У всякой случайности
есть своя причина...

Петроний,
римский писатель (I в. н.э.)

Теория вероятностей - наука, изучающая случайные события на основе предположения: при многократном осуществлении комплекса условий **G** доля той части наблюдений, при которых сл. событие **A** наступило, незначительно отклоняется от некоторого положительного числа, называемого его вероятностью.

1-ый метод определения вероятности:

Статистический - основан на свойстве устойчивости частоты появления события **A** при осуществлении достаточно большого количества комплекса условий **G.**

ПРИМЕР: При большом числе подбрасываний монеты были получены результаты, известные из истории развития теории вероятности:

	Кол-во испытаний	Герб	Частота
• Бюффон	4040 раз	2048	0,5080
• Пирсон	12000 раз	6019	0,5016
• Пирсон	24000 раз	12012	0,5005

Анализ частоты выпадения герба показывает, что при увеличении числа экспериментов она близка к определенному числу: **P(A) = 0,5.**

Частоты появления букв русского языка

Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота
А	0,075		0.034	Ф	0,002
Б	0,017	Л	0,042	Х	0,011
В	0,046	М	0,031	Ц	0,005
Г	0,016	Н	0,065	Ч	0,015
Д	0,030	О	0,110	Ш	0,007
Е, Ё	0,087	П	0,023	Щ	0,004
Ж	0,009	Р	0,048	Ь, Ъ	0,017
З	0.018	С	0.055	Ы	0,019
И	0,075	Т	0,065	Э	0,003
И	0,012	У	0,025	Ю	0,007
				Я	0,022

- При бросании кубика (игральной кости) пространство исходов имеет вид $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- каждому из шести исходов приписывается 1/6.

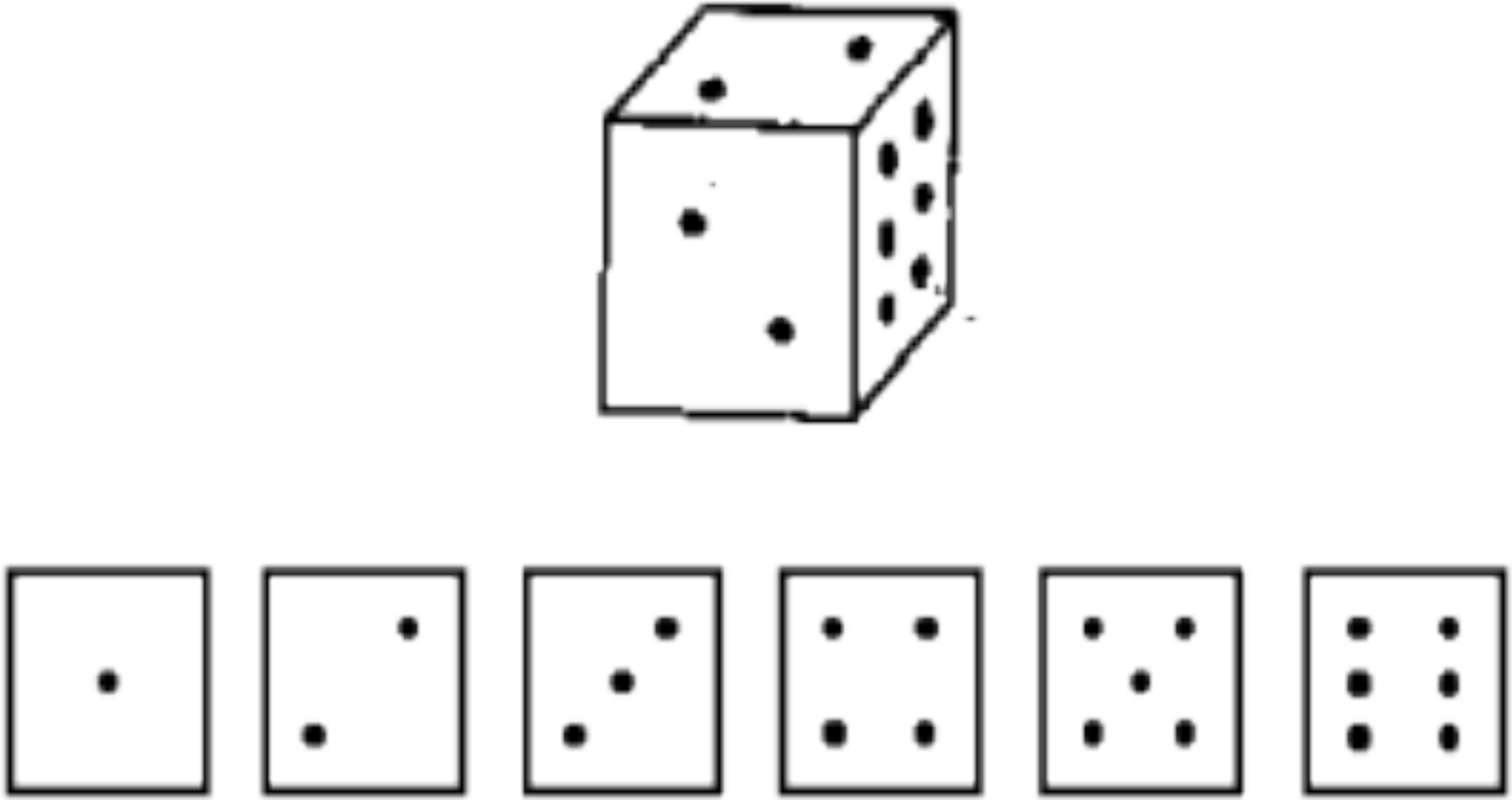


Рис. 2

Таким образом, **вероятность** - количественное выражение возможности того, что событие *A* произойдет при осуществлении комплекса условий *G*.

Этот факт выражается формулой: $\mathbf{P(A)= p}$

Принято обозначать **достоверное** событие - $\mathbf{\Omega}$,

а **невозможное** событие - $\boldsymbol{\varnothing}$.

$$\mathbf{P(\Omega) = 1; \quad P(\varnothing) = 0; \quad 0 \le P(A) = p \le 1.}$$

2-ой метод определения вероятности:

Классическое определение.

Пусть **n** – число всех равновозможных исходов данного испытания, наблюдения, эксперимента),

m – число исходов благоприятствующих событию *A* (т.е. таких, появление любого из которых приводит к наступлению события *A*). Тогда вероятность события *A* определяют по формуле:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Вероятность - мера достоверности данного события. обозначают ***P*** (англ. probability – вероятность).

Чем более достоверным представляется наступление события, тем больше его вероятность.

Свойства вероятности

. Вероятность достоверного события равна 1, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию.

В этом случае m = n, тогда $\mathbf{P\ (A) = m / n = n / n = 1}$.

2. Вероятность невозможного события равна 0.

если событие невозможно - ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае m = 0:

P (A) = m / n = 0 / n = 0.

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1.

В этом случае 0 < m < n, значит, 0 < m / n < 1, следовательно,

0 < P (A) < 1

Пример. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

Решение. Вынуть 2 шара из 10 можно следующим числом способов:

$$n = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

Число случаев, когда среди двух шаров будут 2 белых:

$$m = C_{6}^{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15$$

Искомая вероятность

Пример. Выпущено 100 лотерейных билетов, установлены призы, из которых 8 по 1 руб., 2- по 5 руб. и 1- 10 руб. Найти вероятность, что купленный билет выиграл: а) 5 рублей; б) не более 5 рублей.

Решение:

а) используем формулу классического определения вероятности. Число исходов **n** равно числу выпущенных билетов (n = 100). Число благоприятных событий **m** равно числу лотерейных билетов с выигрышем в 5 рублей (m = 2).

Искомая вероятность равна: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{100} = 0{,}02$

б) Условие выигрыш “не более 5 рублей” означает, что купленный билет должен иметь либо выигрыш, равный 1 рублю (таких билетов 8), либо выигрыш, равный 5 рублям (таких билетов 2).

Число исходов **n** равно числу всех билетов (n = 100).

Число благоприятных событий **m** равно числу лотерейных билетов с выигрышем в 1 рубль и 5 рублей (m = 8 + 2 = 10)

Искомая вероятность равна: P(A) = $\frac{m}{n} = \frac{10}{100} = 0{,}1$

Пример. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность, что среди отобранных окажутся 3 женщины.

Решение. n - общее число исходов (число способов, которыми можно отобрать семь человек из десяти $n = C_{10}^{7}$);

A - событие, состоящее в том, что отобраны по табельным номерам 3 женщины и 4 мужчин; m - число исходов, благоприятствующих появлению событию A .

$m = C_4^3 \cdot C_6^4$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^{7}} = \frac{60}{120} = 0{,}5$$

Пример. В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность, что пуговицы будут одноцветными?

Решение. Событие A={вынуты пуговицы одного цвета} представим в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где A_1 - выбор пуговицы красного, а A_2 - синего цветов соответственно. Вероятность вытащить 2 красные пуговицы $P(A_1) = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2}$, 2 синие $P(A_2) = \frac{C_5^2}{C_{15}^2}$. Так как события не могут произойти одновременно, то:

$$P(A) = \frac{C_{10}^2 + C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{\frac{10!}{2!8!} + \frac{5!}{2!3!}}{\frac{15!}{2!13!}} = 0{,}524.$$

Задание:

1. После бури на участке между 50-ым и 70-ым километрами высоковольтной линии электропередач произошел обрыв проводов.

Тогда вероятность того, что авария произошла между 60-ым и 63-им километрами, равна…

2. Из урны, в которой находятся 7 черных и 3 белых шаров, вынимают одновременно 2 шара.

Тогда вероятность того, что оба шара будут черными, равна …

Классическое определение вероятности применимо при двух условиях:

1) все исходы опыта должны быть равновероятными;

2) опыт должен иметь конечное число исходов.

На практике сложно доказать, что события равновероятные: например, при произведении опыта с подбрасыванием монеты на результат опыта могут влиять несимметричность монеты, влияние ее формы на аэродинамические характеристики полета, атмосферные условия и т.д., кроме того, существуют опыты с бесконечным числом исходов. В этом случае пользуются геометрическим подходом к определению вероятности.

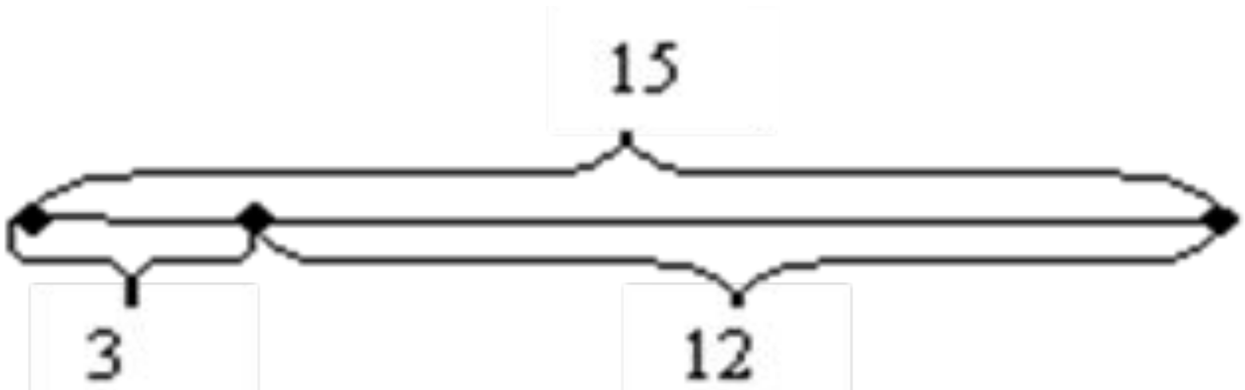
Геометрическое определение вероятности.

Геометрической вероятностью, характеризующей вероятность появления случайной точки внутри некоторой области, называется отношение размера этой области к размеру всей области, в которой может появляться данная точка.

$P_d = \frac{S_d}{S}$, где P_d - вероятность попадания случайной точки в область S_d; S - общая область, где может появляться случайная точка.

Пример. Ребенок бросает мяч, и максимальное расстояние, на которое он может забросить мяч – 15 метров. Найти вероятность того, что мяч улетит за отметку 3 м.

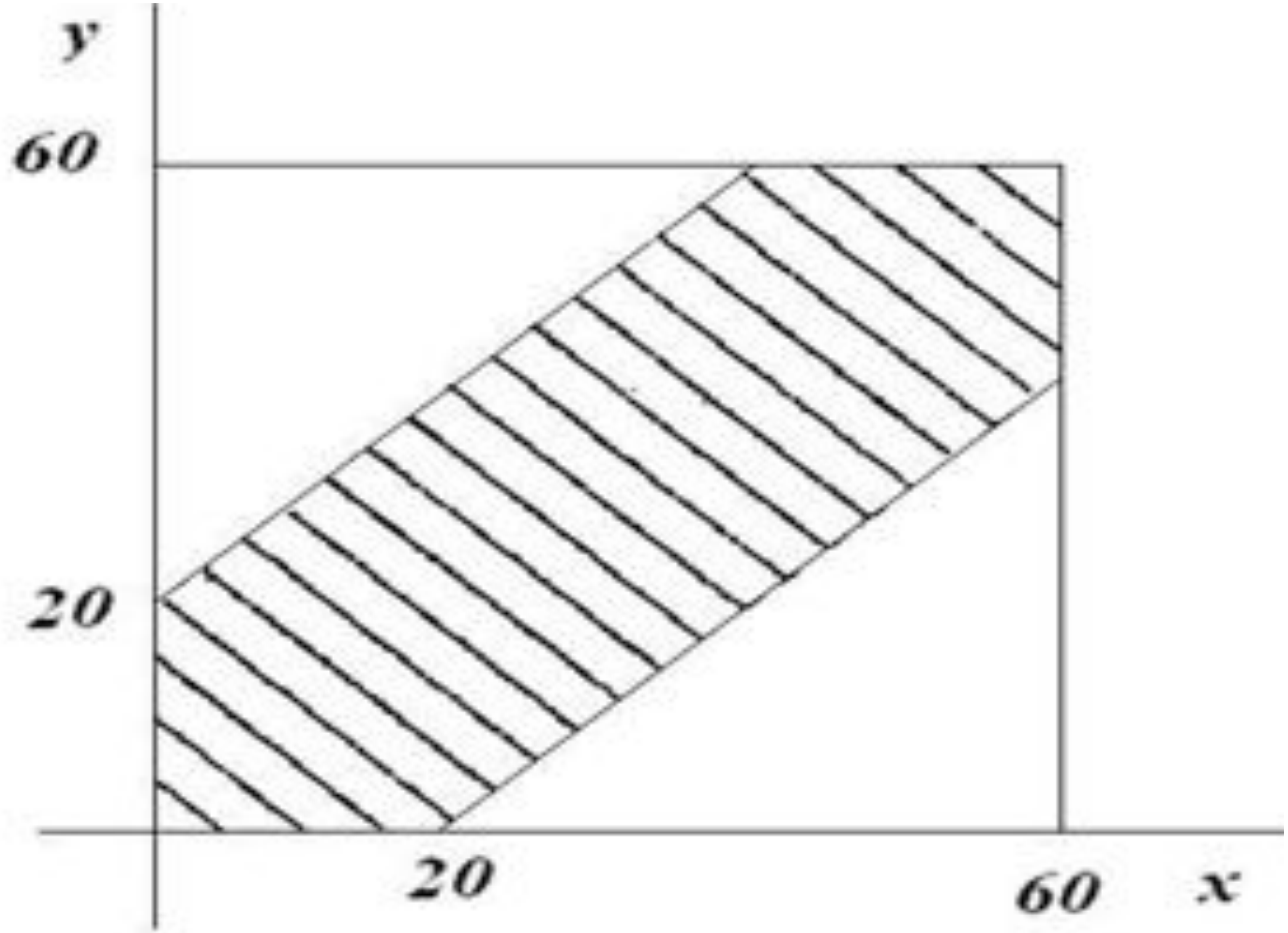
Решение. Искомая вероятность находится, как отношение длины отрезка, находящегося за отметкой 3 м (благоприятная область) к длине всего отрезка (всевозможные исходы):



$$\boldsymbol{P(A) = \frac{12}{15}}$$

Пример. Два лица А и В условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет другого в течении 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи лиц А и В, если приход каждого из них может произойти наудачу в течении указанного часа и моменты прихода независимы?

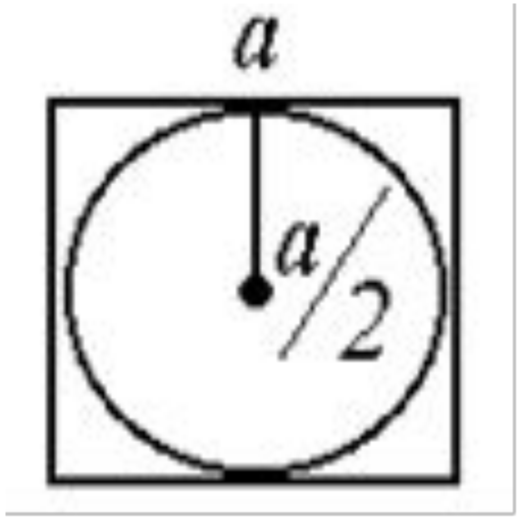
Решение. Момент прихода лица А обознач. – x, лица В – y. Чтобы встреча произошла, необходимо $|x - y| \leq 20$. Изобразим x и y как координаты на плоскости с единицей масштаба - 1 мин. Все исходы - квадрат со стороной 60, а



Искомая вероятность равна отношению площади

заштрихованной фигуры к площади всего квадрата:

$$P(A) = (60^2 - 40^2)/60^2 = 5/9$$



Пример. В квадрат со сторонами равными **а** наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что точка попадет внутрь вписанного в квадрат круга.

По формуле геометрического определения вероятности мерой пространства элементарных событий Ω является площадь квадрата $S_{кв} = a^2$.

Площадь круга - мера события А. $S_{кр} = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$

Искомая вероятность определяется по формуле:

$$P(A) = \frac{S_{кр}}{S_{кв}} = \frac{\pi a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{a}$$

Задание:

1. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 2a. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$.

Найти вероятность того, что монета не пересеет ни одной прямой.

2. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка.

Найти вероятность того, что точка окажется:

а) внутри вписанного в круг квадрата;

б) за пределами вписанного в круг квадрата.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Условной вероятностью события **A** при условии **B** (обозн. **p (A|B)**) наз. вероятность, вычисленную при условии, что событие B уже произошло и, тем самым, изменило ход эксперимента.

События называют **зависимыми**, если наступление одного из них изменяет вероятность появления другого.

События наз. **независимыми**, если происхождение одного из них никак не влияет на вероятность появления другого.

Теорема сложения совместных событий.

Вероятность суммы 2-х совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$\mathbf{p\ (A + B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B).}$$

Теорема сложения несовместных событий.

Вероятность суммы 2-х несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\mathbf{p\ (A + B) = p(A) + p(B).}$$

Теорема умножения вероятностей

Если события A и B *независимы* (наступление одного из них никак не влияет на шансы наступления другого), то вероятность произведения этих событий $A \cdot B$ равна произведению их вероятностей: $\boldsymbol{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}$.

Зависимые испытания.

Пусть A и B - зависимые. Условной вероятностью **P (B|A)** события B называют вероятность события B, найденную в предположении, что событие A наступило.

Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденного в

Пример.

При подготовке к экзамену две студентки успели выучить только первые пять билетов из двадцати.

Пусть событие A – «первая студентка вытянула один из этих (счастливых для неё) билетов»,

а событие B – «вторая студентка вытянула счастливый билет».

- Если событие *A* произошло, то среди оставшихся 19 билетов окажется только 4 счастливых, и значит, вероятность события *B* равна

$$P(B) = \frac{4}{19}$$

- Если же событие *A* не произошло, то число счастливых билетов среди оставшихся 19 не изменится, и значит, вероятность события *B* будет другой:

$$P(B) = \frac{5}{19}$$

Пример.

Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них независимо от другого может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. После поимки одного из них, в связи с увеличением числа сотрудников занятых в поисках, вероятность найти второго возрастает до 0,7.

С какой вероятностью в течение суток будут обнаружены оба преступника?

Решение.

Событие A – «обнаружены оба преступника». Разобьем его на простые:

B_1 – «обнаружен 1-ый», B_2 - «обнаружен 2-ой после того, как пойман 1-ый преступник».

По определению произведения событий

$A = B_1 \cdot B_2$.

Тогда по теореме умножения вероятностей для зависимых событий:

$$P(A) = P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35$$

Пример.

Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень.

Вероятность попадания первого стрелка – **0,9**;

второго стрелка – **0,8**.

Найти вероятность того, что

а) в мишень попадет только один стрелок.

б) мишень будет поражена.

Решение: а) Пусть событие **А** – в мишень попадет только один стрелок.

Рассмотрим события: $\mathbf{A_1}$ – в мишень попадет 1-ый; $\mathbf{A_2}$– в мишень попадет 2-ой.

По условию: $\mathbf{p(A_1) = 0{,}9;\ p(A_2) = 0{,}8.}$

Тогда вероятности промахов стрелков:

$$\mathbf{p\,(\bar{A}_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1; \qquad p\,(\bar{A}_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.}$$

Событие **А** означает: в мишень попадет только 1-ый (т. е. 1-ый попадет **и** 2-ой промахнётся) **или** попадет только 2-ой (т.е. 1-ый промахнётся **и** 2-ой попадет).

Тогда $\mathbf{P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}26.}$

б) Найдем вероятность события **В** – мишень будет поражена. Событие **В** произойдет, если в мишень попадет **хотя бы один** стрелок: **или** только 1-ый, **или** только 2-ой, **или** оба. Тогда:

$$\mathbf{P\,(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 =}$$

$$\mathbf{= 0{,}18 + 0{,}08 + 0{,}72 = \underline{0{,}98.}}$$

Найти вероятность события **В** также можно по теореме сложения совместных событий $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$.

$$P(B) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$$

$$\mathbf{= 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 1{,}7 - 0{,}72 = \underline{0{,}98.}}$$

Пример. В порт приходят корабли только из трех пунктов отправления. Вероятность появления корабля из 1-го пункта - **0,2**, из 2-го пункта – **0,6**. Найти вероятность прибытия корабля из 3-его пункта.

Решение. Обозначим **p (A_i)** – вероятность прибытия корабля из пункта **i.**

Из свойств вероятности следует, что:

$$p(A_1) + p\left(A_2\right) + p(A_3) = 1$$

Тогда вероятность прибытия корабля из 3-го пункта отправления равна

$$\mathbf{p\ (A_3) = 1 - 0{,}2 - 0{,}6 = 0{,}2.}$$

<u>Дидактическая единица. Теория вероятностей.</u>

<u>Задание №7.</u> Игральный кубик бросают один раз. Вероятность того, что на верхней грани выпадет число очков, больше чем три, равна …

<u>Варианты ответов:</u>

) $\frac{1}{2}$ **2)** $\frac{1}{3}$

) 0 **4)** 1

<u>Ответ:</u> пункт № 1, т.е. выпадет или 4, или 5, или 6.

Задание №8. Для посева берут семена из двух пакетов. Вероятность прорастания семян в первом и втором пакетах соответственно равна 0,9 и 0,7. Если взять по одному семени из каждого пакета, то вероятность того, что оба они прорастут, равна …

Варианты ответов: **1) 0,63** **2) 0,9**

3) 1,6 **4) 0,8**

Ответ: пункт № 1, т.к. согласно теоремы умножения вероятностей независимых событий $\mathbf{0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}63}$.

Задание №11. В урне находятся шесть шаров: три белых и три черных. Событие А – «вынули белый шар». Событие В – « вынули черный шар». Если опыт состоит в выборе только одного шара, то для этих событий **неверным** будет утверждение…

Варианты ответов:

1) «События А и В несовместны»

2) «События А и В равновероятны»

3) «Событие А невозможно»

4) «Вероятность события В равна 0,5»

Ответ: пункт № 3, другие пункты – верные утверждения.

<u>Задание №12.</u>

Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна …

<u>Варианты ответов:</u>

1) 0

2) $\frac{1}{2}$

3) 1

4) 2

<u>Ответ:</u>

пункт № 4, по свойствам вероятности.

Пример.

Преступник имеет 3 ключа. В темноте он открывает дверь выбирая ключ случайным образом. На открытие каждой двери он тратит 5 секунд. Найти вероятность что он откроет все двери за 15 секунд.

Решение:

Пусть событие A – «открыты все двери». Разобьём событие на более простые: B – «открыта 1-я дверь», C – «открыта 2-я дверь», D – «открыта 3-я дверь», тогда

Следовательно $P(A)=P(B \cdot C \cdot D)$, по теореме умножения вероятностей независимых событий $P(B \cdot C \cdot D) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$.

Вычислим вероятность событий B, C и D.

Имеется три равновозможных (каждый ключ выбираем из 3-х) исходов опыта. Каждому из событий B, C и D благоприятствует одно из них, поэтому

$$P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{3};$$

$$P(A) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

Пример

В урне 5 белых, 20 красных и 10 чёрных шаров, не отличающихся по размеру. Шары тщательно перемешивают и затем наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность, что он окажется белым или чёрным?

Решение:

Пусть A – появление белого или чёрного шара, разобьём событие на более простые. B – появление белого, C – появление чёрного, тогда $A = B + C$, следовательно $P(A) = P(B + C)$. Так как B и C события несовместные, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий

Вычислим вероятность событий В и С.

Имеется 35 равновозможных исходов опыта,

событию В благоприятствует 5 из них,

событию С – 10.

Следовательно: $P(B) = \frac{5}{35}$ $P(C) = \frac{10}{35}$

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{5}{35} + \frac{10}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$ -

вероятность, что вынутый наудачу шар окажется белым или чёрным.

Домашнее задание

1. Найти вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число а) делится без остатка на 8 и на 3;

б) не содержит цифру 5.

2. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка - 0,6; второго стрелка - 0,3. Найти вероятность того, что:

а) в мишень попадет только один стрелок;

б) оба промахнутся.