



Московский Авиационный
(Национальный Исследовательский
Институт
Университет)

«Программно- Определяемые Радиосистемы»

*Серкин Фёдор
Борисович*

*Кафедра 408 –
«Инфокоммуникации»*

Литература:

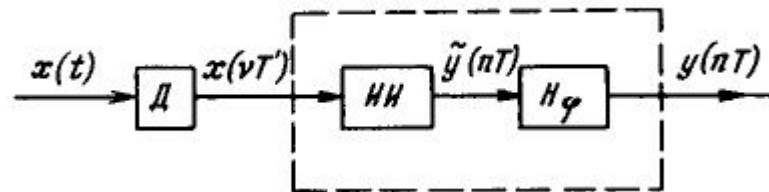
1. Скляр Б., «Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение», «Вильямс», Москва, Санкт-Петербург, Киев, 2003.
2. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н., «Цифровая обработка сигналов», «Радио и связь», Москва, 1990.
3. Максфилд К., «Проектирование на ПЛИС. Архитектура, средства и методы», «Додэка-XXI», Москва, 2007.
4. «IEEE 1012 Standard for Software Verification and Validation», IEEE, New York, 2005.
5. Tuttlebee W., «software defined radio. Enabling technology», WILEY, New York, 2002.

Содержание курса:

- I. Введение в ПОР.
- II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.
- III. Реализация на жесткой и программируемой логике.
- IV. Программируемое радио.

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Увеличение частоты дискретизации (Интерполяция) цифрового сигнала.

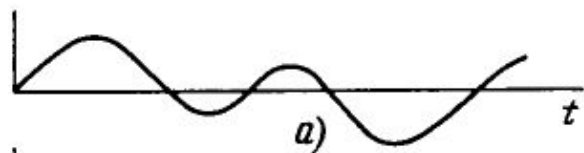


$$H_\varphi(e^{j2\pi w}) = e^{-jR(w)2\pi w}$$

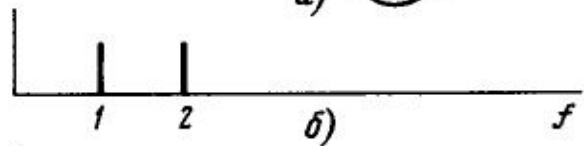
$$|H_\varphi(\cdot)| = 1$$

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

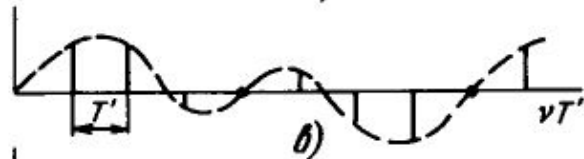
Увеличение частоты дискретизации (Интерполяция) цифрового



$$x(\nu T') = \sin 2\pi\nu w'_1 + \sin 2\pi\nu w'_2 = \sin(\pi\nu/4) + \sin(\pi\nu/2)$$

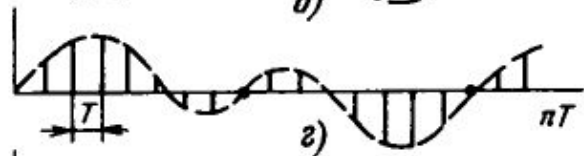


$$\tilde{y}(nT) = \sin 2\pi n w_1 + \sin 2\pi n w_2 = \sin(\pi n/8) + \sin(\pi n/4)$$



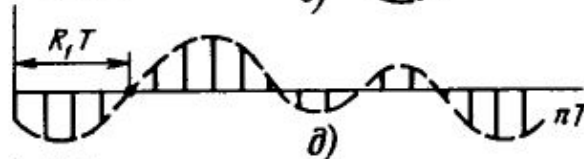
Вариант

$$1. \quad y(nT) = \sin\left(\pi n/8 - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4} - \pi\right)$$



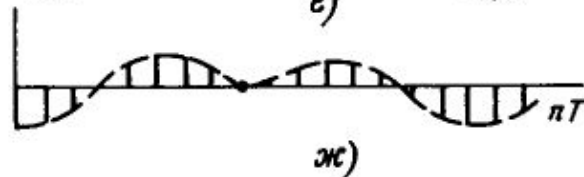
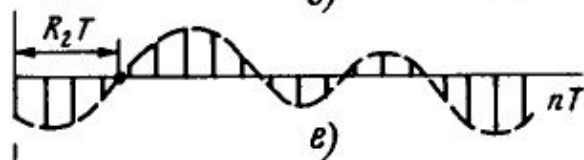
Вариант

$$2. \quad y(nT) = \sin(\pi n/8 - 7\pi/16) + \sin(\pi n/4 - 7\pi/8)$$



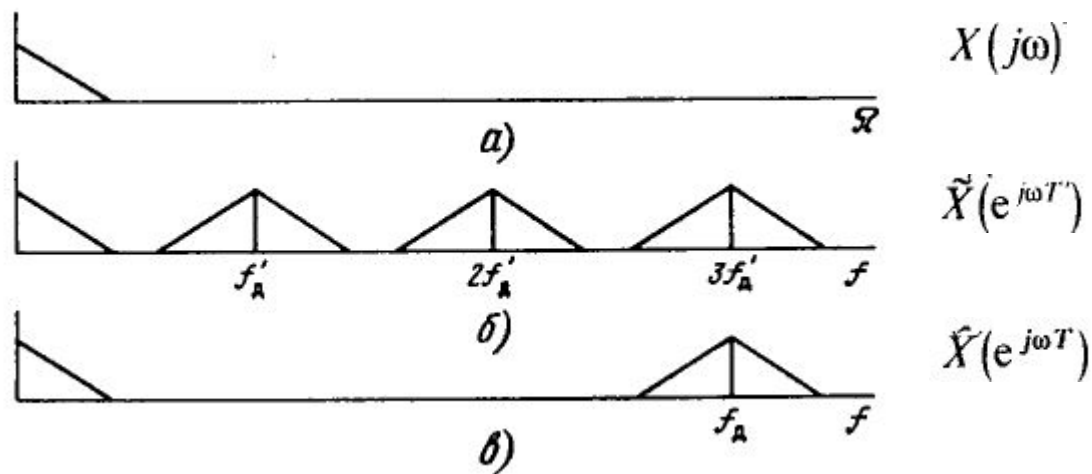
Вариант

$$3. \quad y(nT) = \sin(\pi n/8 - \pi/2) + \sin(\pi n/4 - \pi/2)$$



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

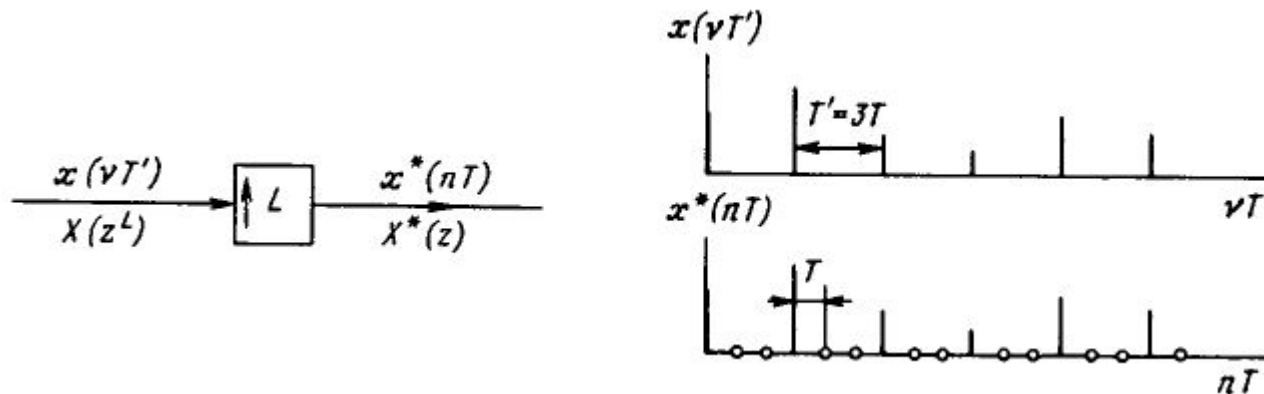
Увеличение частоты дискретизации (Интерполяция) цифрового сигнала.



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

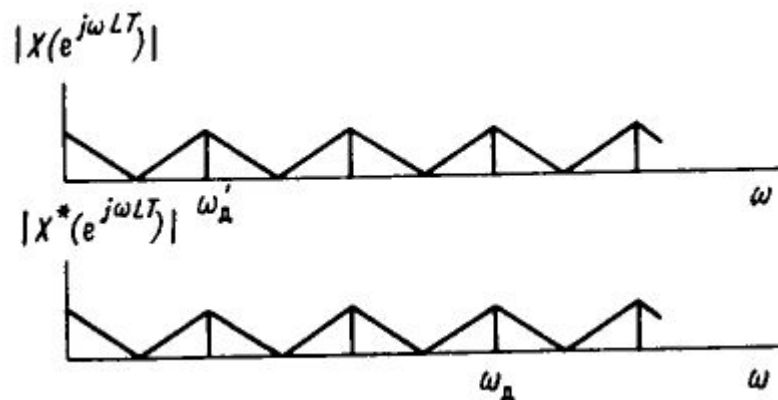
Экспандер частоты дискретизации.

$$x^*(nT) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}T'\right) & \text{при } n=0, L, 2L, \dots, \\ 0 & \text{при других } n. \end{cases}$$



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Экспандер частоты дискретизации.



$$X(z') = \sum_{v=0}^{\infty} x(vT') (z')^{-v},$$

где $z' = \exp(j\omega T')$,

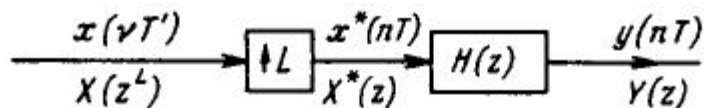
$$X^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x^*(nT) z^{-n},$$

где $z = \exp(j\omega T)$.

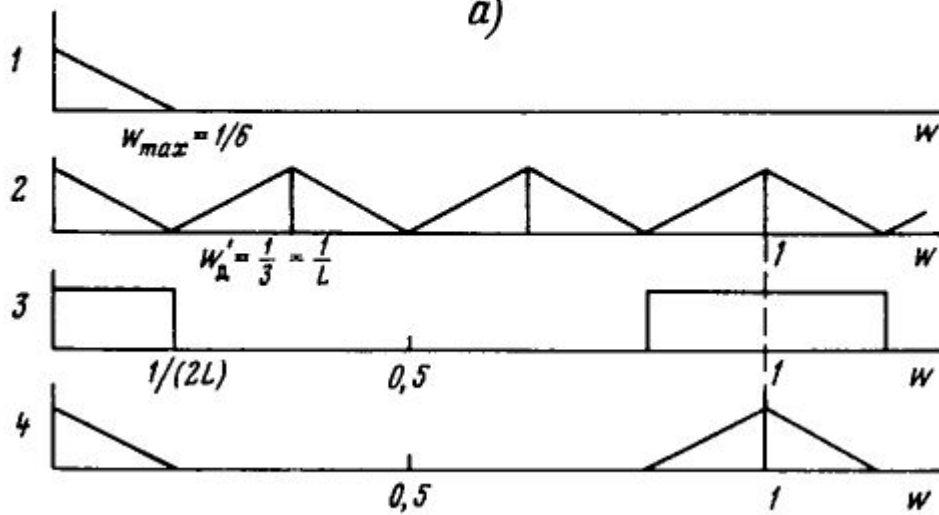
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Система интерполяции с целочисленным коэффициентом L

$$X^*(e^{j2\pi w}) = X(e^{j2\pi L w}) = \frac{1}{T'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(jw + jk \frac{1}{L}\right),$$



а)



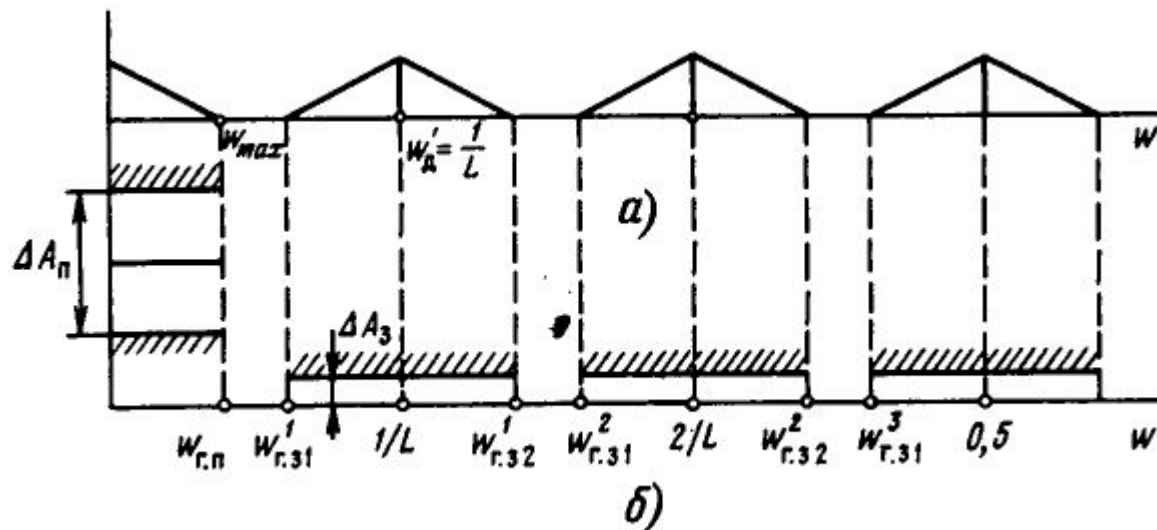
б)

$$|H(e^{j2\pi w})| = \begin{cases} L & \text{при } w \in [0, 1/(2L)], \\ 0 & \text{при } w \in [1/(2L); 0,5]. \end{cases}$$

$$Y(e^{j2\pi w}) = \frac{1}{T'} X(jw) e^{j\phi(w)},$$

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Характеристики фильтров в реальных системах интерполяции.

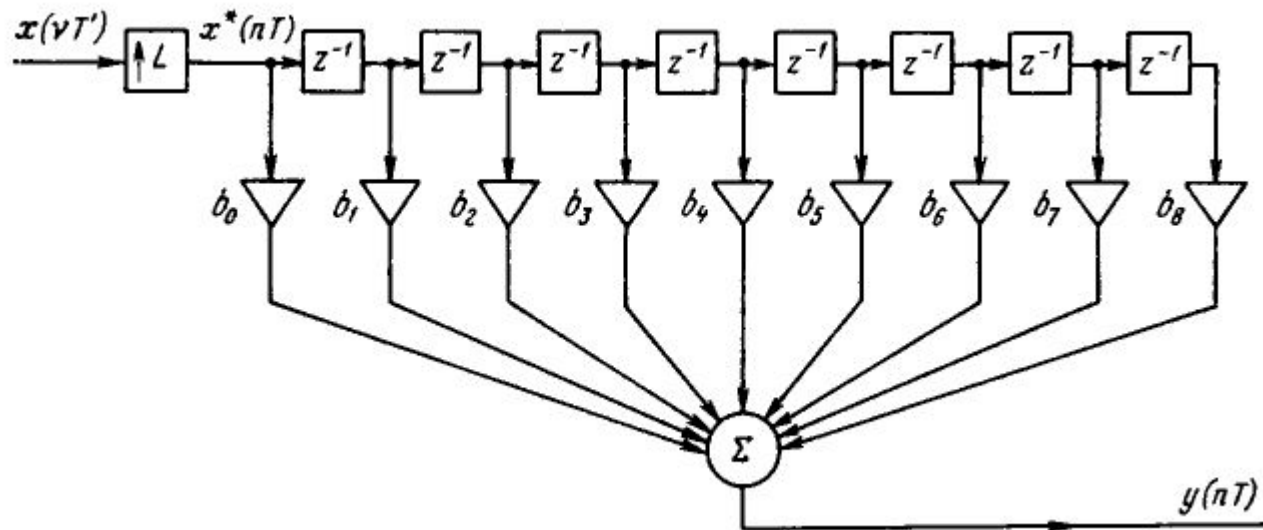


$$A(w) = |H(e^{j2\pi w})| \approx \begin{cases} L & \text{при } w \in [0, w_{max}], \\ 0 & \text{при } w \in \left[r \frac{1}{L} - w_{max}, r \frac{1}{L} + w_{max} \right], \\ & r = 1, 2, \dots, [L/2], \end{cases}$$

где $w_{max} = f_{max}/f_d$, а $[L/2]$ — целая часть числа $L/2$

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

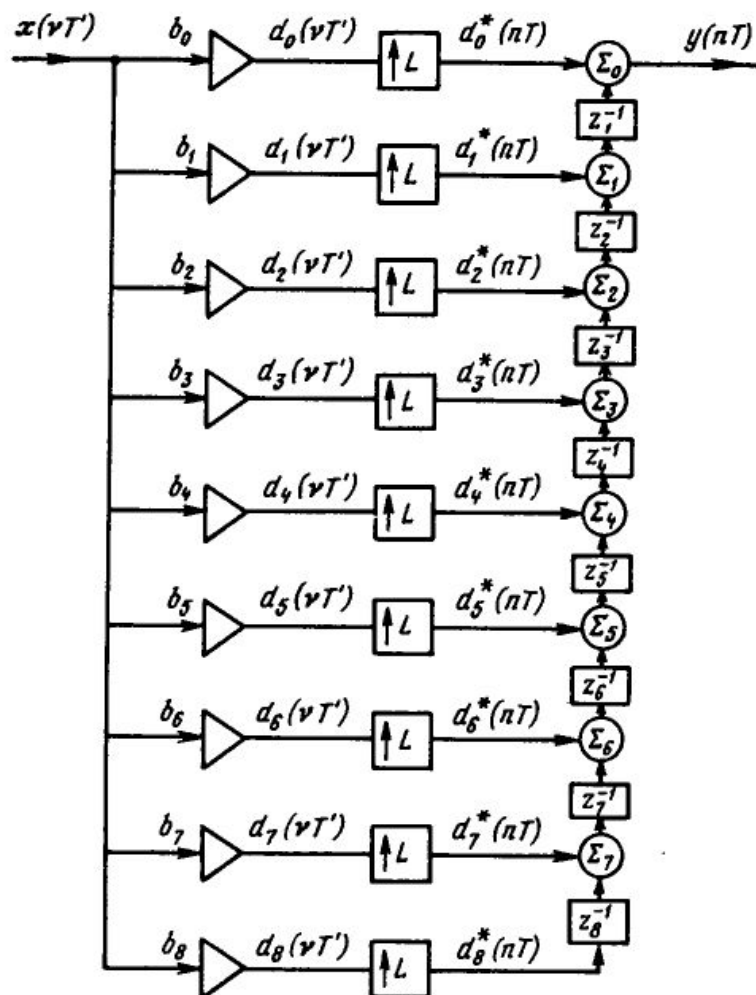
Структуры систем интерполяции с целочисленным коэффициентом L .



1. Умножители работают только по ненулевым отсчетам сигнала
2. Фильтр работает на высокой частоте дискретизации.

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

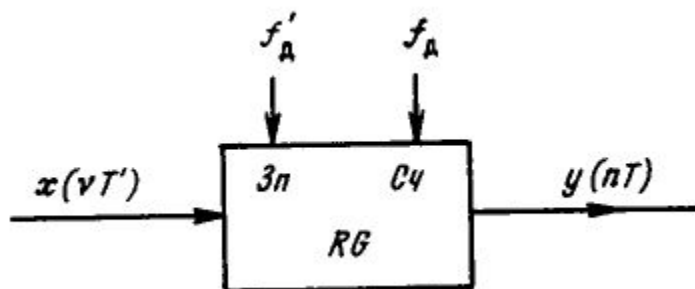
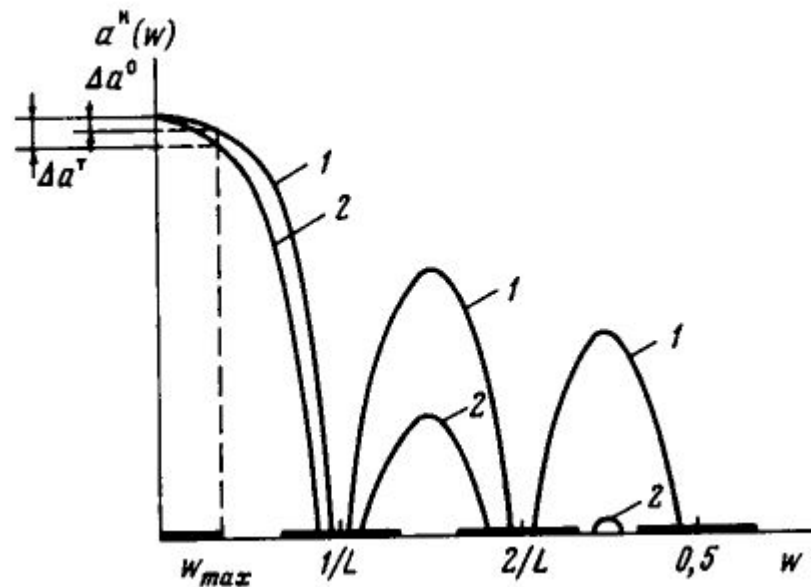
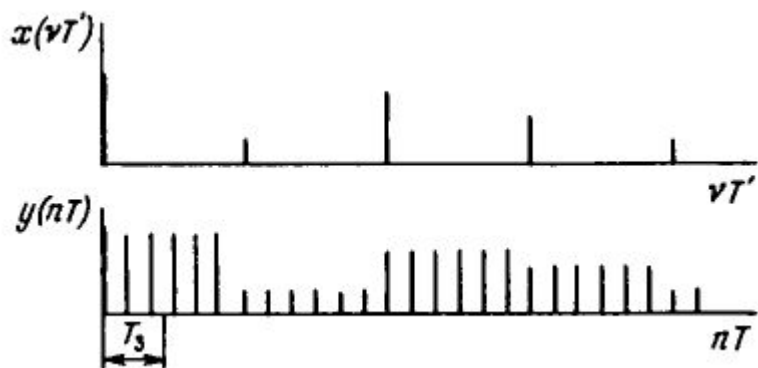
Структуры систем интерполяции с целочисленным коэффициентом L .



Умножители работают на низкой частоте дискретизации, а задержки и сумматоры на высокой.

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Цифровая фильтрация при полиномиальной интерполяции нулевого порядка.



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Цифровая фильтрация при полиномиальной интерполяции первого порядка.

$$y(nT) = \frac{k+1}{L} x(vT') + \frac{L-k-1}{L} x((v-1)T'),$$

$$y(nT) = \sum_{l=0}^{2L-2} b_l x^*(nT-lT).$$

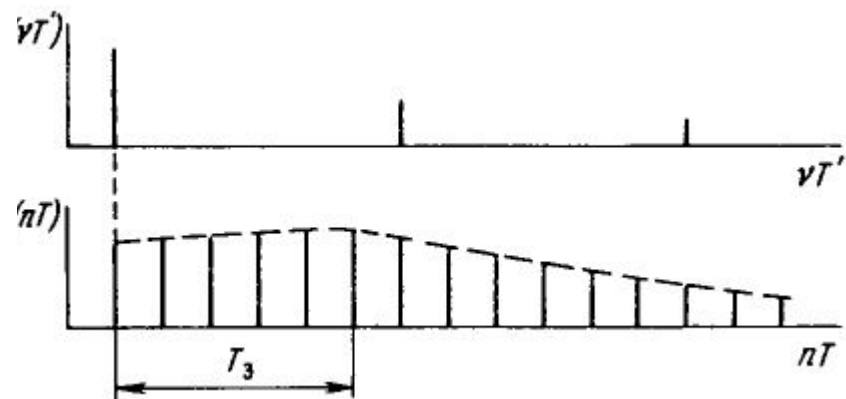
$$b_l = \begin{cases} \frac{l+1}{L} & \text{при } l=0, 1, \dots, L-1, \\ \frac{2L-1-l}{L} & \text{при } l=L, L+1, \dots, 2L-2. \end{cases}$$

$$H(z) = \sum_{l=0}^{2L-2} b_l z^{-l},$$

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

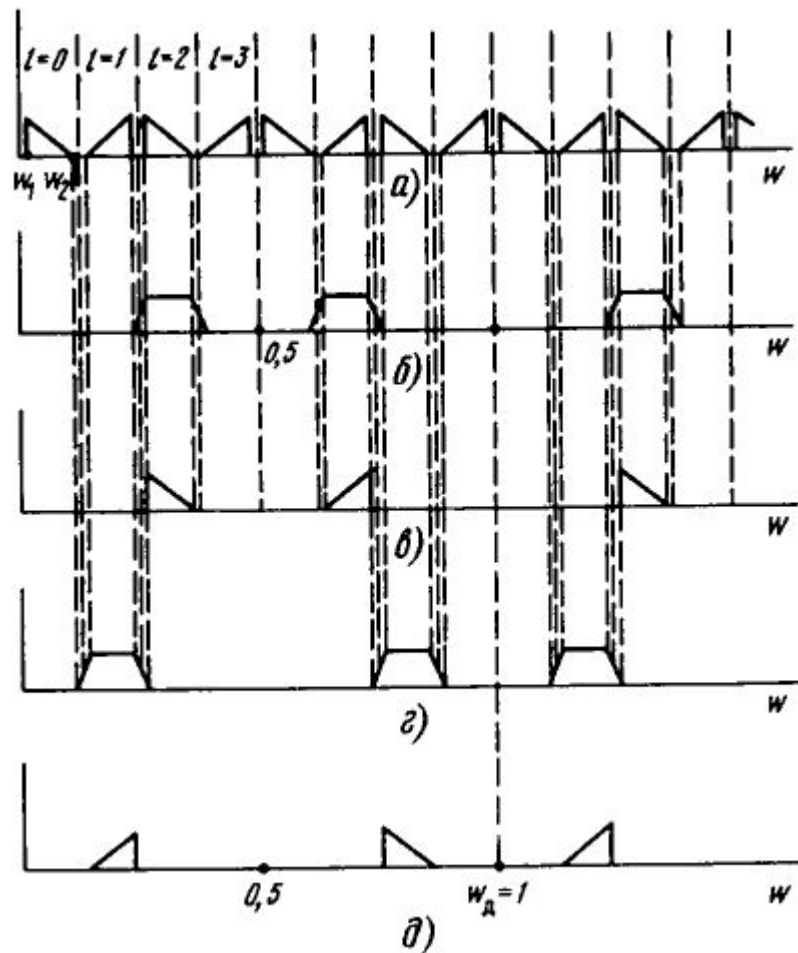
Цифровая фильтрация при полиномиальной интерполяции первого порядка.

	1		2	3	2		1	
	b_0		b_1	b_2	b_3		b_4	
	0	0	$x(T')$	0	0			$n = 5$
	$x(2T')$	0	0	$x(T')$	0			$n = 6$
	0	$x(2T')$	0	0	$x(T')$			$n = 7$
	0	0	$x(2T')$	0	0			$n = 8$



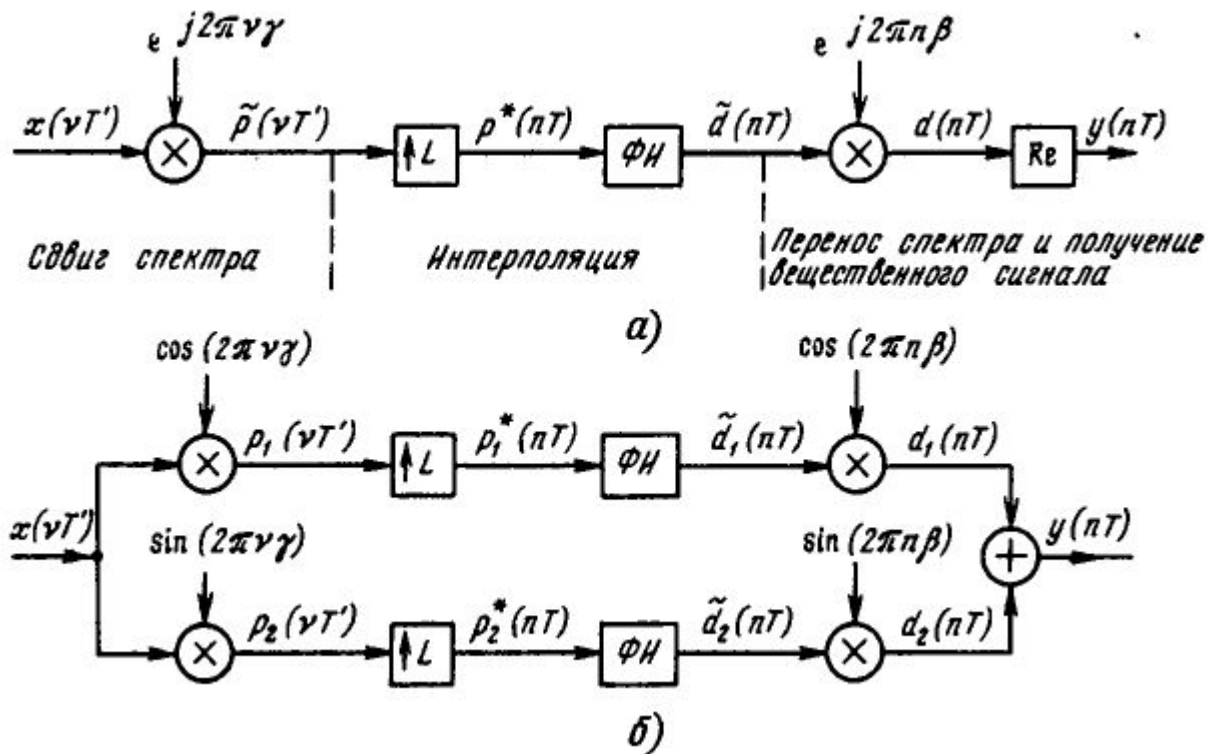
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Перенос спектра при интерполяции.



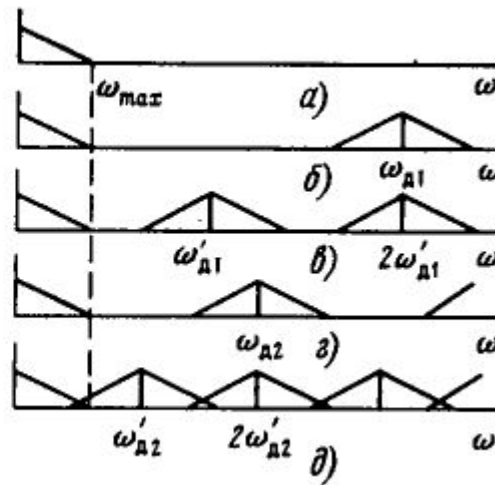
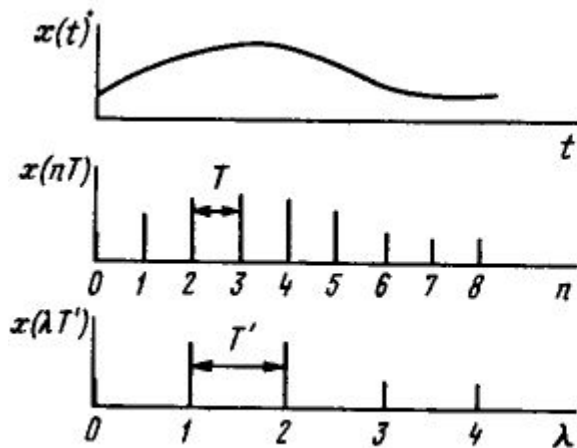
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Перенос спектра при интерполяции.



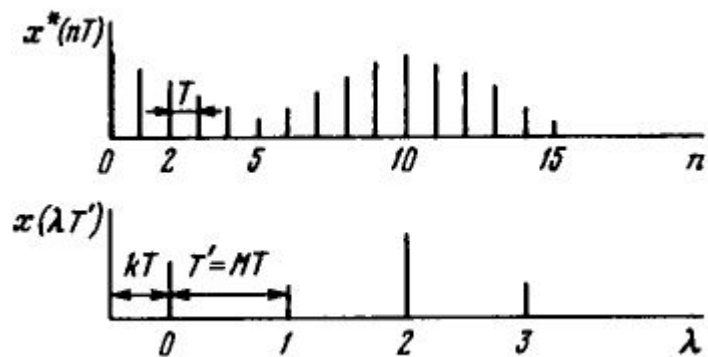
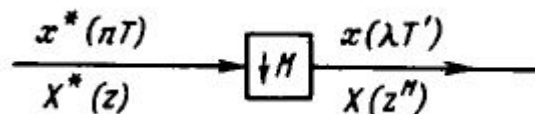
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Уменьшение частоты дискретизации (Децимация) цифрового сигнала.



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

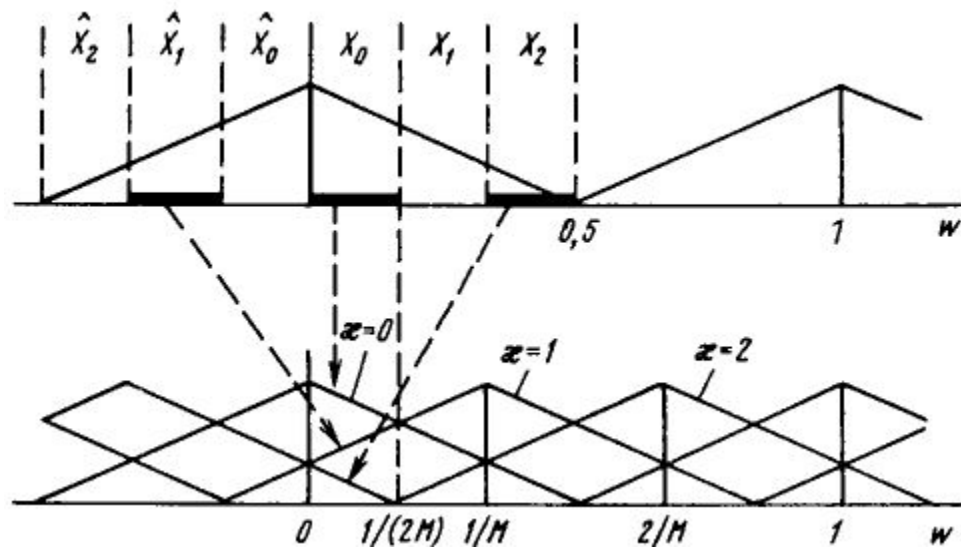
Компрессор частоты дискретизации.



$$x(\lambda T' + k T') = x^*(n T),$$

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

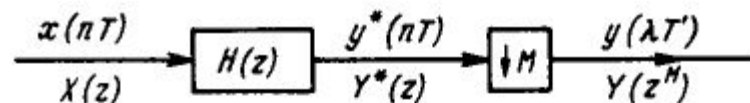
Компрессор частоты дискретизации.



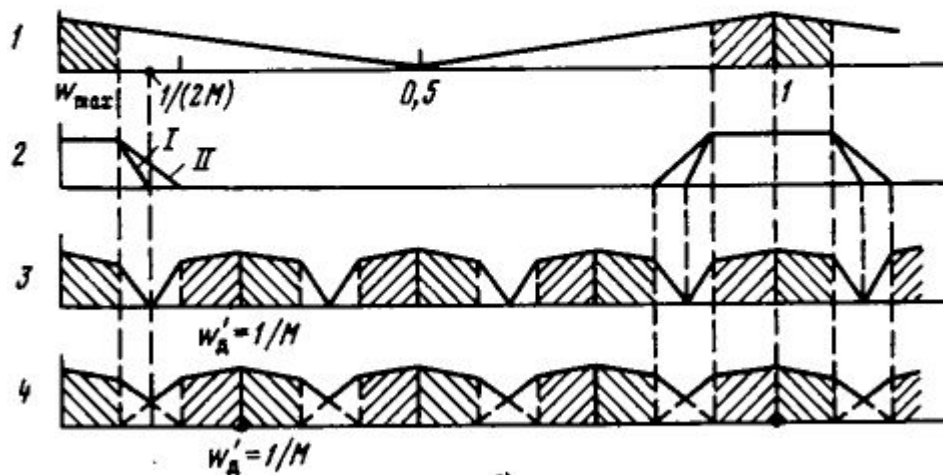
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Система децимации с целочисленным коэффициентом M .

$$A(\omega) = |H(e^{j2\pi\omega})| = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in [0, \omega_{max}], \\ 0 & \text{при } \omega \in [\theta; 0,5], \end{cases}$$



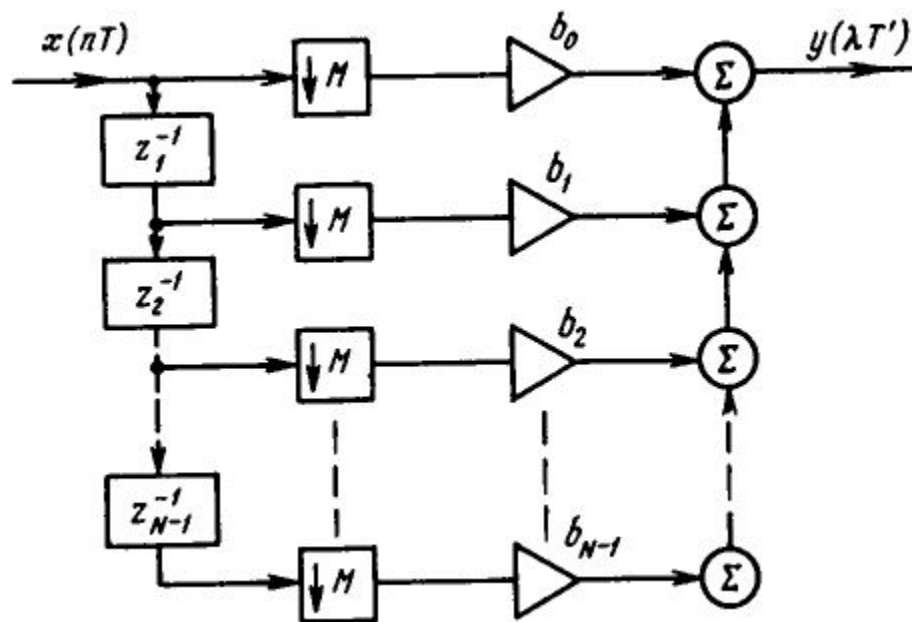
а)



б)

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

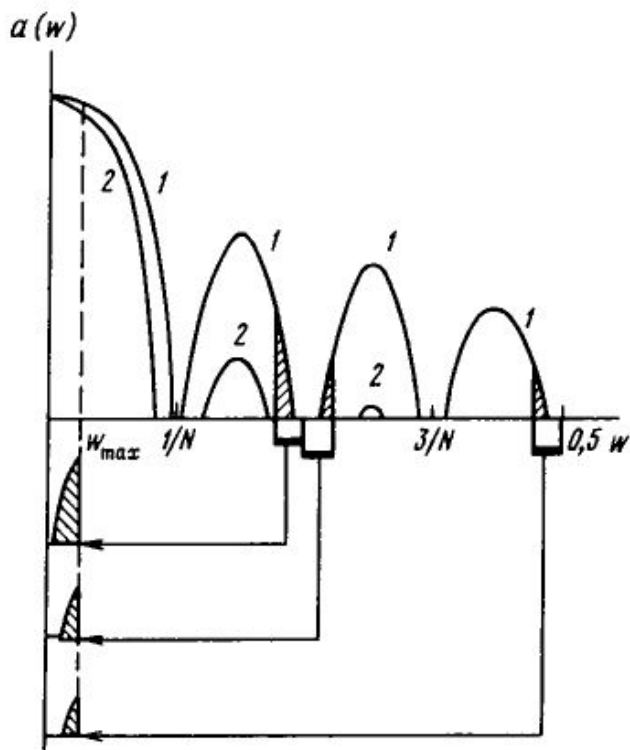
Структуры систем децимации с целочисленным коэффициентом M .



$$y(\lambda T') = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{G-1} b_{rM+k} x((\lambda-r)MT - kT),$$

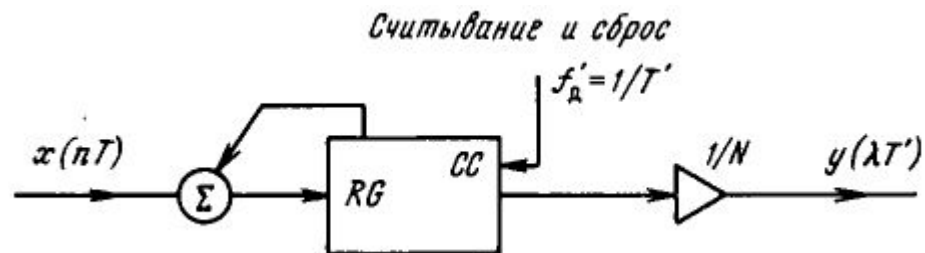
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Однородный фильтр при децимации.



$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} z^{-l}$$

$$A(w) = |H(e^{j2\pi w})| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin \pi N w}{\sin \pi w} \right|$$



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Триангулярный фильтр при децимации.

$$H(z) = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{l=0}^{N-1} z^{-l} \right)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{2N-2} b_l z^{-l},$$

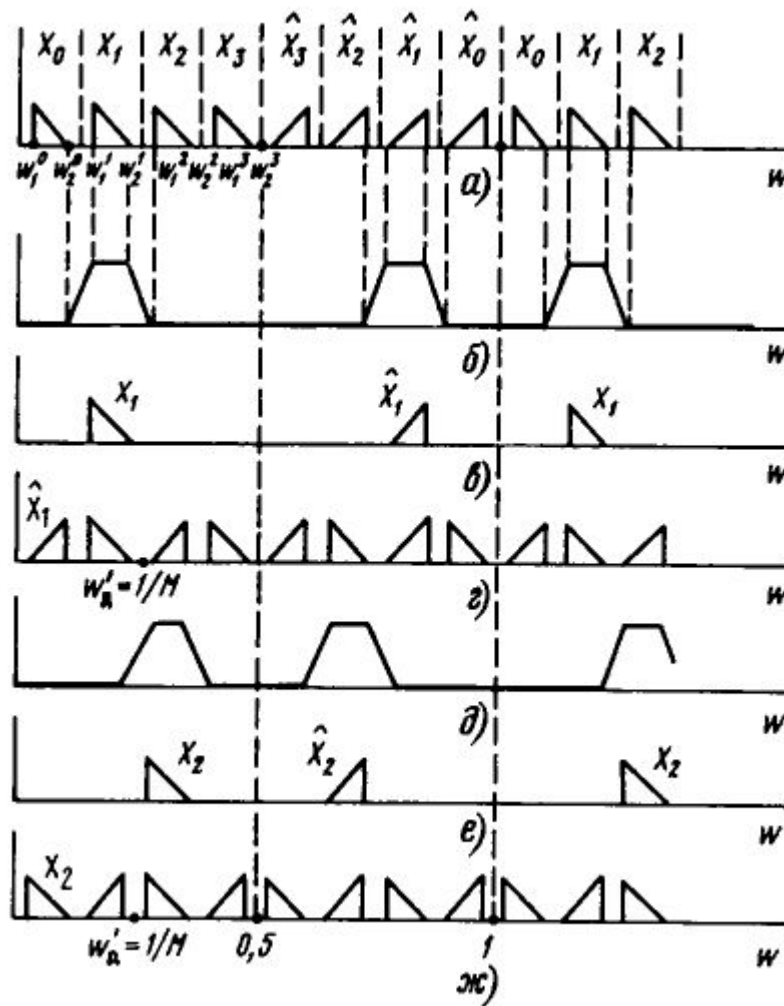
где

$$b_l = \begin{cases} l+1 & \text{при } l=0, 1, \dots, N-1, \\ 2N-1-l & \text{при } l=N, N+1, \dots, 2N-2. \end{cases}$$

$$A(w) = |H(e^{j2\pi w})| = \frac{1}{N^2} \left(\frac{\sin \pi N w}{\sin \pi w} \right)^2.$$

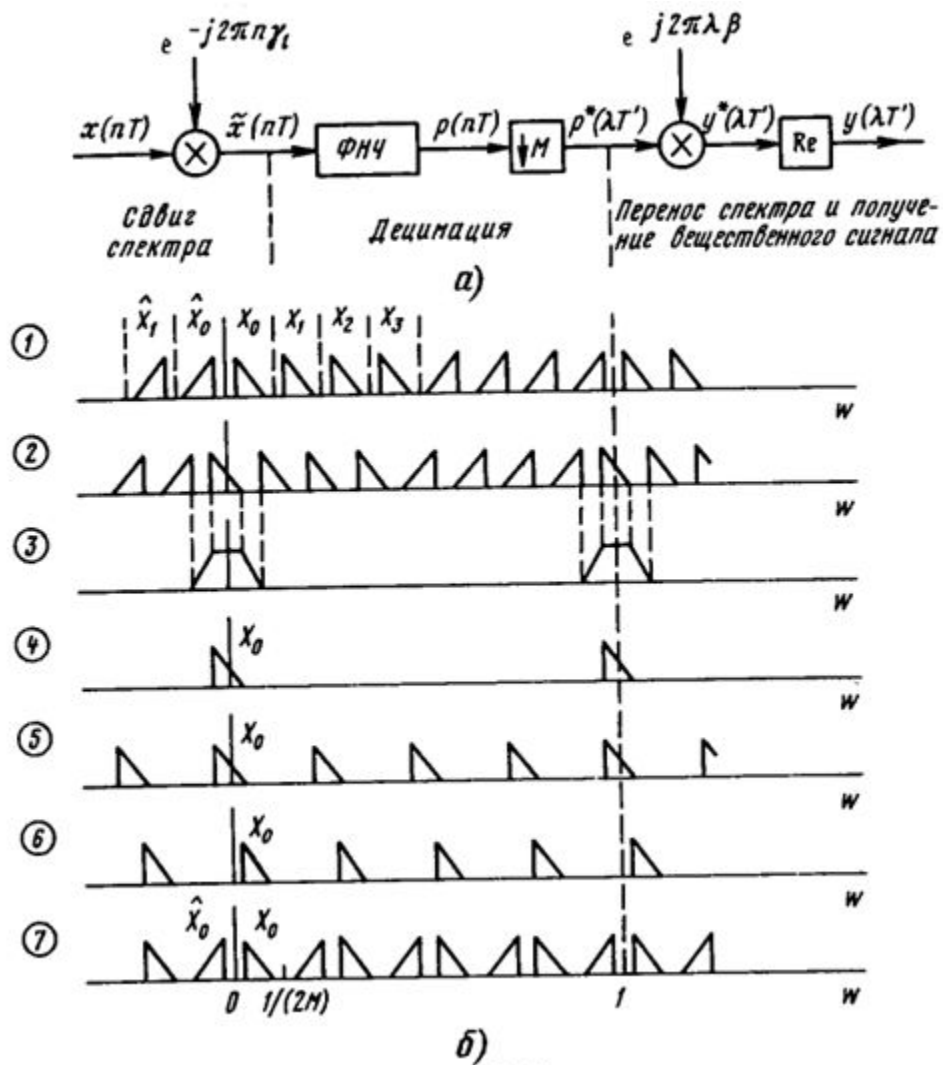
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Перенос спектра при децимации.



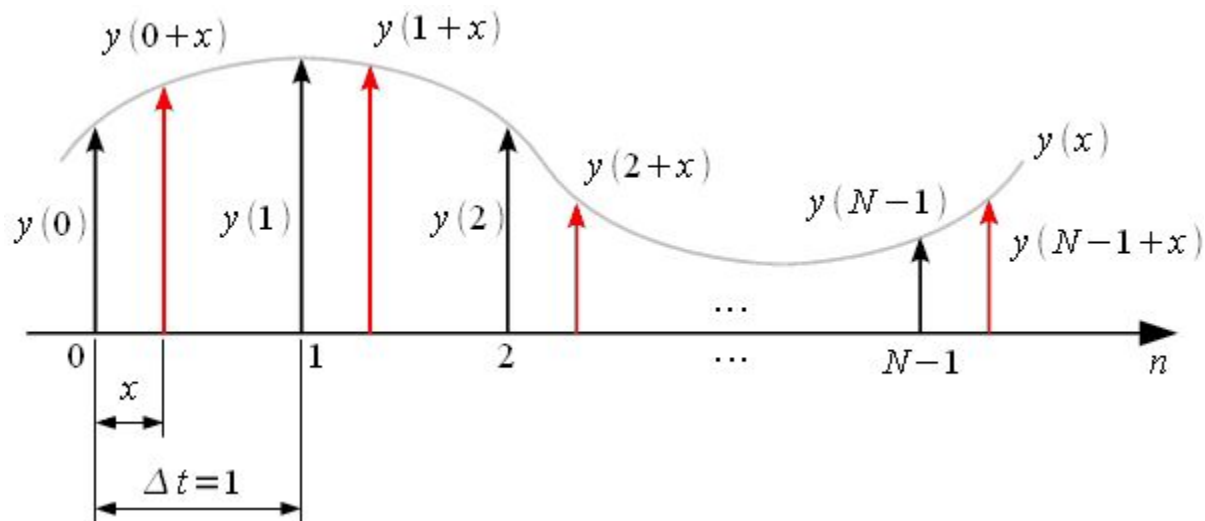
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Перенос спектра при децимации.



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Фильтр Фарроу и дробная передискретизация.



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Представление полиномов при полиномиальной интерполяции.

$$y(x) = P^{N-1}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot x^n$$

Рассмотрим подробнее выражение (1), а именно раскроем сумму:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_{N-2} \cdot x^{N-2} + a_{N-1} \cdot x^{N-1}$$

Вынесем в выражении (2) x за скобки:

$$y(x) = a_0 + x \cdot (a_1 + a_2 \cdot x + \dots + a_{N-2} \cdot x^{N-3} + a_{N-1} \cdot x^{N-2})$$

Снова вынесем x за скобки:

$$y(x) = a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + \dots + a_{N-2} \cdot x^{N-4} + a_{N-1} \cdot x^{N-3}))$$

Таким образом вынося возможное количество раз x за скобки, получим множество вложенных скобок:

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + \dots + x \cdot (a_{N-2} + a_{N-1} \cdot x))) = \dots \\ &\dots = x \cdot (x \cdot (\dots x \cdot (x \cdot a_{N-1} + a_{N-2}) + \dots + a_2) + a_1) + a_0 \end{aligned}$$

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Представление полиномов при полиномиальной интерполяции.

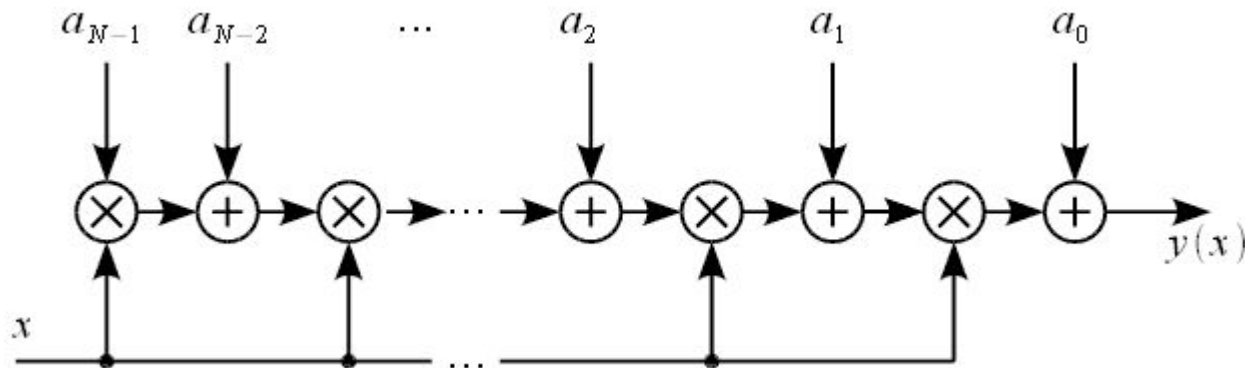
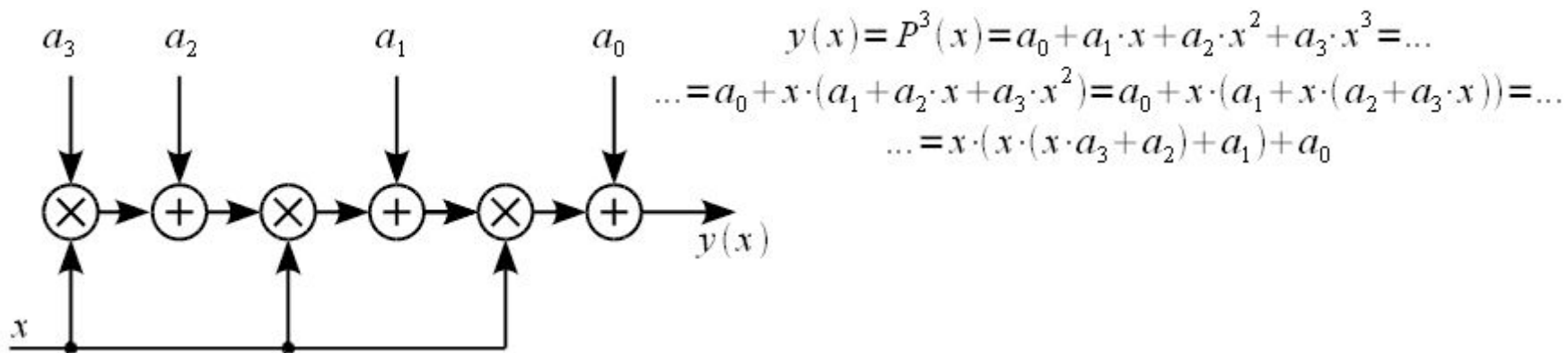


Схема расчета кубического полинома.



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Расчет коэффициентов кубического полинома.

$$y(0) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot 0^n;$$

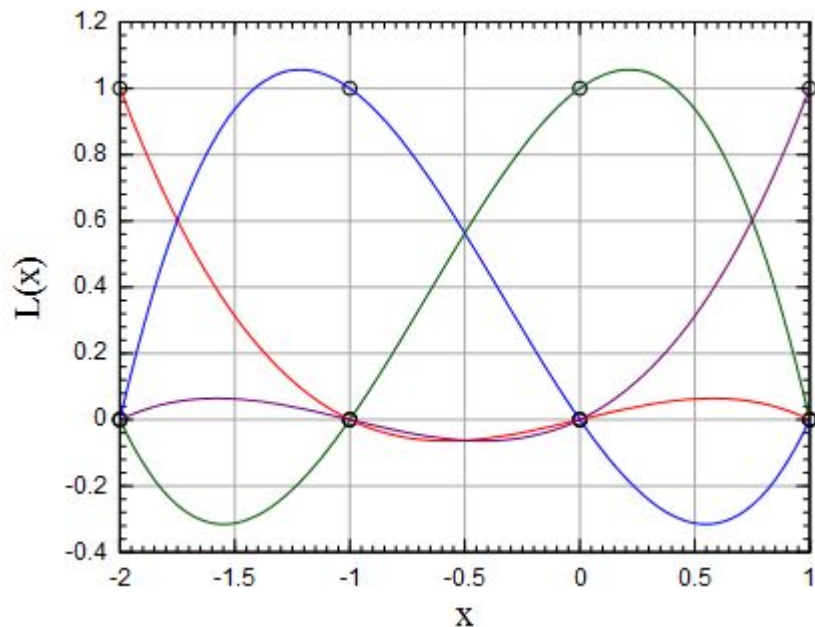
$$y(1) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot 1^n;$$

$$y(2) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot 2^n;$$

$$\dots$$
$$y(N-1) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot (N-1)^n$$

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Ортогональные полиномы Лагранжа. Фильтр Фарроу.



$$y(x) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cdot L_n^{N-1}(x) \quad (1)$$

$$L_n^{N-1}(x) = \frac{\prod_{k=0, k \neq n}^{N-1} (x - t_k)}{\prod_{k=0, k \neq n}^{N-1} (t_n - t_k)} \quad (2)$$

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Полином Лагранжа для N=4 и моментов дискретизации [-2,-1,0,1]

$$t_0 = -2;$$

$$t_1 = -1;$$

$$t_2 = 0;$$

$$t_3 = 1$$

$$L_0^3(x) = \frac{(x-t_1) \cdot (x-t_2) \cdot (x-t_3)}{(t_0-t_1) \cdot (t_0-t_2) \cdot (t_0-t_3)};$$

$$L_0^3(x) = \frac{(x+1) \cdot x \cdot (x-1)}{(-2+1) \cdot (-2) \cdot (-2-1)} = -\frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{6} \cdot x;$$

$$L_1^3(x) = \frac{(x-t_0) \cdot (x-t_2) \cdot (x-t_3)}{(t_1-t_0) \cdot (t_1-t_2) \cdot (t_1-t_3)};$$

$$L_1^3(x) = \frac{(x+2) \cdot x \cdot (x-1)}{(-1+2) \cdot (-1) \cdot (-1-1)} = \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 - x;$$

$$L_2^3(x) = \frac{(x-t_0) \cdot (x-t_1) \cdot (x-t_3)}{(t_2-t_0) \cdot (t_2-t_1) \cdot (t_2-t_3)};$$

$$L_2^3(x) = \frac{(x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{2 \cdot 1 \cdot (-1)} = -\frac{1}{2} \cdot x^3 - x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + 1;$$

$$L_3^3(x) = \frac{(x-t_0) \cdot (x-t_1) \cdot (x-t_2)}{(t_3-t_0) \cdot (t_3-t_1) \cdot (t_3-t_2)};$$

$$L_3^3(x) = \frac{(x+2) \cdot (x+1) \cdot x}{(1+2) \cdot (1+1) \cdot (1)} = \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x;$$

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Полином Лагранжа для $N=4$ и моментов дискретизации $[-2,-1,0,1]$

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 y(n) \cdot L_n^3(x) = \dots$$

$$\dots = y(0) \cdot L_0^3(x) + y(1) \cdot L_1^3(x) + y(2) \cdot L_2^3(x) + y(3) \cdot L_3^3(x)$$

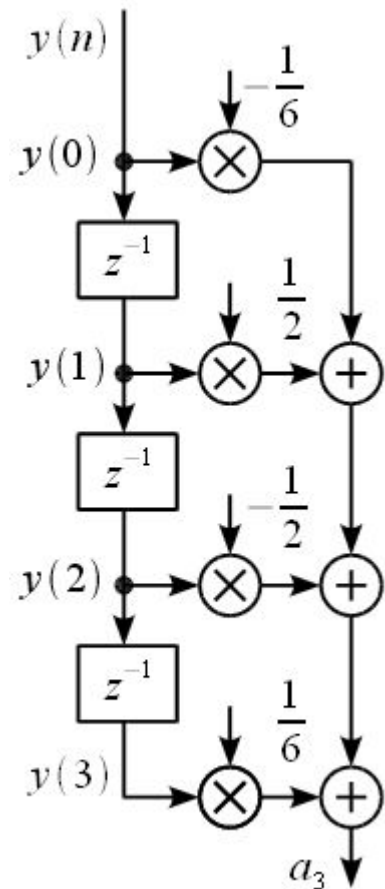
$$y(x) = x^3 \cdot a_3 + x^2 \cdot a_2 + x \cdot a_1 + a_0, \quad (3)$$

$$a_3 = -\frac{1}{6} \cdot y(0) + \frac{1}{2} \cdot y(1) - \frac{1}{2} \cdot y(2) + \frac{1}{6} \cdot y(3);$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot y(1) - y(2) + \frac{1}{2} \cdot y(3); \quad (4)$$

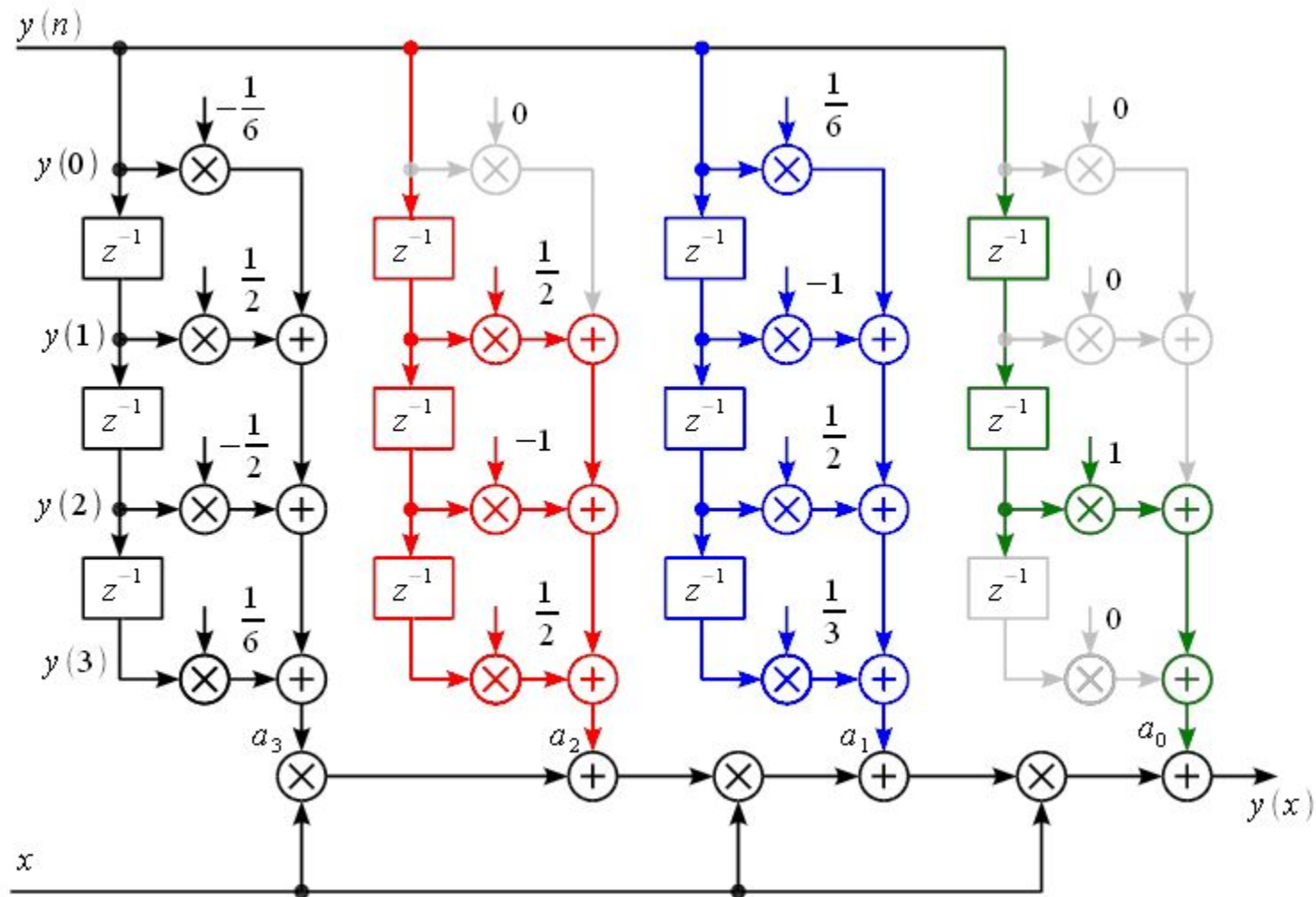
$$a_1 = \frac{1}{6} \cdot y(0) - y(1) + \frac{1}{2} \cdot y(2) + \frac{1}{3} \cdot y(3);$$

$$a_0 = y(2).$$



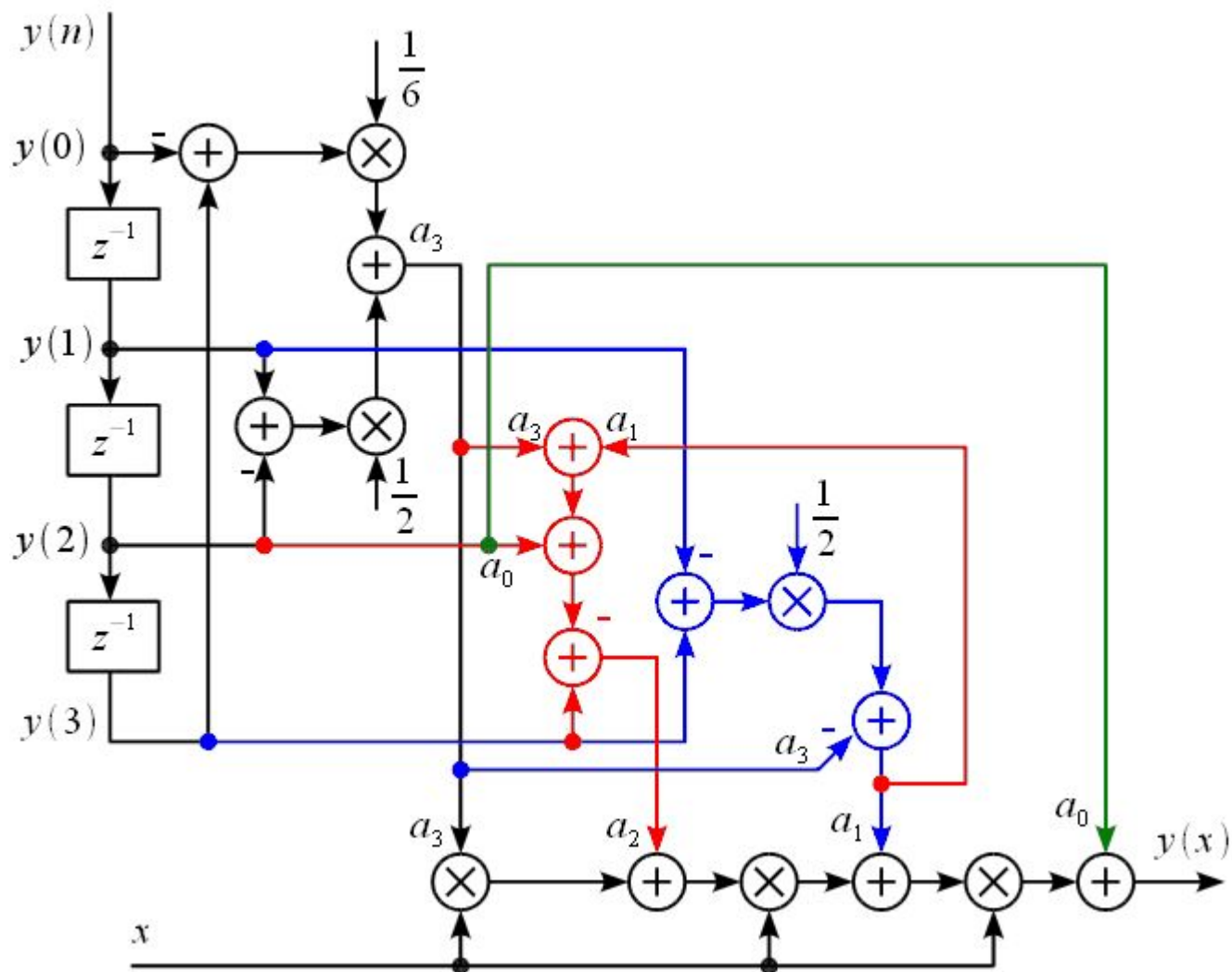
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Схема фильтра Фарроу третьего порядка.



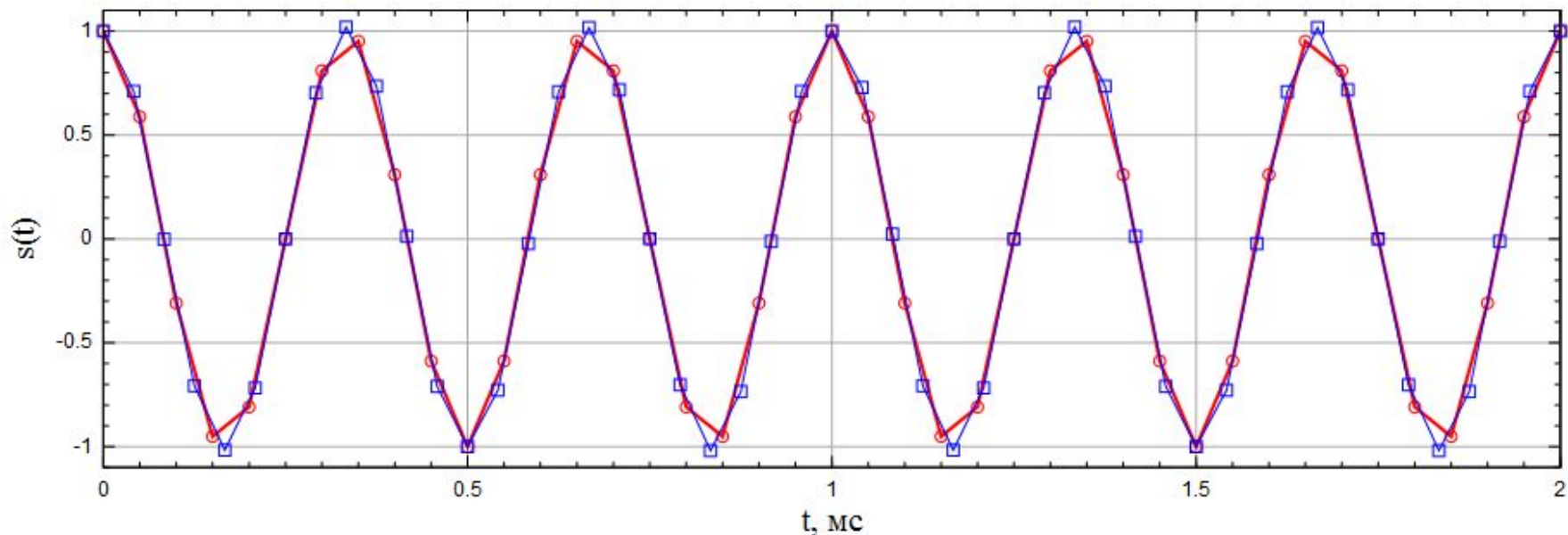
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Схема модифицированного фильтра Фарроу третьего порядка.



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Пример передискретизации сигнала с помощью фильтра Фарроу.

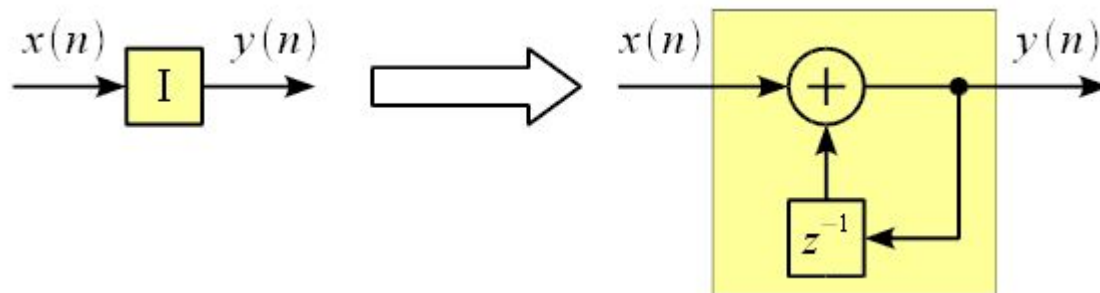


Сигнал с частотой 3 КГц, дискретизированный с частотой 20 КГц
передискретизируется
С частотой 24 КГц для достижения целого числа отсчетов на период.

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

БИХ-Фильтр интегратор.

$$y(n) = y(n-1] + x(n)$$



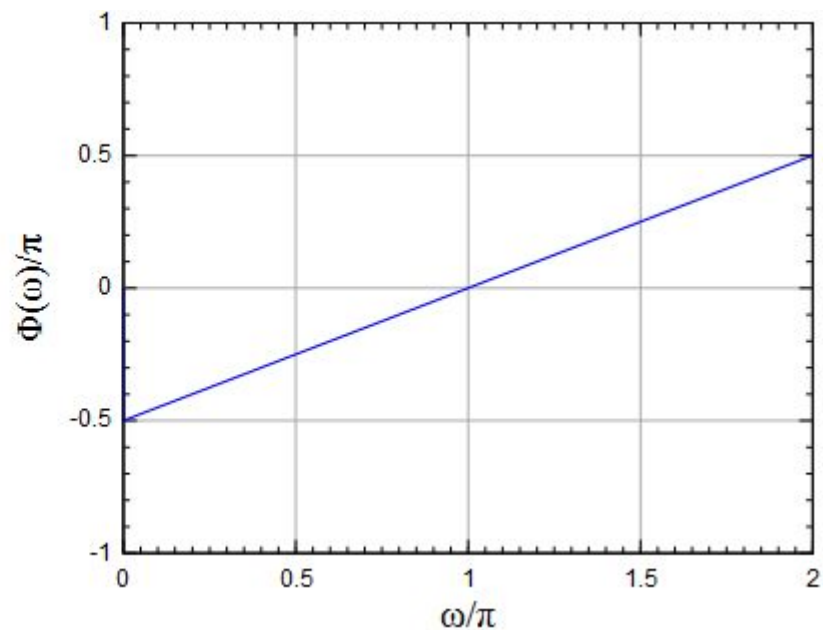
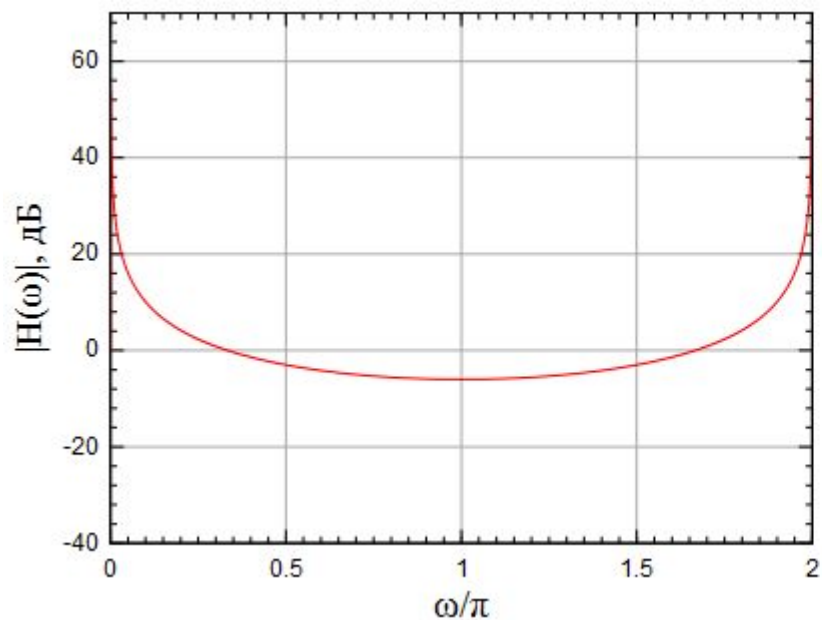
$$H_I(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\left| H_I(e^{j\omega}) \right| = \frac{1}{2 \cdot \sin(\omega/2)};$$

$$\Phi(H_I(e^{j\omega})) = \omega/2 - \pi/2.$$

II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

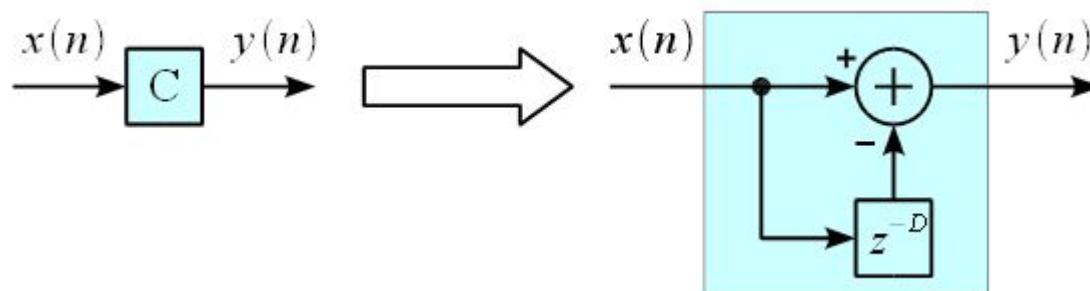
Фильтр интегратор



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Гребенчатый КИХ-фильтр.

$$y(n) = x(n) - x(n - D]$$

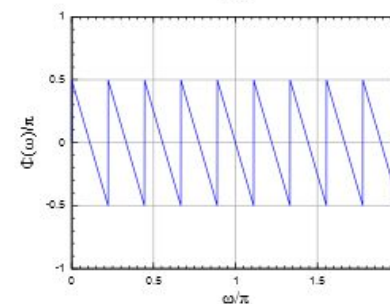
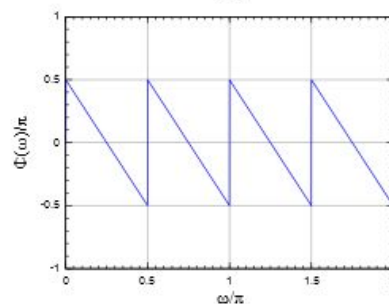
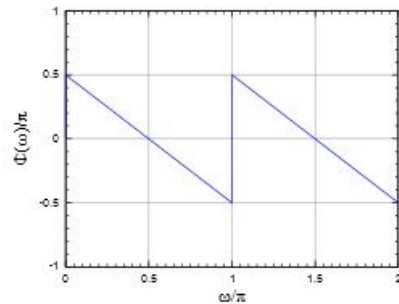
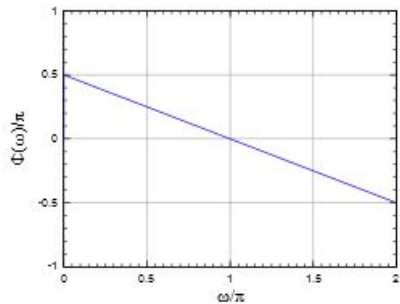
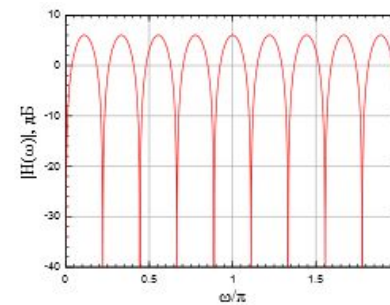
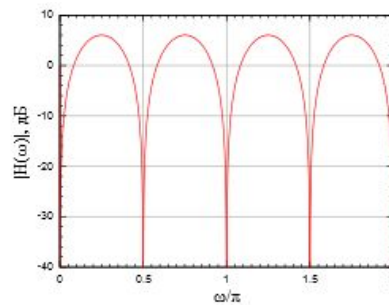
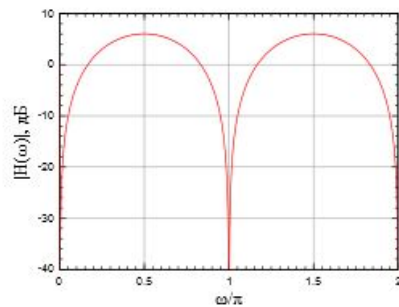
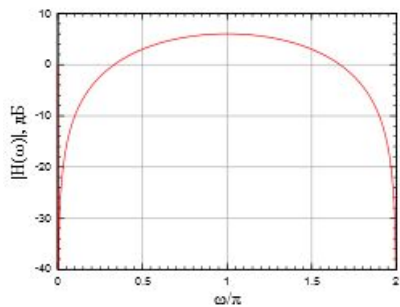


$$H_C(z) = 1 - z^{-D}$$

$$\begin{aligned} |H_C(e^{j\omega})| &= 2 \cdot |\sin(D \cdot \omega / 2)|; \\ \Phi(H_C(e^{j\omega})) &= -D \cdot \omega / 2 + \pi / 2. \end{aligned}$$

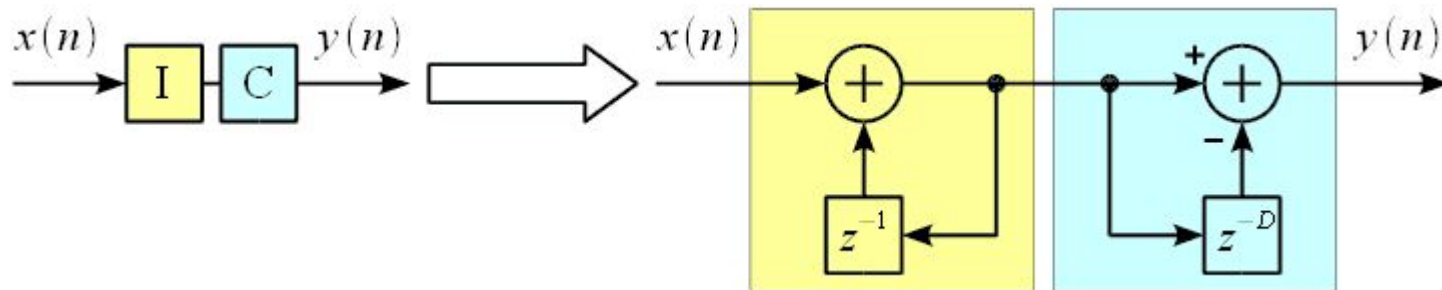
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Гребенчатый КИХ-фильтр.



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

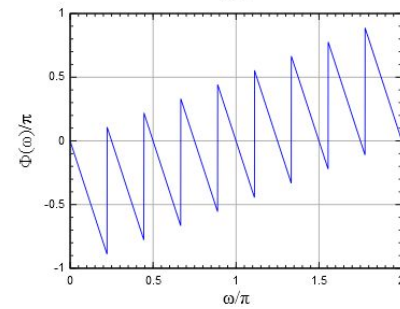
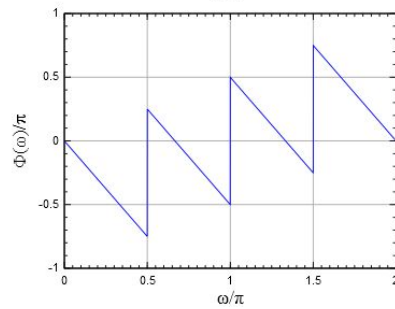
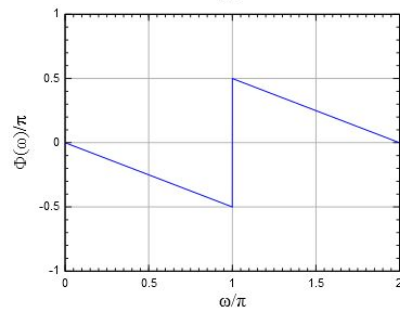
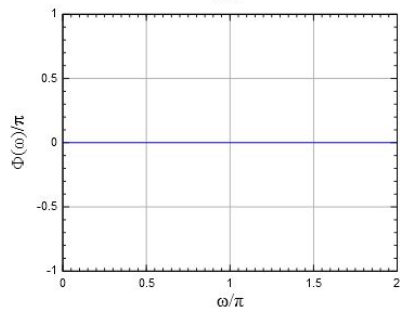
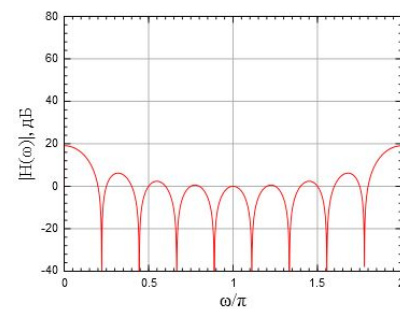
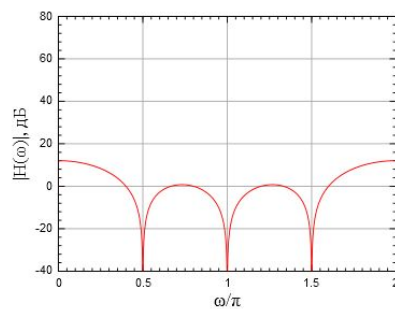
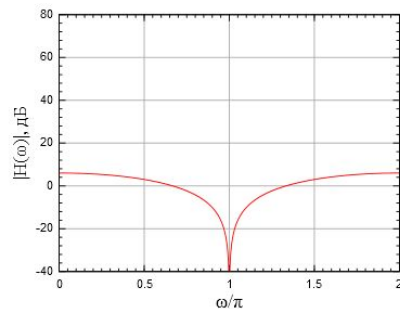
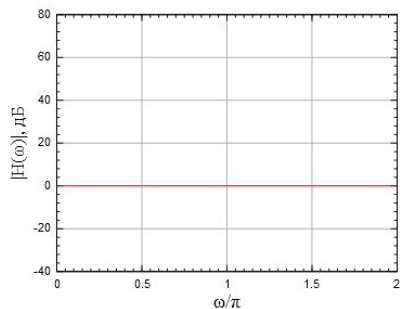
СИС фильтр первого порядка.



$$H_{СИС}(z) = \frac{1 - z^{-D}}{1 - z^{-1}}$$

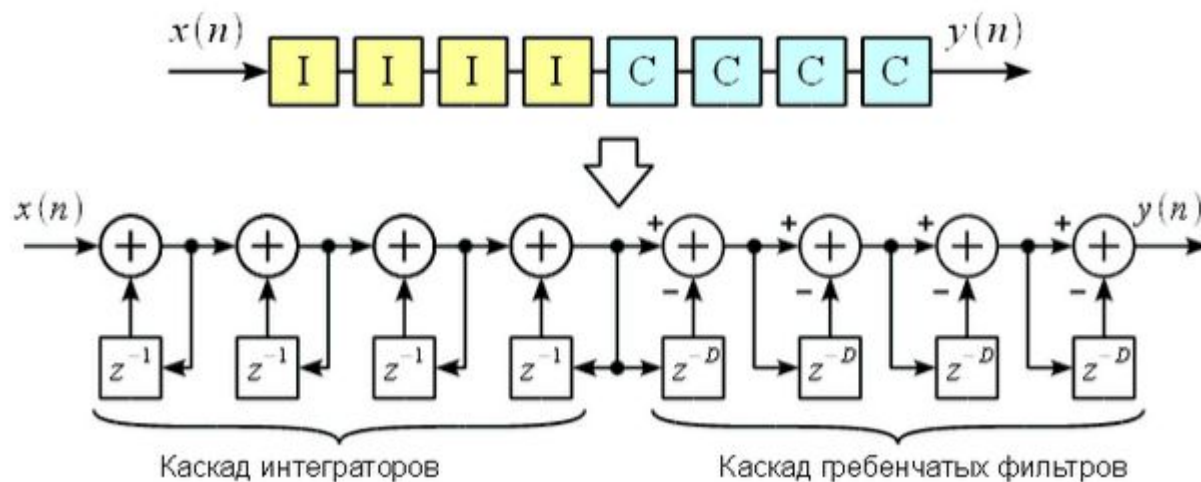
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

СИС фильтр первого порядка.



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

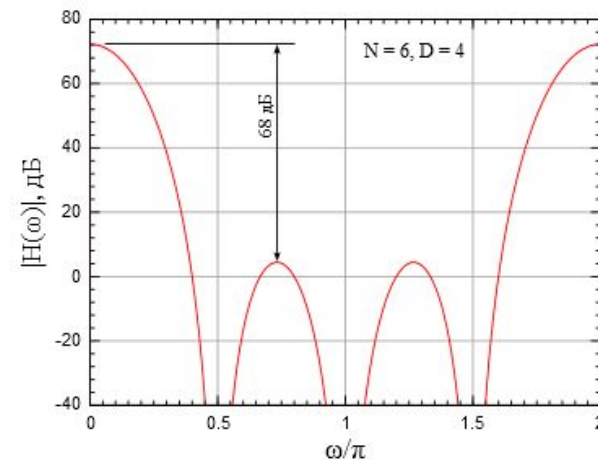
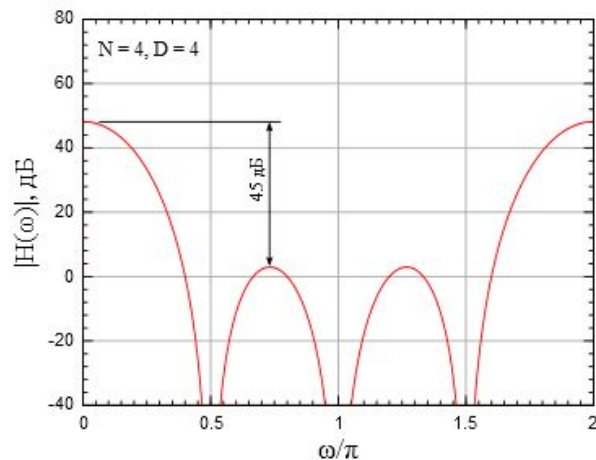
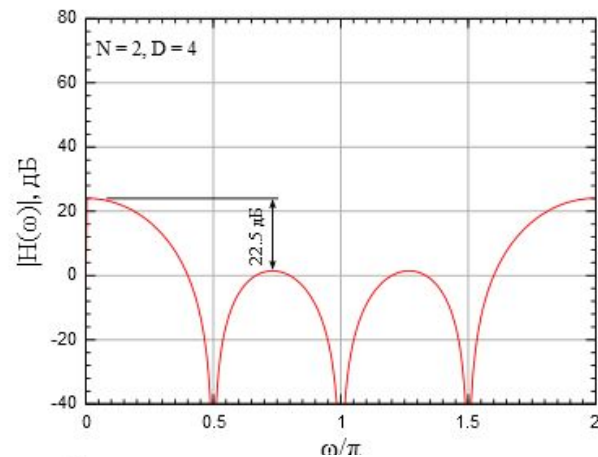
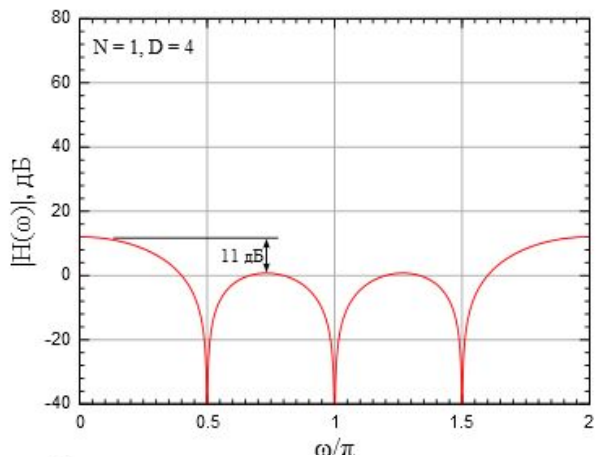
СИС фильтры высших порядков.



$$H_{\text{сис}}(e^{j\omega}) = \left[\frac{\sin(D\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right]^{2N} \cdot \exp(-j \cdot N \cdot (D-1) \cdot \omega/2).$$

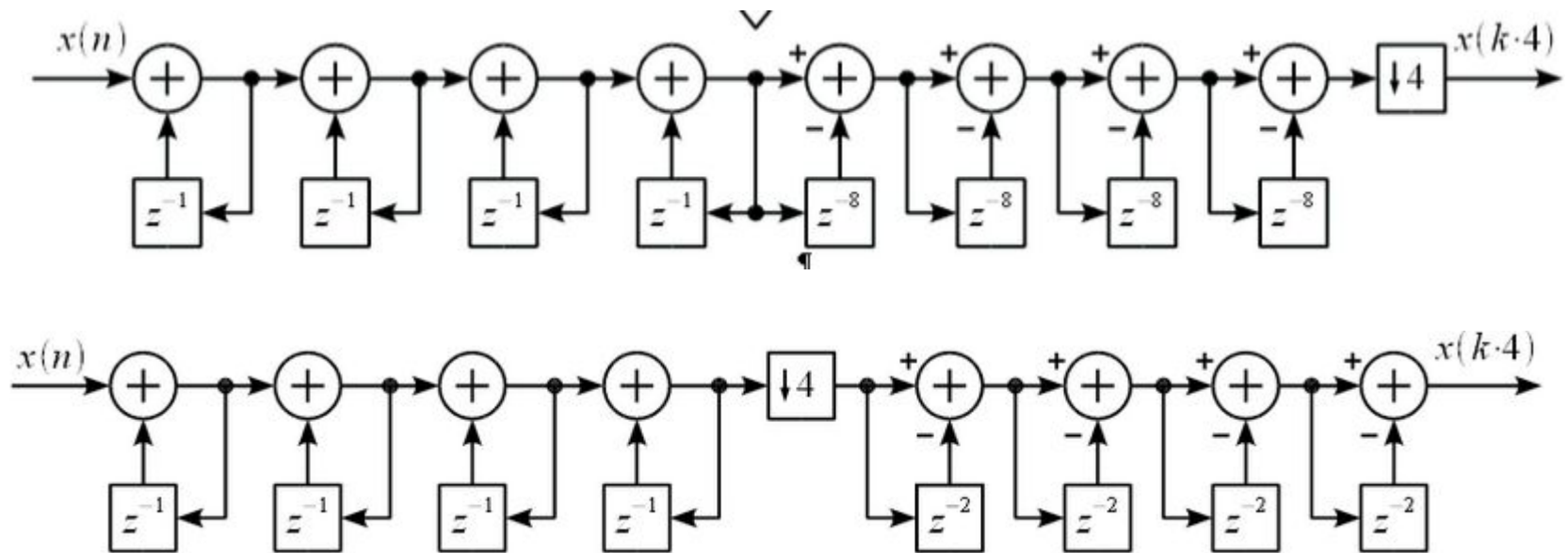
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

СИС фильтры высших порядков.



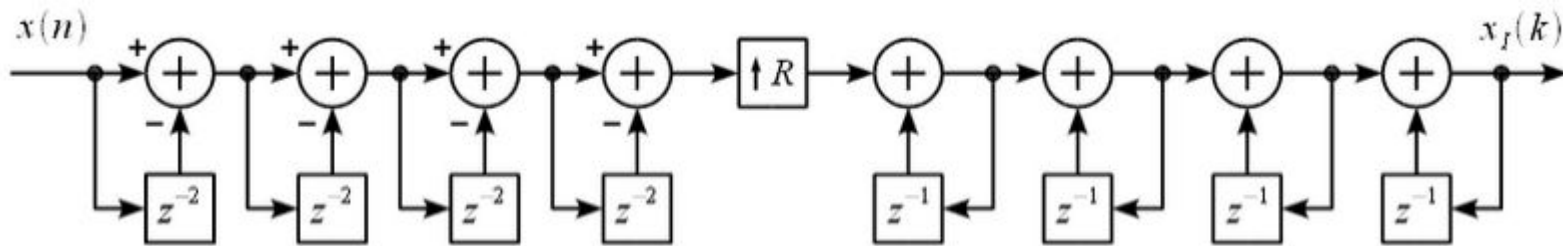
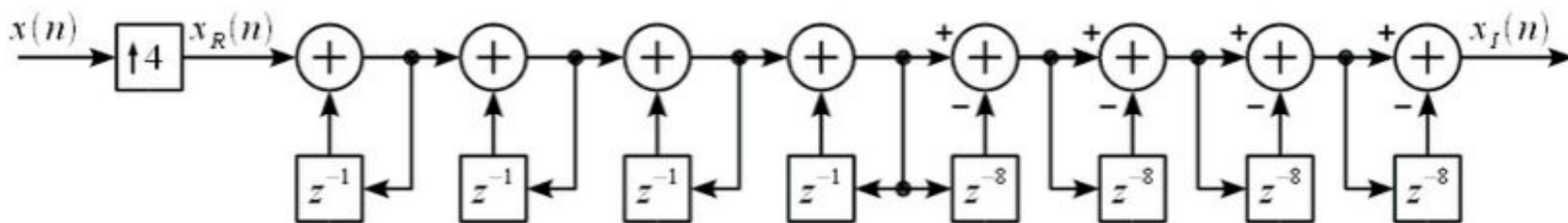
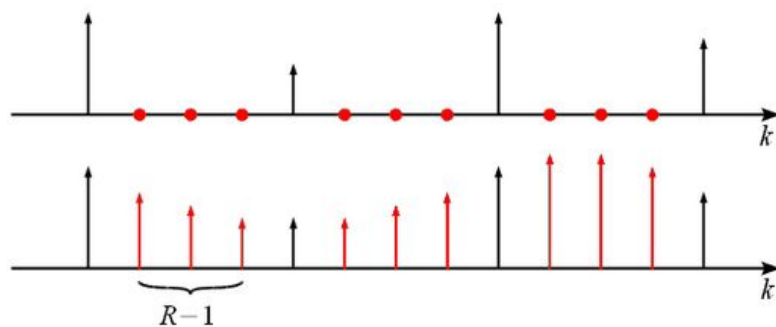
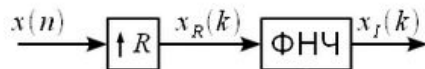
II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Децимация и интерполяция с помощью СИС фильтров Хогенауэра.



II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Децимация и интерполяция с помощью СИ фильтров Хогенауэра.





Московский Авиационный
(Национальный Исследовательский
Институт
Университет)

Спасибо за внимание.