}.} \end{aligned}$$

Найти вероятность события **В** также можно по теореме сложения совместных событий  $A_1$  и  $A_2$ .

$$\begin{aligned} P(\mathbf{B}) &= P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \\ &= \mathbf{0,9 + 0,8 - 0,9 \cdot 0,8 = 1,7 - 0,72 = \underline{0,98}.} \end{aligned}$$



**Пример.** В порт приходят корабли только из трех пунктов отправления. Вероятность появления корабля из 1-го пункта - **0,2**, из 2-го пункта – **0,6**. Найти вероятность прибытия корабля из 3-его пункта.

**Решение.** Обозначим  $p(A_i)$  – вероятность прибытия корабля из пункта  $i$ .

Из свойств вероятности следует, что:

$$p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = 1$$

Тогда вероятность прибытия корабля из 3-го пункта отправления равна

$$p(A_3) = 1 - 0,2 - 0,6 = 0,2.$$

## Дидактическая единица. Теория вероятностей.

Задание №7. Игральный кубик бросают один раз.

Вероятность того, что на верхней грани выпадет число очков, больше чем три, равна ...

Варианты ответов:

1)  $\frac{1}{2}$

2)  $\frac{1}{3}$

3) 0

4) 1

Ответ: пункт № 1, т.е. выпадет или 4, или 5, или 6.



**Задание №11.** В урне находятся шесть шаров: три белых и три черных. Событие  $A$  – «вынули белый шар». Событие  $B$  – «вынули черный шар». Если опыт состоит в выборе только одного шара, то для этих событий **неверным** будет утверждение...

**Варианты ответов:**

- 1) «События  $A$  и  $B$  несовместны»
- 2) «События  $A$  и  $B$  равновероятны»
- 3) «Событие  $A$  невозможно»
- 4) «Вероятность события  $B$  равна 0,5»

**Ответ:** пункт № 3, другие пункты – верные утверждения.

## Задание №12.

Вероятность наступления некоторого события **не может быть равна ...**

Варианты ответов:

1) 0

2)  $\frac{1}{2}$

3) 1

4) 2

Ответ:

пункт № 4, по свойствам вероятности.

## Пример.

Преступник имеет 3 ключа. В темноте он открывает дверь выбирая ключ случайным образом. На открытие каждой двери он тратит 5 секунд. Найти вероятность что он откроет все двери за 15 секунд.

## Решение:

Пусть событие  $A$  – «открыты все двери». Разобьём событие на более простые:  $B$  – «открыта 1-я дверь»,  $C$  – «открыта 2-я дверь»,  $D$  – «открыта 3-я дверь», тогда

Следовательно  $P(A)=P(B \cdot C \cdot D)$ , по теореме умножения вероятностей независимых событий  $P(B \cdot C \cdot D) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$ .

Вычислим вероятность событий  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

Имеется три равновозможных (каждый ключ выбираем из 3-х) исходов опыта. Каждому из событий  $B$ ,  $C$  и  $D$  благоприятствует одно из них, поэтому

$$P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{3} ;$$

$$P(A) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

## Пример

В урне 5 белых, 20 красных и 10 чёрных шаров, не отличающихся по размеру. Шары тщательно перемешивают и затем наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность, что он окажется белым или чёрным?

## Решение:

Пусть  $A$  – появление белого или чёрного шара, разобьём событие на более простые.  $B$  – появление белого,  $C$  – появление чёрного, тогда  $A = B + C$ , следовательно  $P(A) = P(B + C)$ . Так как  $B$  и  $C$  события несовместные, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий



Вычислим вероятность событий В и С.

Имеется 35 равновозможных исходов опыта, событию В благоприятствует 5 из них, событию С – 10.

**Следовательно:**  $P(B) = \frac{5}{35}$        $P(C) = \frac{10}{35}$

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{5}{35} + \frac{10}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}.$$

вероятность, что вынутый наудачу шар окажется белым или чёрным.

## Домашнее задание

1. Найти вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число а) делится без остатка на 8 и на 3;  
б) не содержит цифру 5.
  
2. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка - 0,6; второго стрелка - 0,3. Найти вероятность того, что:  
а) в мишень попадет только один стрелок;  
б) оба промахнутся.