

# Множественная регрессия

На любой экономической показатель как правило оказывает влияние не один, а несколько факторов. Например, спрос на некоторое благо определяется не только ценой данного блага, но и ценами на замещающие и дополняющие блага, доходом потребителей и многими другими факторами. В этом случае вместо парной регрессии  $M(Y|x) = f(x)$  рассматривается *множественная регрессия*

$$M(Y|x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Задача оценки статистической взаимосвязи переменных  $Y$  и  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$  формулируется аналогично случаю парной регрессии. *Уравнение множественной регрессии* может быть представлено в виде

$$Y = f(\alpha, X) + \varepsilon$$

где  $X = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)})$  — вектор независимых объясняющих переменных (регрессоры),  $\alpha$  — вектор *параметров* (подлежащих определению),  $\varepsilon$  — *случайная ошибка (отклонение)*,  $Y$  — *зависимая (объясняемая) переменная*.

Наиболее простой моделью множественной регрессии является линейная модель множественной регрессии аддитивного вида.

*Теоретическое линейное уравнение регрессии* имеет вид:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)} + \dots + \alpha_k X^{(k)} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^k \alpha_j X^{(j)}$$

или для индивидуальных наблюдений

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i^{(1)} + \alpha_2 x_i^{(2)} + \dots + \alpha_k x_i^{(k)}$$

Здесь  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  — вектор размерности  $(m + 1)$  неизвестных параметров  $\alpha_j$ ,  $(j = 1, k)$ , называется  $j$ -ым теоретическим коэффициентом регрессии (частичным коэффициентом регрессии). Он характеризует чувствительность величины  $Y$  к изменению  $X^{(j)}$  регрессора, который отражает влияние на условное математическое ожидание зависимой переменной  $Y$  объясняющей переменной  $X^{(j)}$ , при условии, что все другие объясняющие переменные модели остаются постоянными.  $\alpha_0$  — *свободный член*, определяющий значение  $Y$  в случае, когда все объясняющие переменные равны нулю.

Методом оценки параметров уравнения множественной линейной регрессии является *метод наименьших квадратов* (МНК), суть которого состоит в минимизации суммы квадратов отклонений наблюдаемых значений зависимой переменной  $Y$  от ее значений  $\hat{Y}$ , получаемых по уравнению регрессии. Определим предпосылки МНК, позволяющие его применить

### *Предпосылки МНК*

1. *Математическое ожидание случайного отклонения  $\varepsilon$ , равно нулю для всех наблюдений:*

$$\forall i: M(\varepsilon_i) = 0$$

2. *Гомоскедастичность (постоянство дисперсии отклонений). Дисперсия случайных отклонений  $e_i$  постоянная:*

$$\forall (i, j): D(e_i) = D(e_j) = \sigma^2$$

3. *Отсутствие автокорреляции.*

Случайные отклонения  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_j$  являются независимыми друг от друга

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma^2, & i = j \end{cases}$$

## *Предпосылки МНК (продолжение)*

4. *Случайное отклонение должно быть независимо от объясняющих переменных:*

$$\forall(i, j): \text{cov}(\varepsilon_i, x_i^{(j)}) = 0$$

5. *Модель является линейной относительно параметров. Для случая множественной линейной регрессии существенными являются еще две предпосылки.*
6. *Отсутствие мультиколлинеарности.*  
Между объясняющими переменными отсутствует строгая (сильная) линейная зависимость.
7. *Ошибки  $\varepsilon_i$  имеют нормальное распределение  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$ .*

Теоретическое уравнение регрессии оценивается *эмпирическим уравнением регрессии*, которое имеет вид:

$$Y = a_0 + a_1 X^{(1)} + a_2 X^{(2)} + \dots + a_k X^{(k)} + e = a_0 + \sum_{j=1}^k a_j X^{(j)} + e$$

Здесь  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$  — оценки теоретических значений  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  коэффициентов регрессии (*эмпирические коэффициенты регрессии*);  $e$  — оценка отклонения. Очевидно, для индивидуальных наблюдений имеем:

$$y_i = a_0 + a_1 x_i^{(1)} + a_2 x_i^{(2)} + \dots + a_k x_i^{(k)} + e_i$$