



Московский Авиационный  
(Национальный Исследовательский  
Институт  
Университет)

---

# *«Программно- Определяемые Радиосистемы»*

*Серкин Фёдор  
Борисович*

*Кафедра 408 –  
«Инфокоммуникации»*

---

## Литература:

1. Скляр Б., «Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение», «Вильямс», Москва, Санкт-Петербург, Киев, 2003.
2. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н., «Цифровая обработка сигналов», «Радио и связь», Москва, 1990.
3. Максфилд К., «Проектирование на ПЛИС. Архитектура, средства и методы», «Додэка-XXI», Москва, 2007.
4. «IEEE 1012 Standard for Software Verification and Validation», IEEE, New York, 2005.
5. Tuttlebee W., «software defined radio. Enabling technology», WILEY, New York, 2002.

---

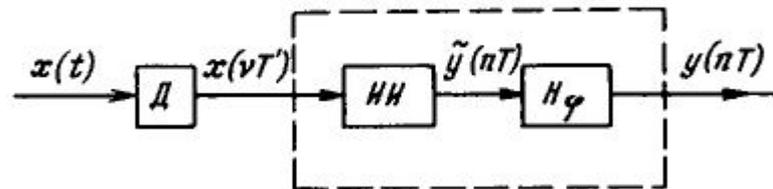
Содержание курса:

- I. Введение в ПОР.
- II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.
- III. Реализация на жесткой и программируемой логике.
- IV. Программируемое радио.

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

---

Увеличение частоты дискретизации (Интерполяция) цифрового сигнала.

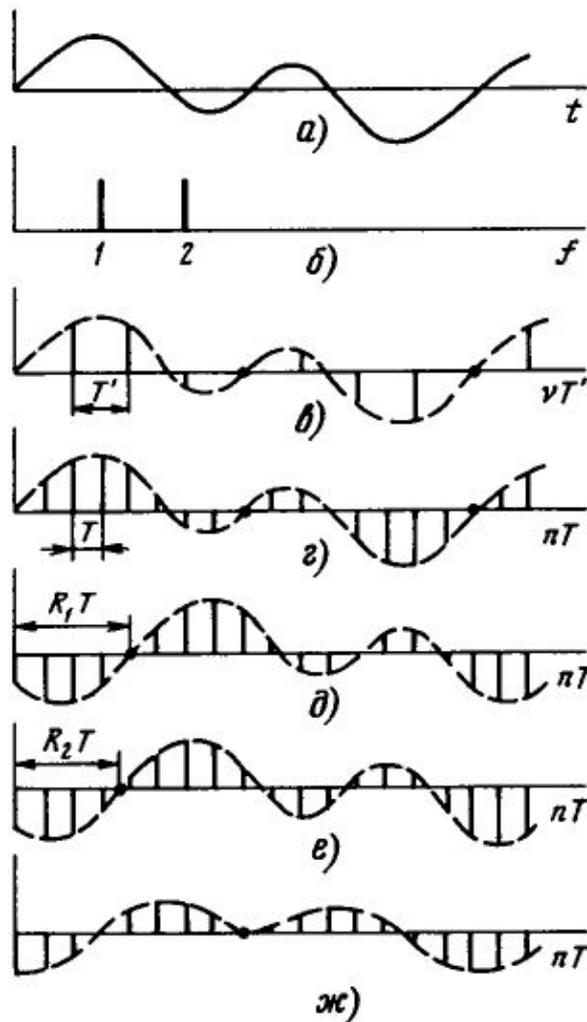


$$H_\varphi(e^{j2\pi w}) = e^{-jR(w)2\pi w}$$

$$|H_\varphi(\cdot)| = 1$$

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Увеличение частоты дискретизации (Интерполяция) цифрового



$$x(\nu T') = \sin 2\pi\nu w'_1 + \sin 2\pi\nu w'_2 = \sin(\pi\nu/4) + \sin(\pi\nu/2)$$

$$\tilde{y}(nT) = \sin 2\pi n w_1 + \sin 2\pi n w_2 = \sin(\pi n/8) + \sin(\pi n/4)$$

Вариант

$$1. \quad y(nT) = \sin\left(\pi n/8 - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4} - \pi\right)$$

Вариант

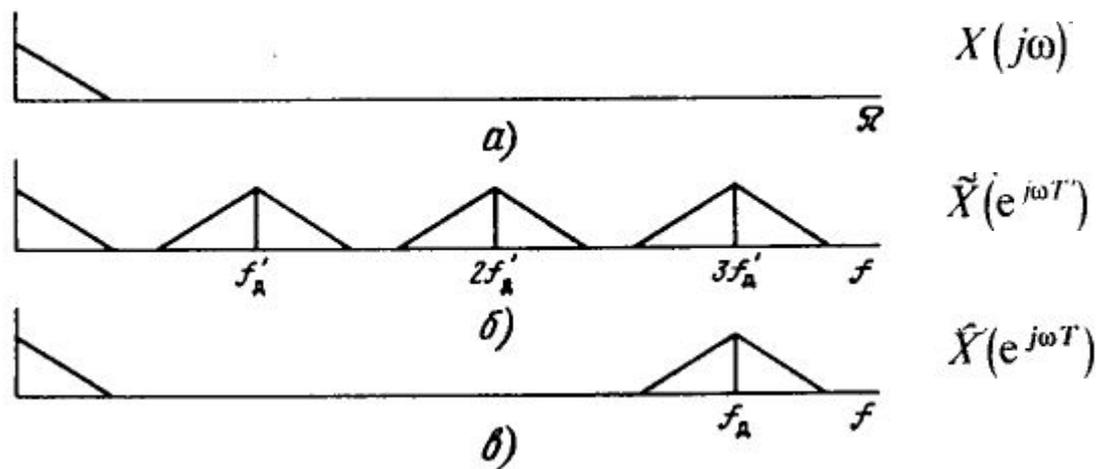
$$2. \quad y(nT) = \sin(\pi n/8 - 7\pi/16) + \sin(\pi n/4 - 7\pi/8)$$

Вариант

$$3. \quad y(nT) = \sin(\pi n/8 - \pi/2) + \sin(\pi n/4 - \pi/2)$$

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

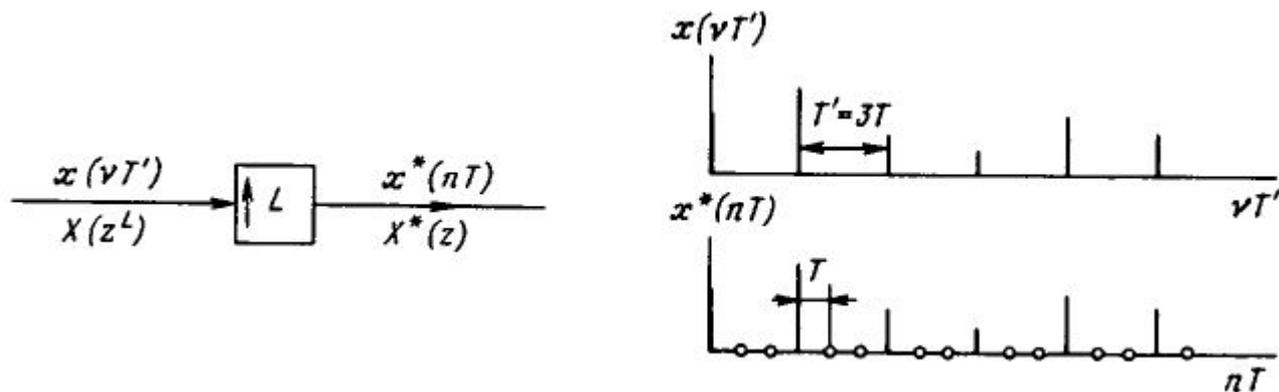
Увеличение частоты дискретизации (Интерполяция) цифрового сигнала.



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

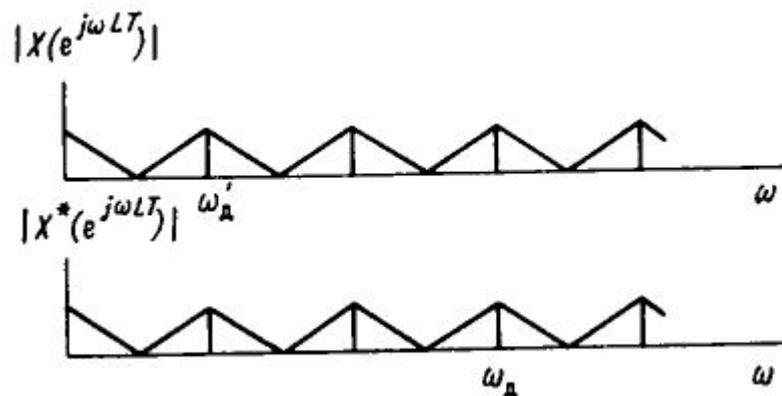
Экспандер частоты дискретизации.

$$x^*(nT) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}T'\right) & \text{при } n=0, L, 2L, \dots, \\ 0 & \text{при других } n. \end{cases}$$



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Экспандер частоты дискретизации.



$$X(z') = \sum_{v=0}^{\infty} x(vT') (z')^{-v},$$

где  $z' = \exp(j\omega T')$ ,

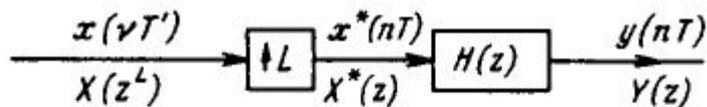
$$X^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x^*(nT) z^{-n},$$

где  $z = \exp(j\omega T)$ .

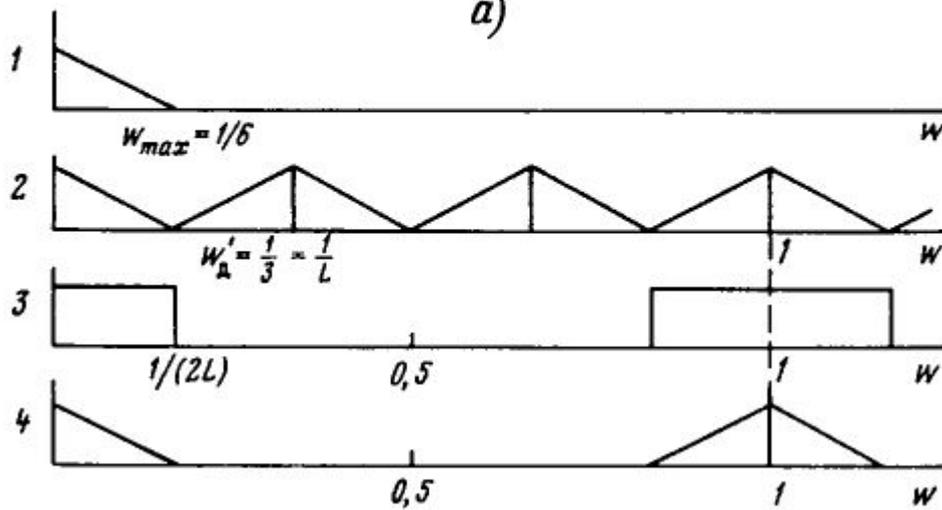
## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Система интерполяции с целочисленным коэффициентом  $L$

$$X^*(e^{j2\pi w}) = X(e^{j2\pi L w}) = \frac{1}{T'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\omega + jk \frac{1}{L}\right),$$



а)



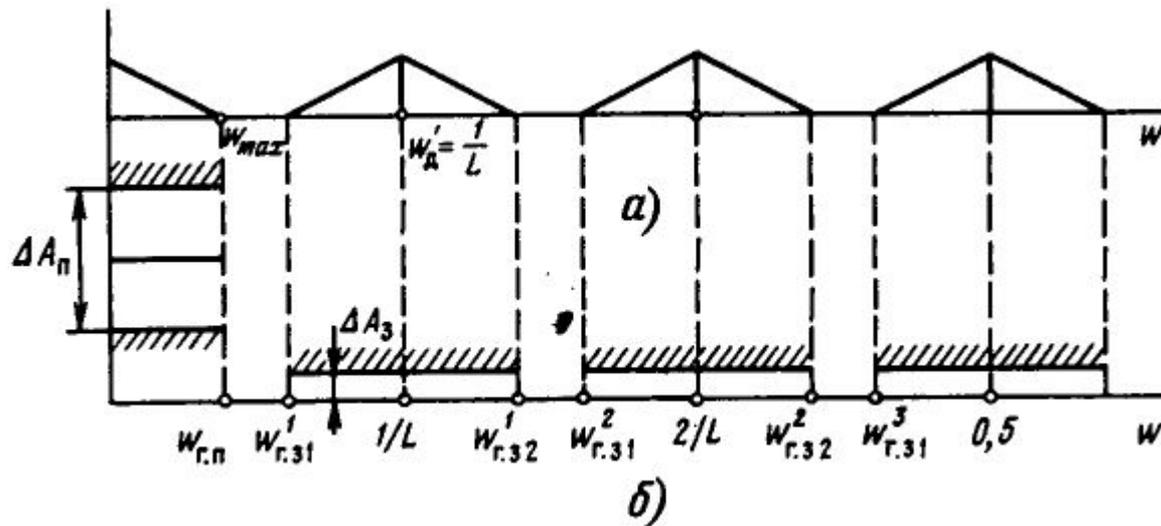
б)

$$|H(e^{j2\pi w})| = \begin{cases} L & \text{при } w \in [0, 1/(2L)], \\ 0 & \text{при } w \in [1/(2L); 0,5]. \end{cases}$$

$$Y(e^{j2\pi w}) = \frac{1}{T} X(j\omega) e^{j\phi(\omega)},$$

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Характеристики фильтров в реальных системах интерполяции.

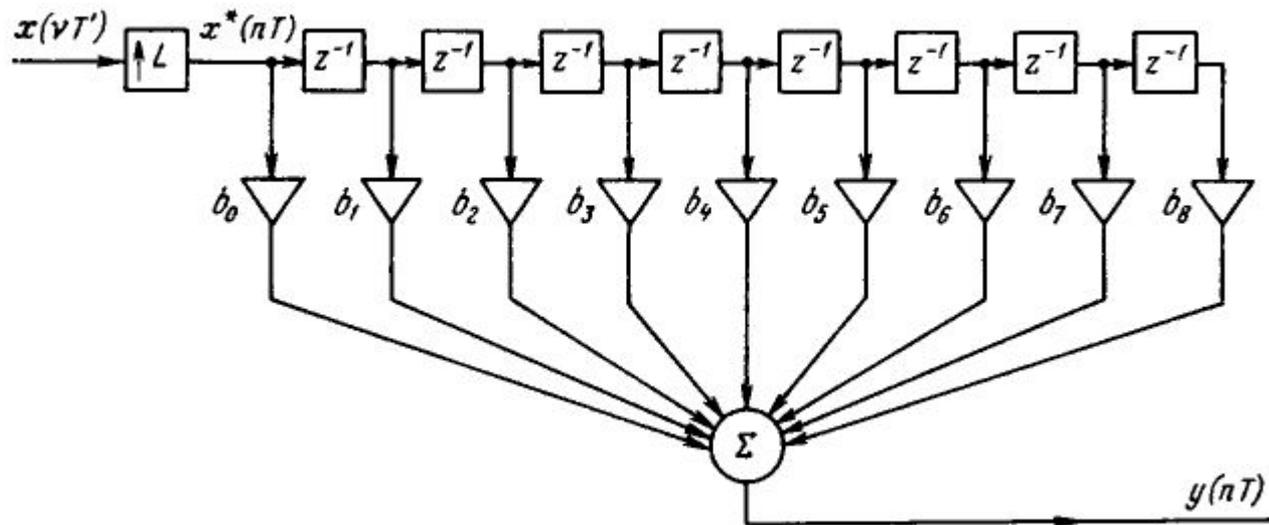


$$A(w) = |H(e^{j2\pi w})| \approx \begin{cases} L & \text{при } w \in [0, w_{max}], \\ 0 & \text{при } w \in \left[ r \frac{1}{L} - w_{max}, r \frac{1}{L} + w_{max} \right], \\ & r = 1, 2, \dots, [L/2], \end{cases}$$

где  $w_{max} = f_{max}/f_d$ , а  $[L/2]$  — целая часть числа  $L/2$

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

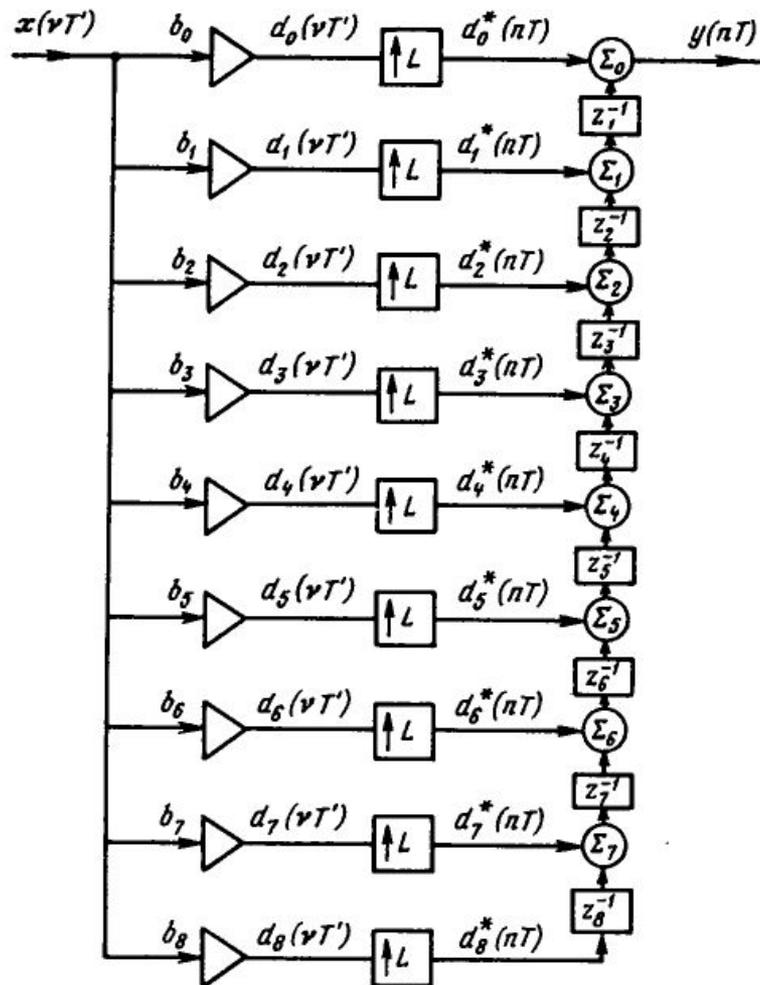
Структуры систем интерполяции с целочисленным коэффициентом  $L$ .



1. Умножители работают только по ненулевым отсчетам сигнала
2. Фильтр работает на высокой частоте дискретизации.

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

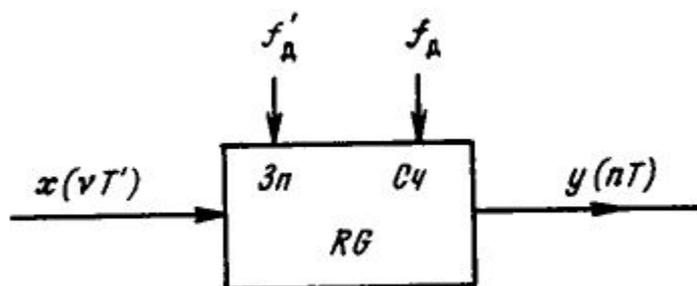
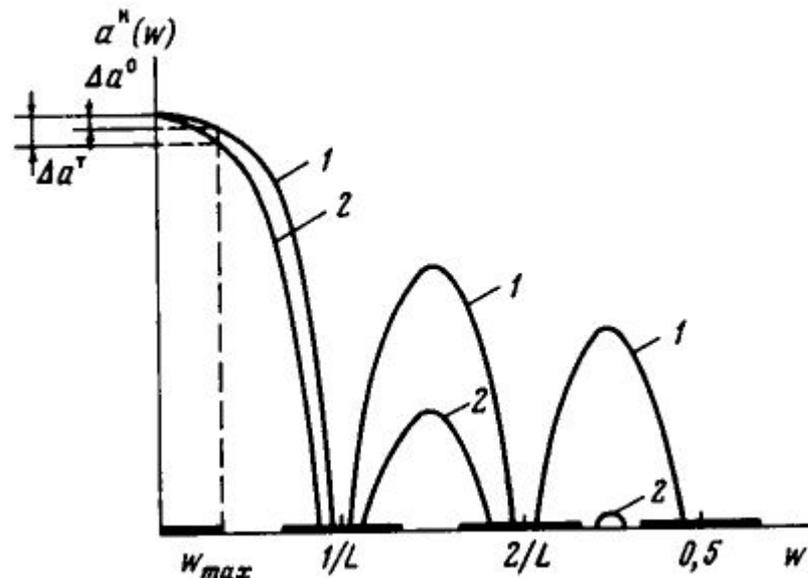
Структуры систем интерполяции с целочисленным коэффициентом  $L$ .



Умножители работают на низкой частоте дискретизации, а задержки и сумматоры на высокой.

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Цифровая фильтрация при полиномиальной интерполяции нулевого порядка.



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

---

Цифровая фильтрация при полиномиальной интерполяции первого порядка.

$$y(nT) = \frac{k+1}{L} x(vT') + \frac{L-k-1}{L} x((v-1)T'),$$

$$y(nT) = \sum_{l=0}^{2L-2} b_l x^*(nT-lT).$$

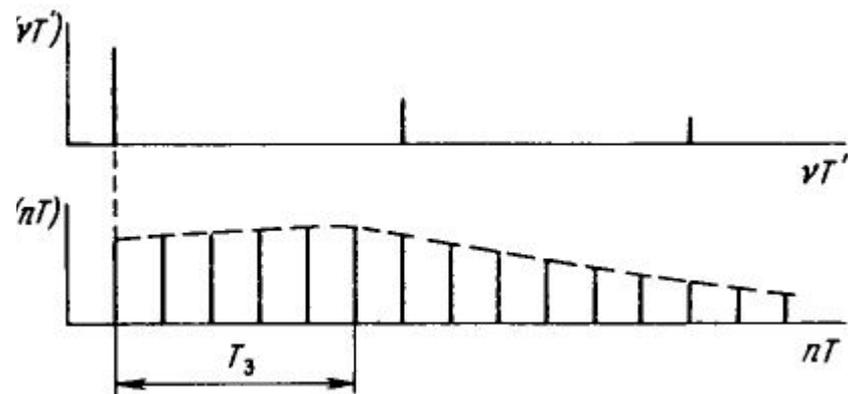
$$b_l = \begin{cases} \frac{l+1}{L} & \text{при } l=0, 1, \dots, L-1, \\ \frac{2L-1-l}{L} & \text{при } l=L, L+1, \dots, 2L-2. \end{cases}$$

$$H(z) = \sum_{l=0}^{2L-2} b_l z^{-l},$$

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

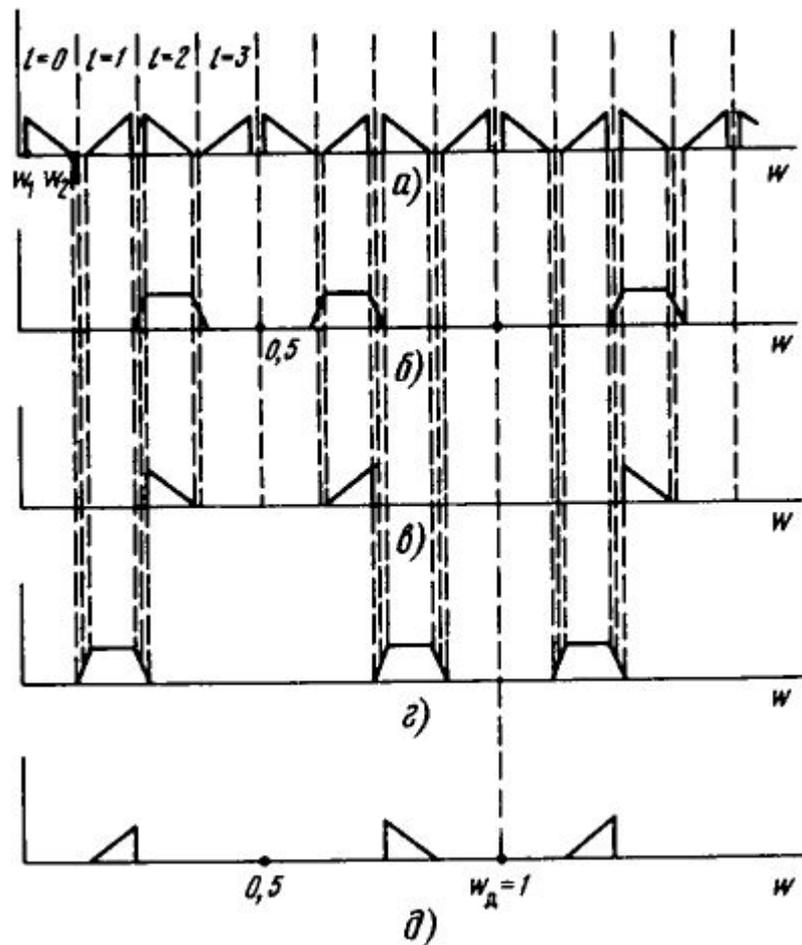
Цифровая фильтрация при полиномиальной интерполяции первого порядка.

	1		2	3	2		1	
	$b_0$		$b_1$	$b_2$	$b_3$		$b_4$	
	0	0	$x(T')$	0	0			$n = 5$
	$x(2T')$	0	0	$x(T')$	0			$n = 6$
	0	$x(2T')$	0	0	$x(T')$			$n = 7$
	0	0	$x(2T')$	0	0			$n = 8$



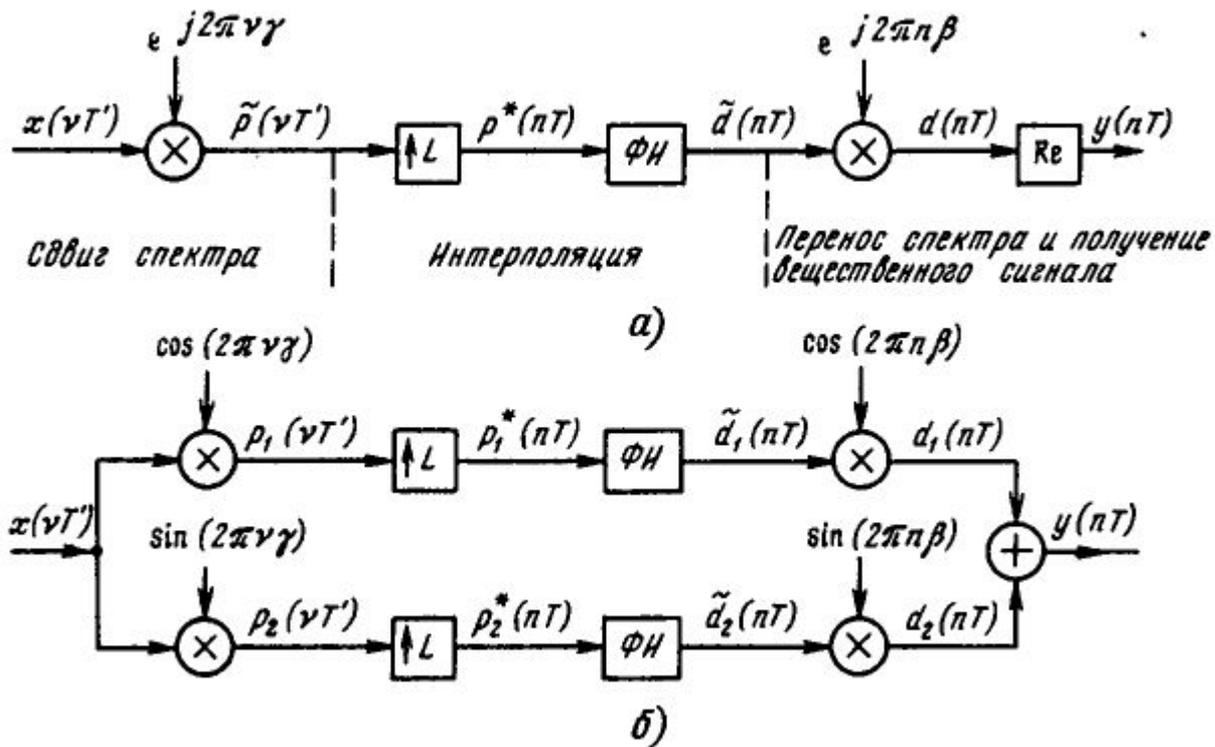
## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Перенос спектра при интерполяции.



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

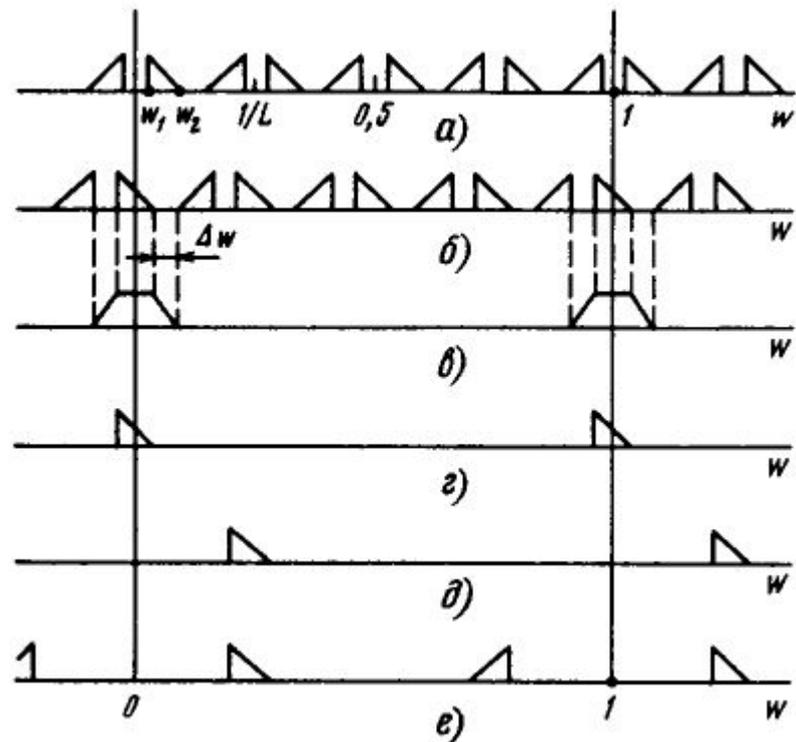
Перенос спектра при интерполяции.



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

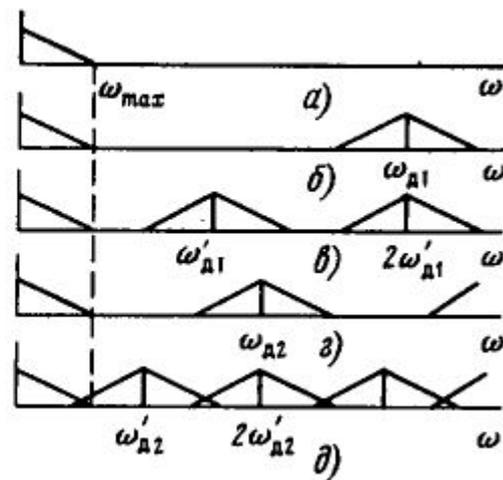
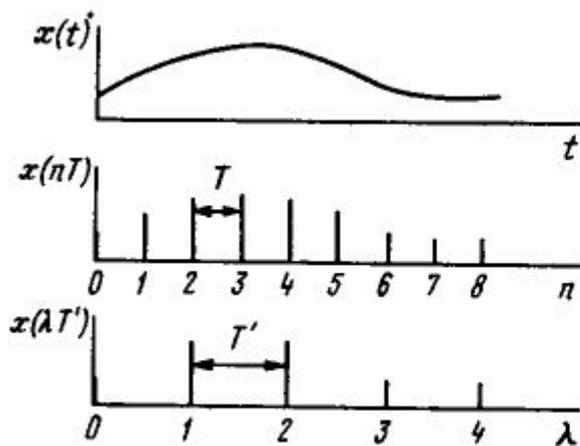
---

Перенос спектра при интерполяции.



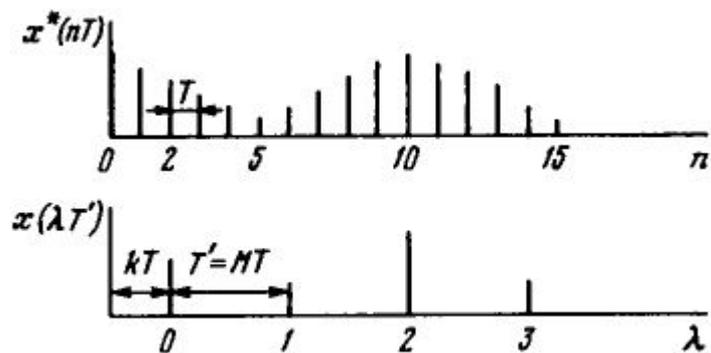
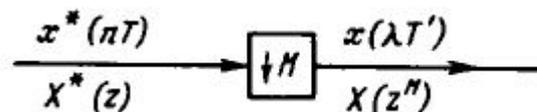
## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Уменьшение частоты дискретизации (Децимация) цифрового сигнала.



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

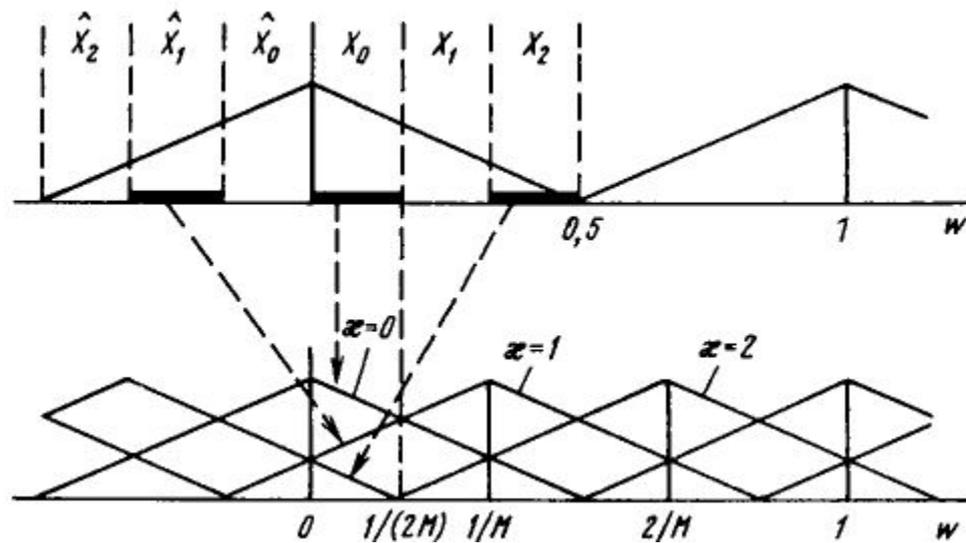
Компрессор частоты дискретизации.



$$x(\lambda T' + k T') = x^*(n T),$$

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

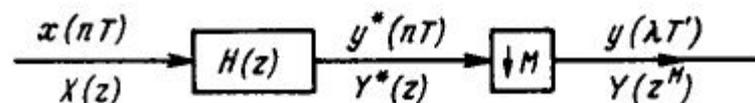
Компрессор частоты дискретизации.



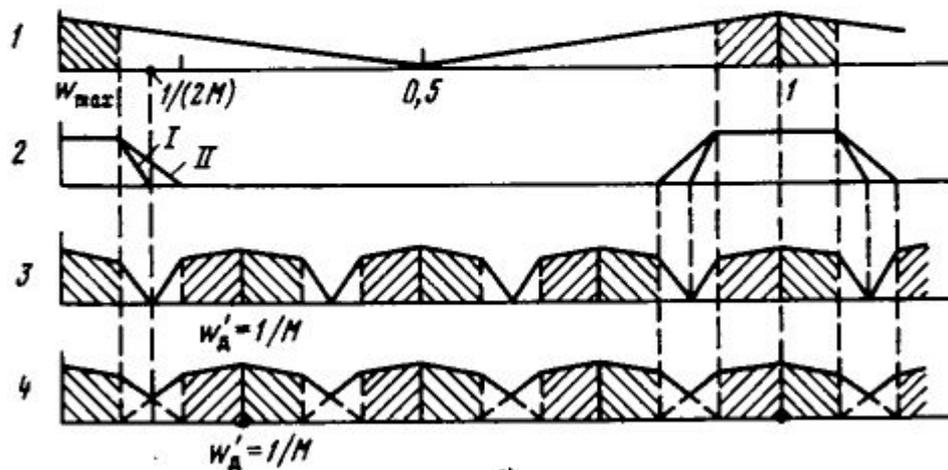
## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Система децимации с целочисленным коэффициентом  $M$ .

$$A(\omega) = |H(e^{j2\pi\omega})| = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega \in [0, \omega_{max}], \\ 0 & \text{при } \omega \in [\theta; 0,5], \end{cases}$$



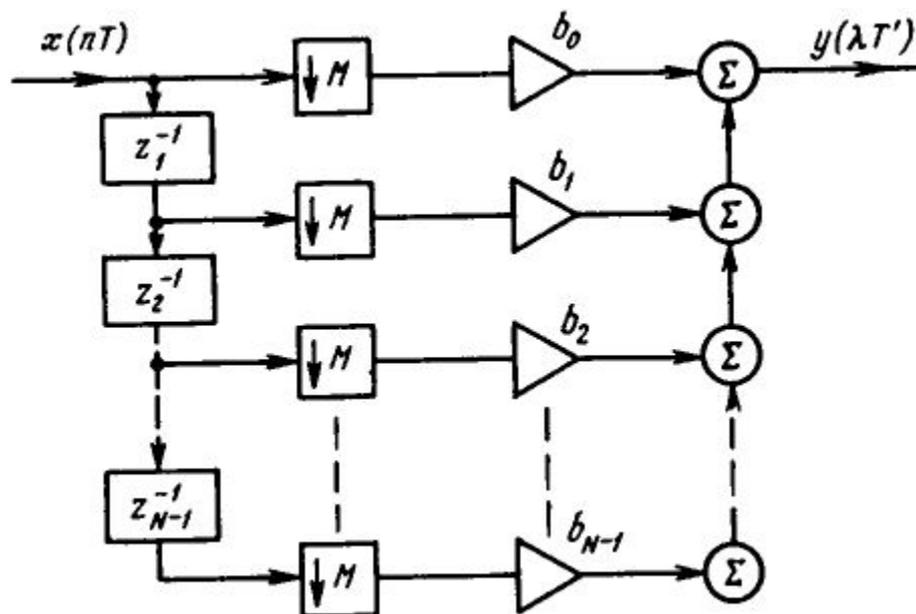
а)



б)

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

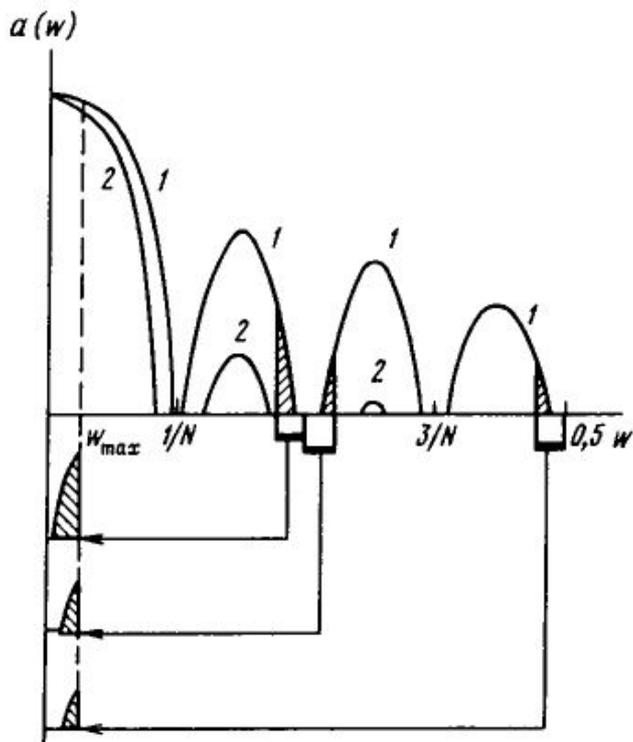
Структуры систем децимации с целочисленным коэффициентом  $M$ .



$$y(\lambda T') = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{G-1} b_{rM+k} x((\lambda - r)MT - kT),$$

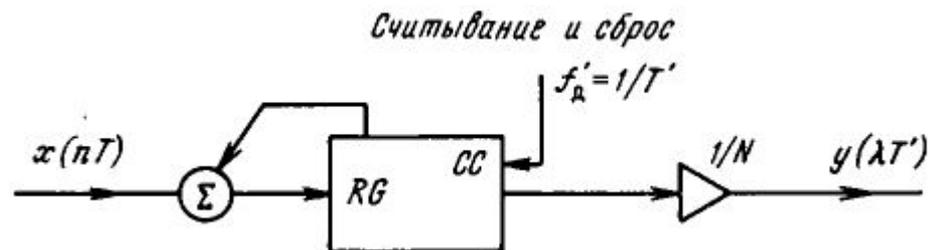
## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Однородный фильтр при децимации.



$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} z^{-l}$$

$$A(w) = |H(e^{j2\pi w})| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin \pi N w}{\sin \pi w} \right|$$



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

---

Триангулярный фильтр при децимации.

$$H(z) = \frac{1}{N^2} \left( \sum_{l=0}^{N-1} z^{-l} \right)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{2N-2} b_l z^{-l},$$

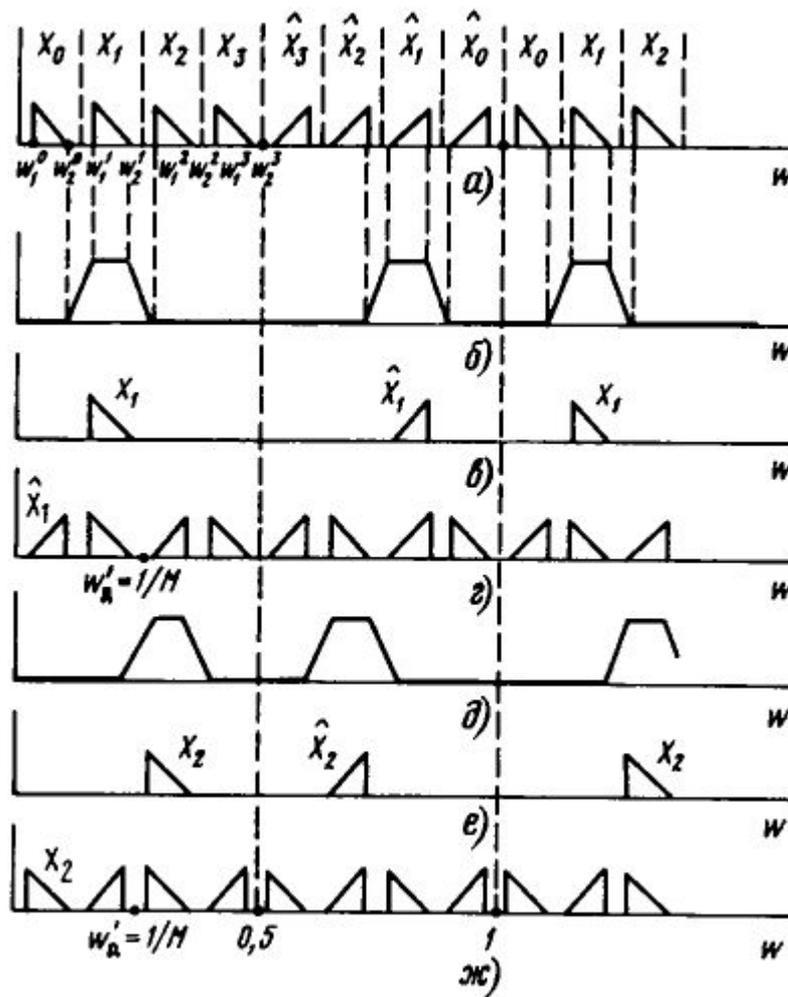
где

$$b_l = \begin{cases} l+1 & \text{при } l=0, 1, \dots, N-1, \\ 2N-1-l & \text{при } l=N, N+1, \dots, 2N-2. \end{cases}$$

$$A(w) = |H(e^{j2\pi w})| = \frac{1}{N^2} \left( \frac{\sin \pi N w}{\sin \pi w} \right)^2.$$

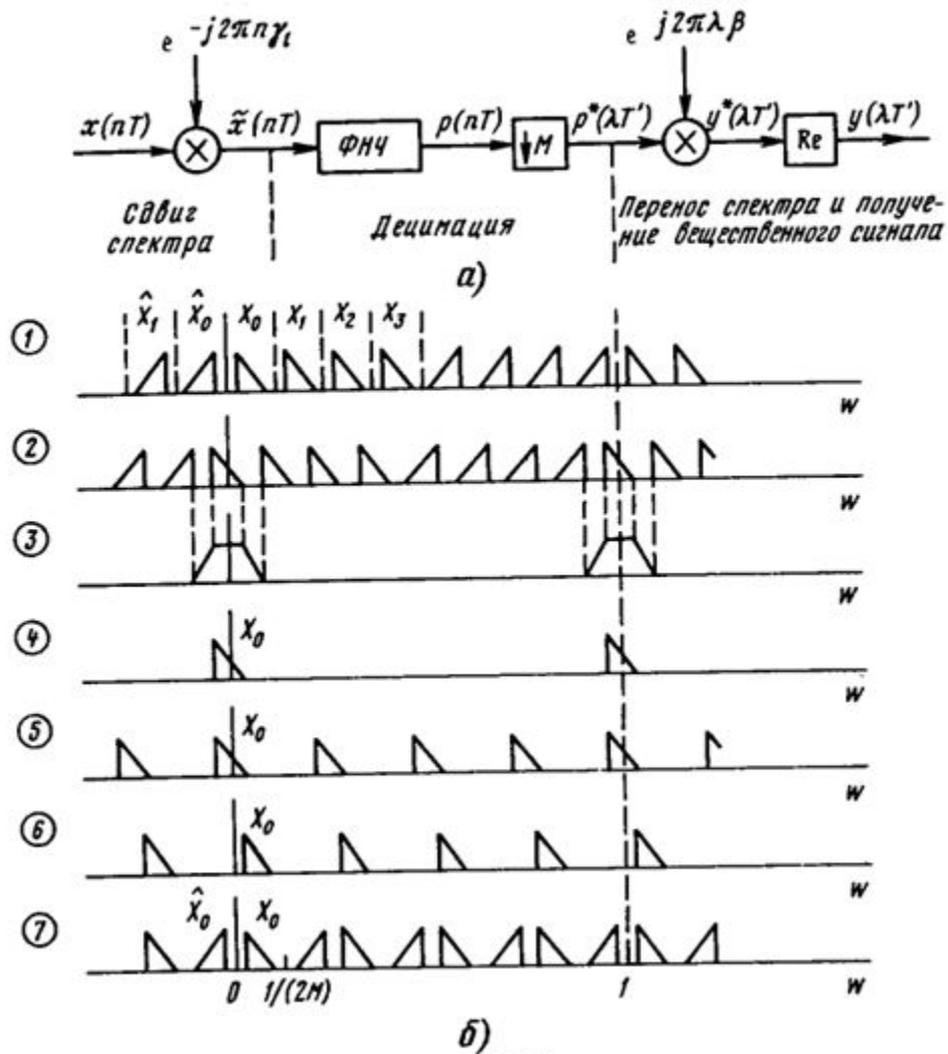
## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Перенос спектра при децимации.



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

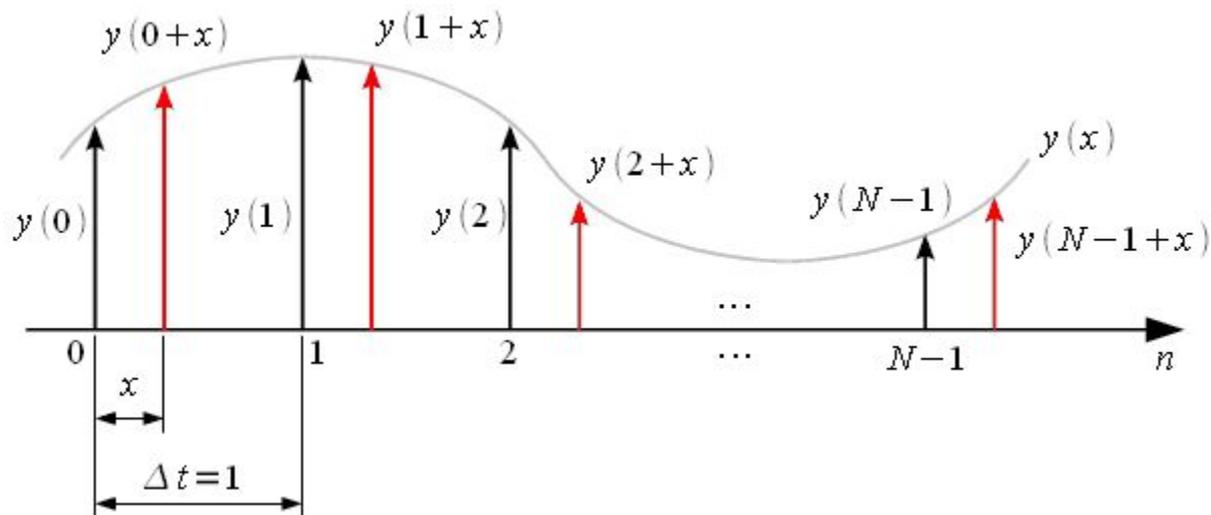
Перенос спектра при децимации.



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

---

Фильтр Фарроу и дробная передискретизация.



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

---

Представление полиномов при полиномиальной интерполяции.

$$y(x) = P^{N-1}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot x^n$$

Рассмотрим подробнее выражение (1), а именно раскроем сумму:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_{N-2} \cdot x^{N-2} + a_{N-1} \cdot x^{N-1}$$

Вынесем в выражении (2)  $x$  за скобки:

$$y(x) = a_0 + x \cdot (a_1 + a_2 \cdot x + \dots + a_{N-2} \cdot x^{N-3} + a_{N-1} \cdot x^{N-2})$$

Снова вынесем  $x$  за скобки:

$$y(x) = a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + \dots + a_{N-2} \cdot x^{N-4} + a_{N-1} \cdot x^{N-3}))$$

Таким образом вынося возможное количество раз  $x$  за скобки, получим множество вложенных скобок:

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + \dots + x \cdot (a_{N-2} + a_{N-1} \cdot x))) = \dots \\ &\dots = x \cdot (x \cdot (\dots x \cdot (x \cdot a_{N-1} + a_{N-2}) + \dots + a_2) + a_1) + a_0 \end{aligned}$$

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Представление полиномов при полиномиальной интерполяции.

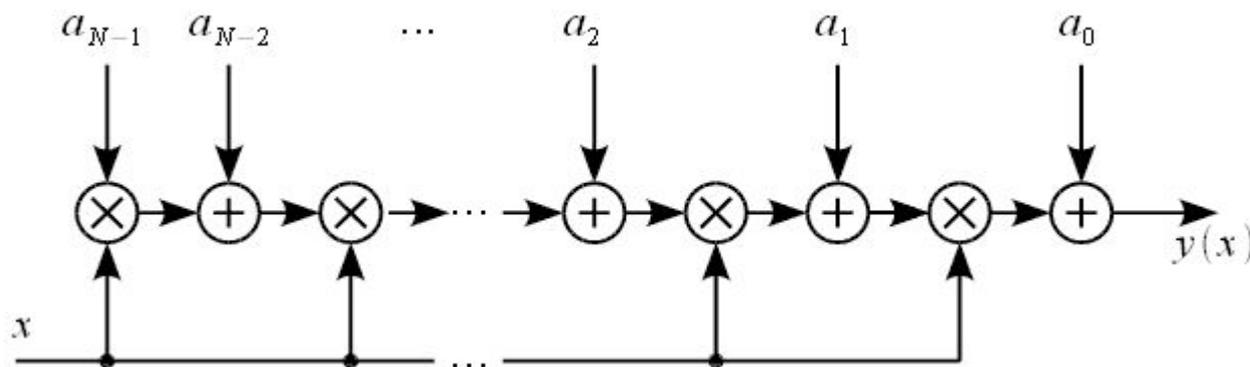
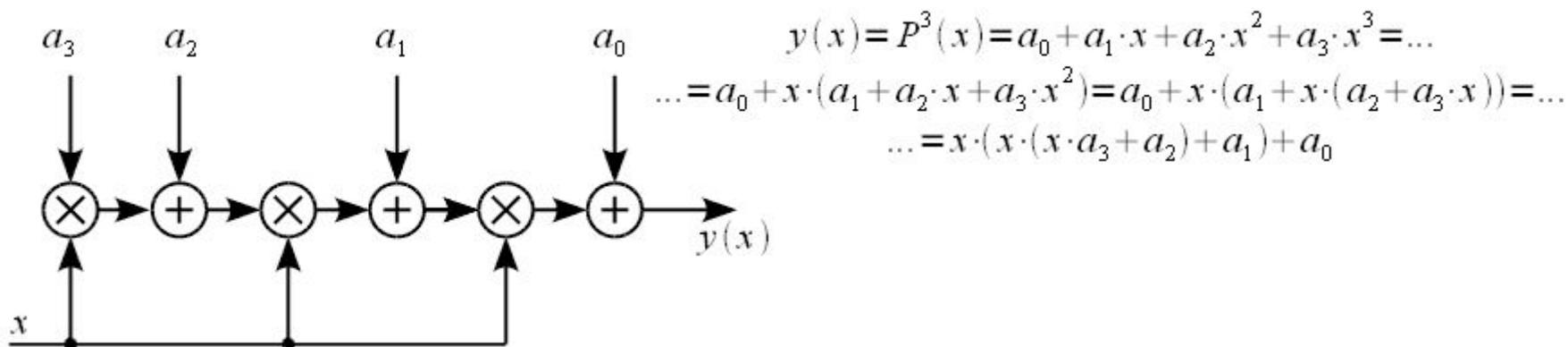


Схема расчета кубического полинома.



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

---

Расчет коэффициентов кубического полинома.

$$y(0) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot 0^n;$$

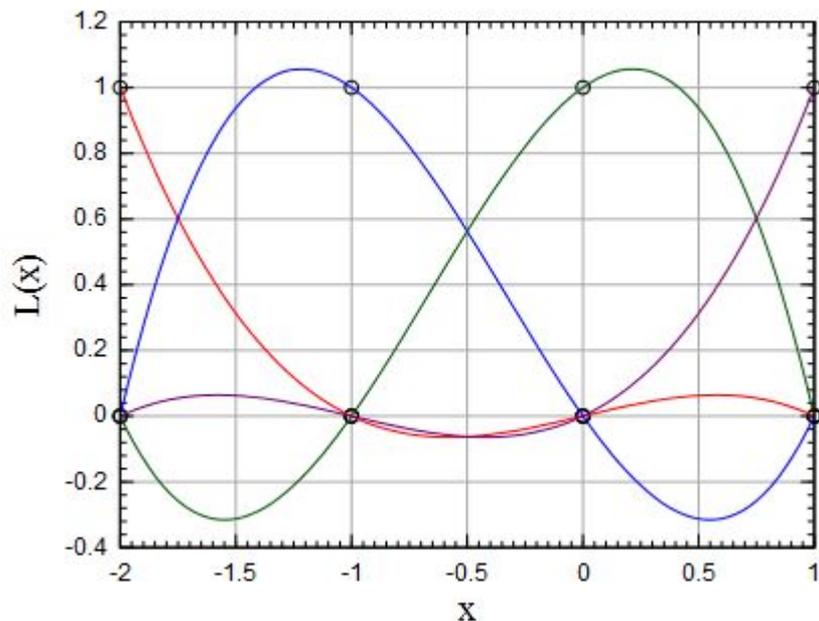
$$y(1) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot 1^n;$$

$$y(2) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot 2^n;$$

$$\dots$$
$$y(N-1) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot (N-1)^n$$

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Ортогональные полиномы Лагранжа. Фильтр Фарроу.



$$y(x) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cdot L_n^{N-1}(x) \quad (1)$$

$$L_n^{N-1}(x) = \frac{\prod_{k=0, k \neq n}^{N-1} (x - t_k)}{\prod_{k=0, k \neq n}^{N-1} (t_n - t_k)} \quad (2)$$

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

---

Полином Лагранжа для N=4 и моментов дискретизации [-2,-1,0,1]

$$t_0 = -2;$$

$$t_1 = -1;$$

$$t_2 = 0;$$

$$t_3 = 1$$

$$L_0^3(x) = \frac{(x-t_1) \cdot (x-t_2) \cdot (x-t_3)}{(t_0-t_1) \cdot (t_0-t_2) \cdot (t_0-t_3)};$$

$$L_0^3(x) = \frac{(x+1) \cdot x \cdot (x-1)}{(-2+1) \cdot (-2) \cdot (-2-1)} = -\frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{6} \cdot x;$$

$$L_1^3(x) = \frac{(x-t_0) \cdot (x-t_2) \cdot (x-t_3)}{(t_1-t_0) \cdot (t_1-t_2) \cdot (t_1-t_3)};$$

$$L_1^3(x) = \frac{(x+2) \cdot x \cdot (x-1)}{(-1+2) \cdot (-1) \cdot (-1-1)} = \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 - x;$$

$$L_2^3(x) = \frac{(x-t_0) \cdot (x-t_1) \cdot (x-t_3)}{(t_2-t_0) \cdot (t_2-t_1) \cdot (t_2-t_3)};$$

$$L_2^3(x) = \frac{(x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{2 \cdot 1 \cdot (-1)} = -\frac{1}{2} \cdot x^3 - x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + 1;$$

$$L_3^3(x) = \frac{(x-t_0) \cdot (x-t_1) \cdot (x-t_2)}{(t_3-t_0) \cdot (t_3-t_1) \cdot (t_3-t_2)};$$

$$L_3^3(x) = \frac{(x+2) \cdot (x+1) \cdot x}{(1+2) \cdot (1+1) \cdot (1)} = \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x;$$

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Полином Лагранжа для  $N=4$  и моментов дискретизации  $[-2,-1,0,1]$

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 y(n) \cdot L_n^3(x) = \dots$$

$$\dots = y(0) \cdot L_0^3(x) + y(1) \cdot L_1^3(x) + y(2) \cdot L_2^3(x) + y(3) \cdot L_3^3(x)$$

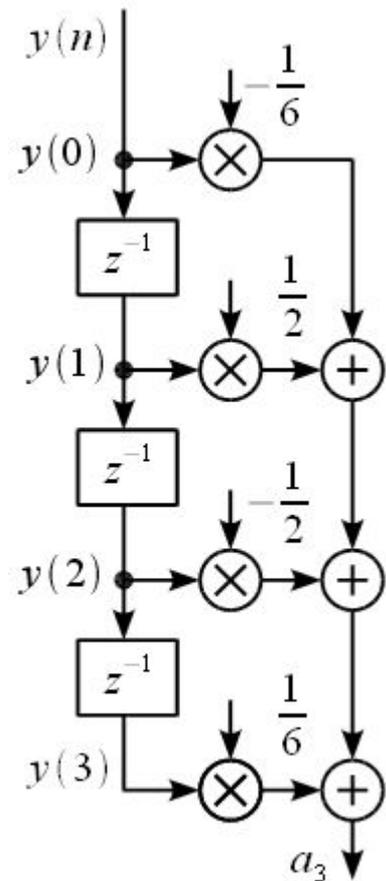
$$y(x) = x^3 \cdot a_3 + x^2 \cdot a_2 + x \cdot a_1 + a_0, \quad (3)$$

$$a_3 = -\frac{1}{6} \cdot y(0) + \frac{1}{2} \cdot y(1) - \frac{1}{2} \cdot y(2) + \frac{1}{6} \cdot y(3);$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot y(1) - y(2) + \frac{1}{2} \cdot y(3); \quad (4)$$

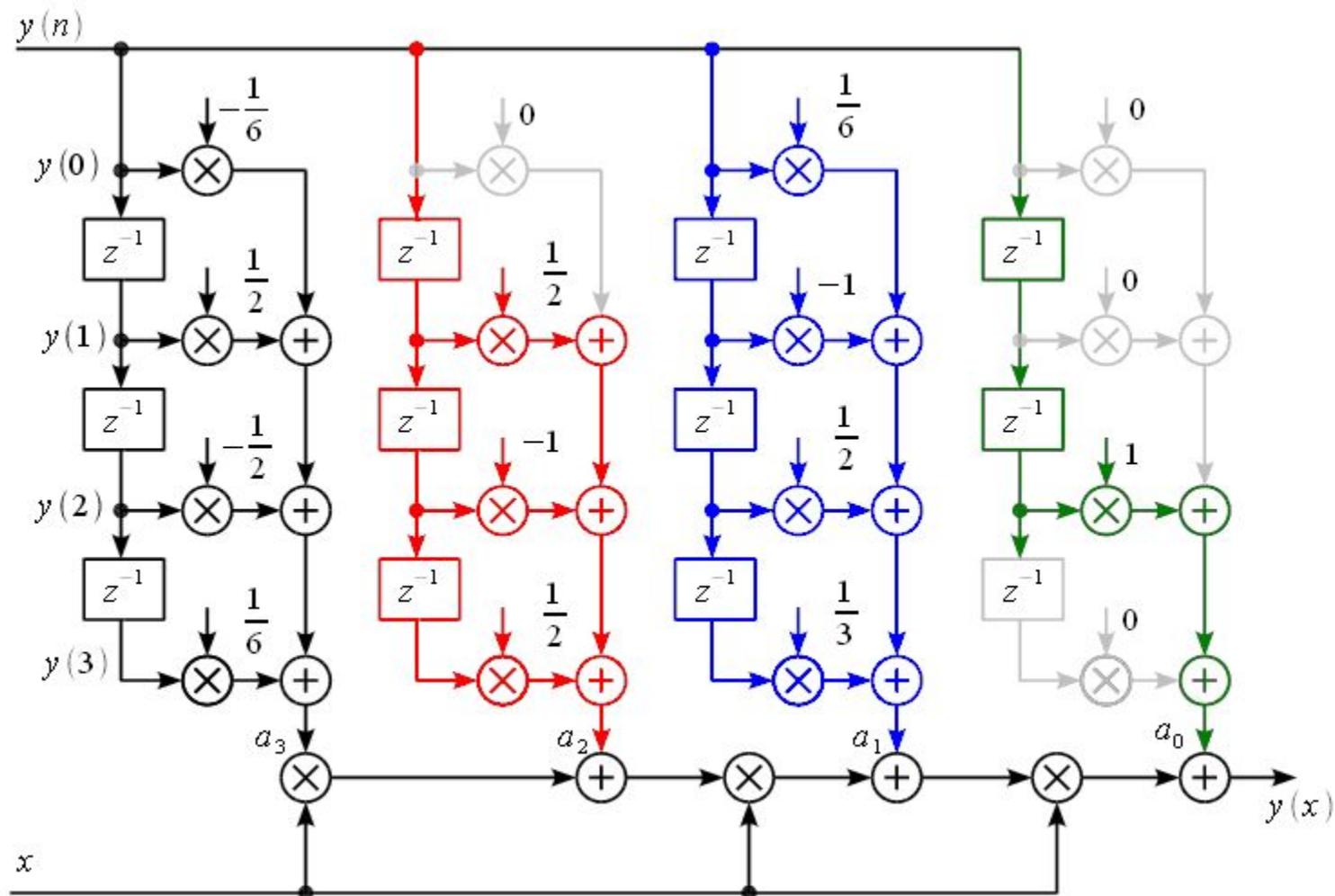
$$a_1 = \frac{1}{6} \cdot y(0) - y(1) + \frac{1}{2} \cdot y(2) + \frac{1}{3} \cdot y(3);$$

$$a_0 = y(2).$$



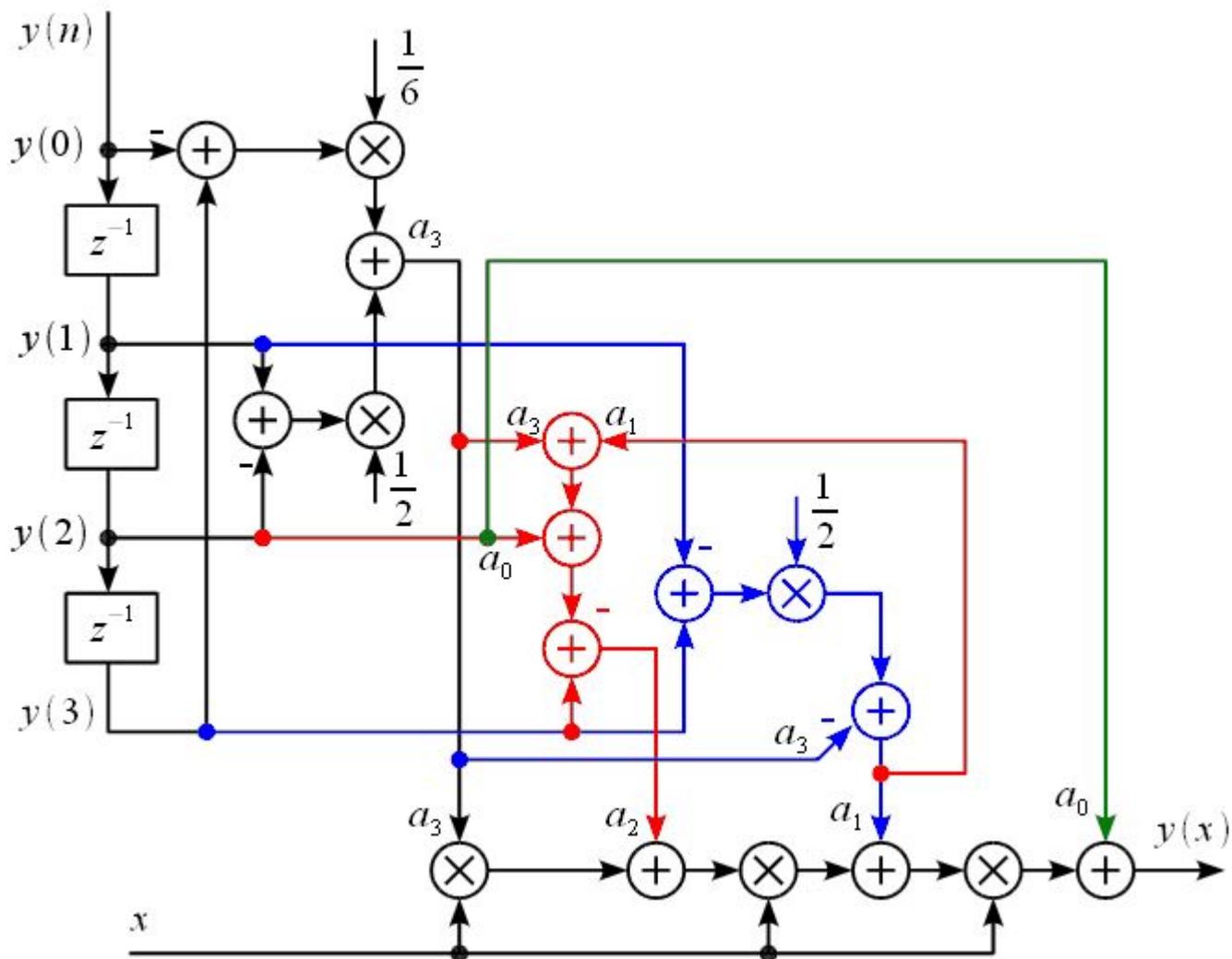
## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Схема фильтра Фарроу третьего порядка.



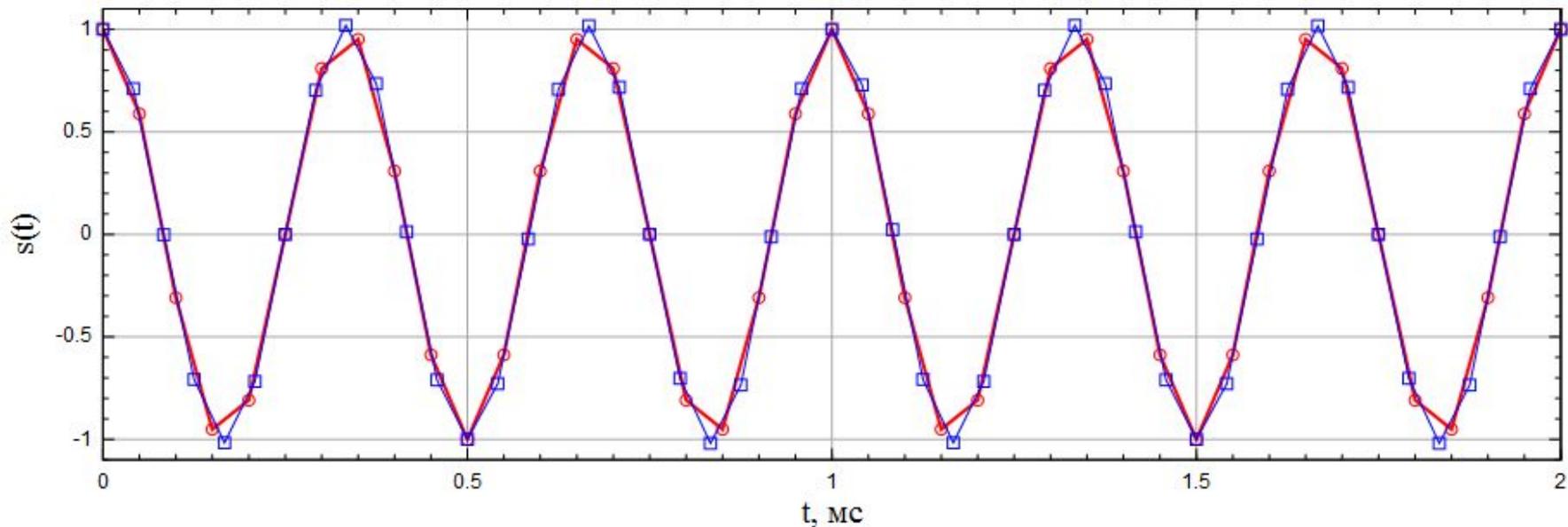
## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Схема модифицированного фильтра Фарроу третьего порядка.



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Пример передискретизации сигнала с помощью фильтра Фарроу.

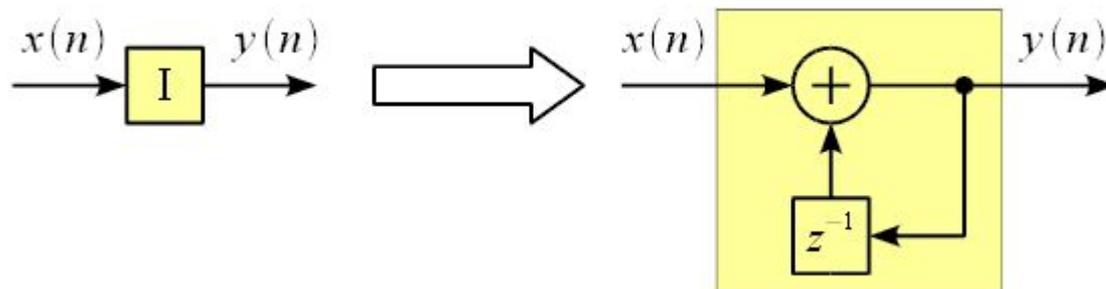


Сигнал с частотой 3 КГц, дискретизированный с частотой 20 КГц  
передискретизируется  
С частотой 24 КГц для достижения целого числа отсчетов на период.

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

БИХ-Фильтр интегратор.

$$y(n) = y(n-1] + x(n)$$



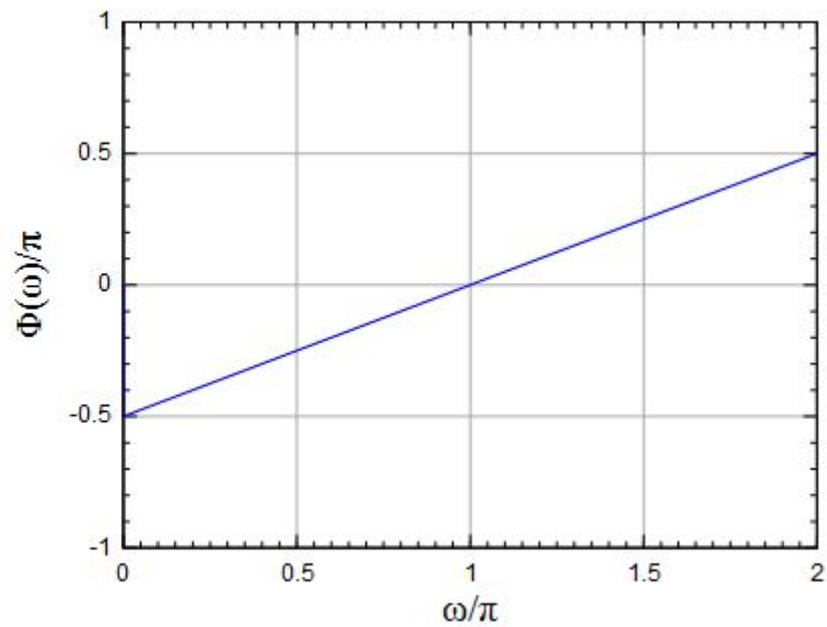
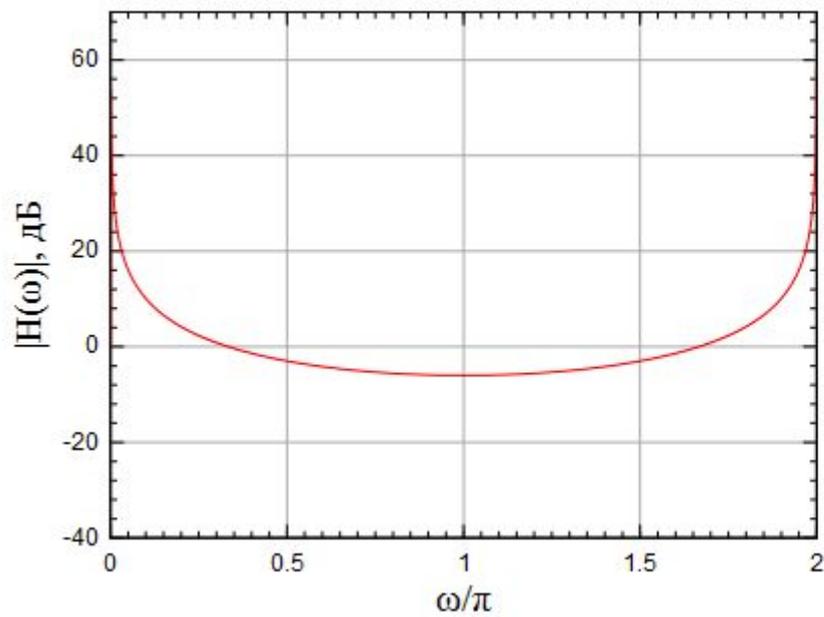
$$H_I(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\left| H_I(e^{j\omega}) \right| = \frac{1}{2 \cdot \sin(\omega/2)};$$

$$\Phi(H_I(e^{j\omega})) = \omega/2 - \pi/2.$$

## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

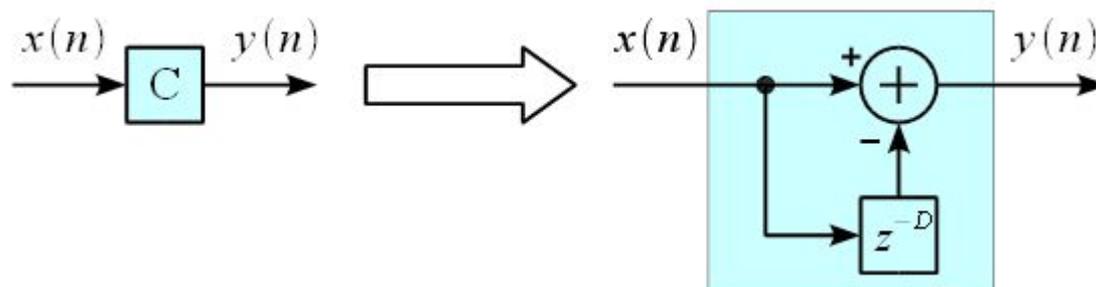
Фильтр интегратор



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Гребенчатый КИХ-фильтр.

$$y(n) = x(n) - x(n - D]$$

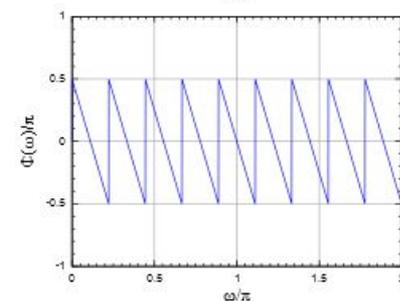
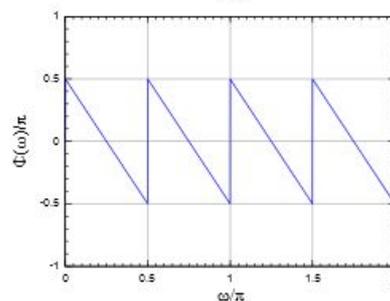
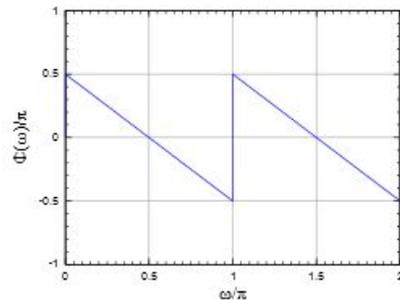
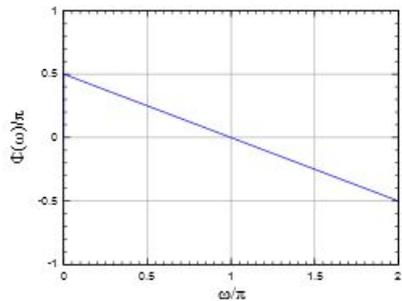
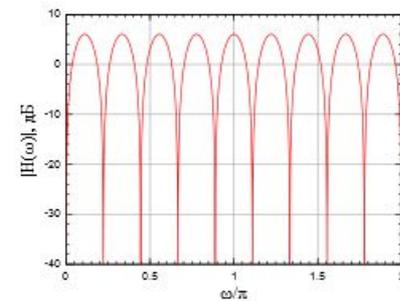
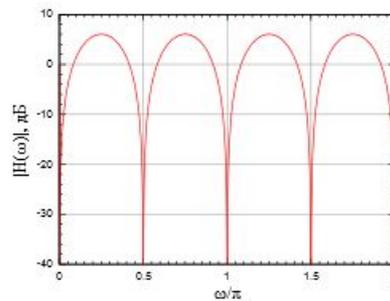
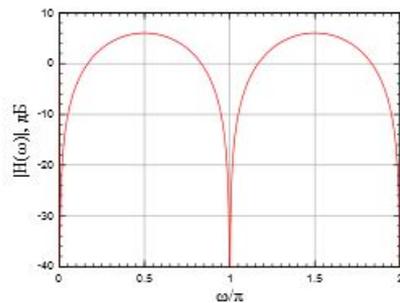
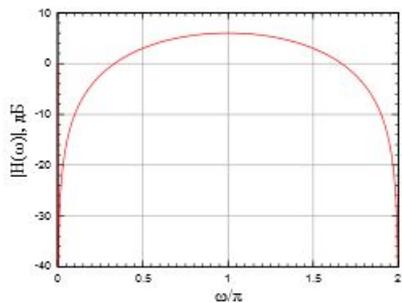


$$H_C(z) = 1 - z^{-D}$$

$$\begin{aligned} |H_C(e^{j\omega})| &= 2 \cdot |\sin(D \cdot \omega / 2)|; \\ \Phi(H_C(e^{j\omega})) &= -D \cdot \omega / 2 + \pi / 2. \end{aligned}$$

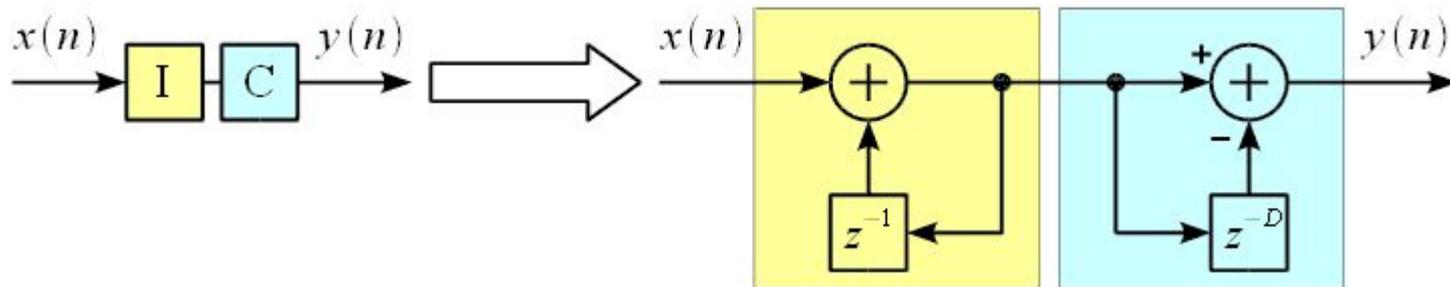
# II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

## Гребенчатый КИХ-фильтр.



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

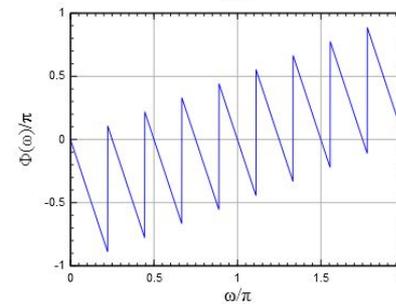
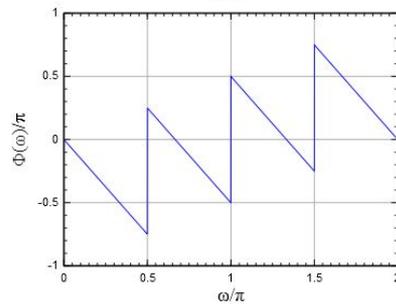
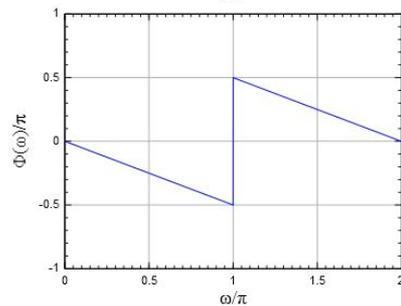
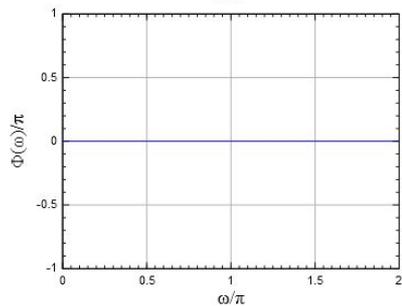
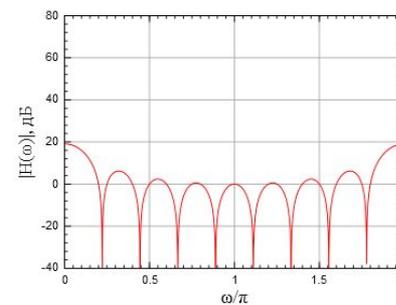
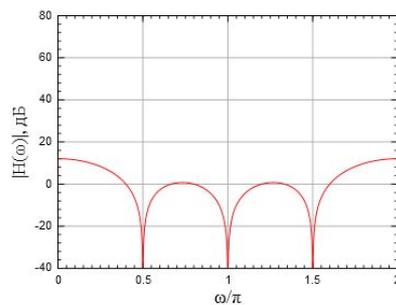
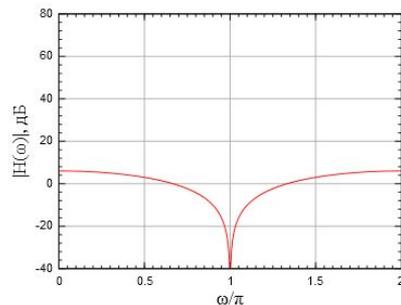
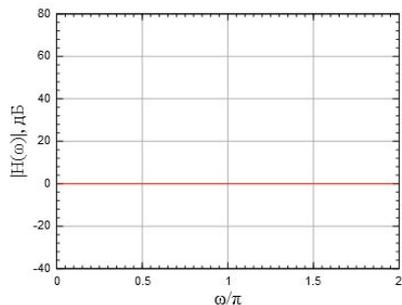
СИС фильтр первого порядка.



$$H_{СИС}(z) = \frac{1 - z^{-D}}{1 - z^{-1}}$$

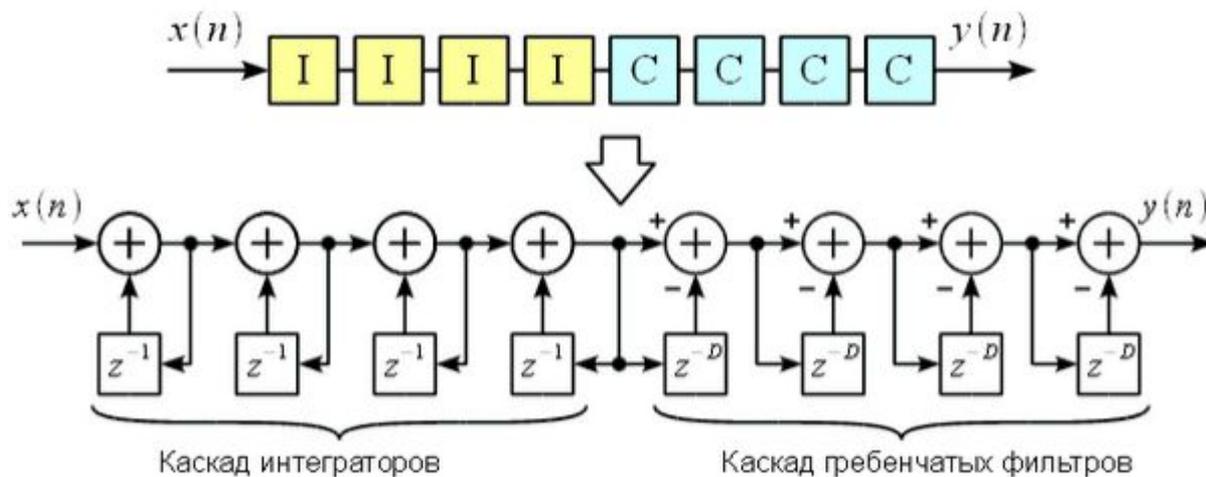
# II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

## СИС фильтр первого порядка.



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

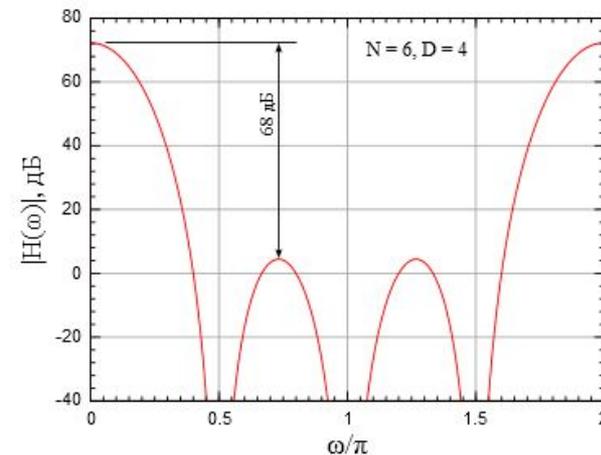
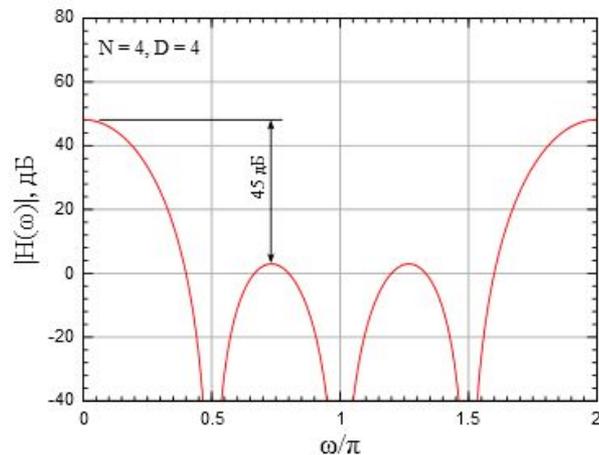
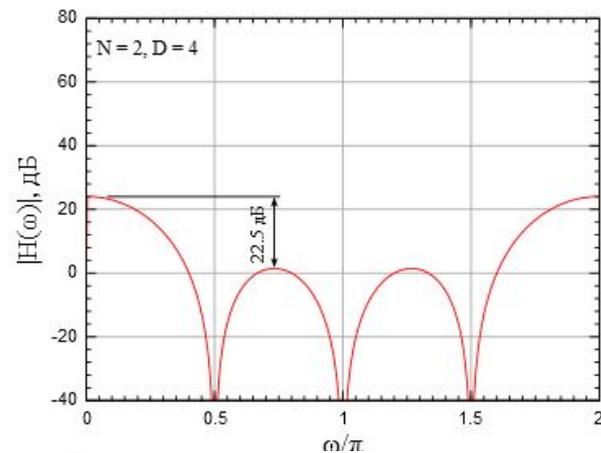
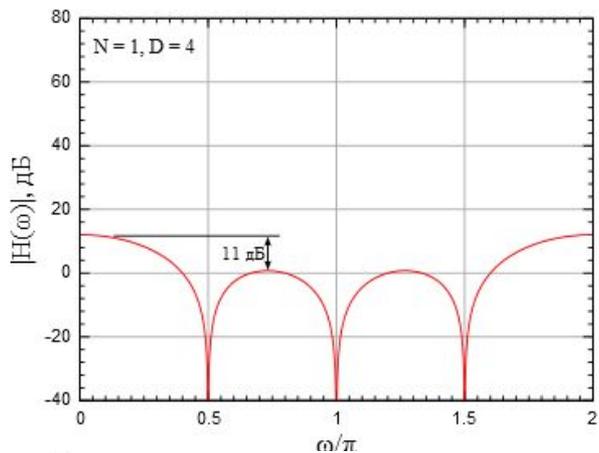
СИС фильтры высших порядков.



$$H_{\text{сис}}(e^{j\omega}) = \left[ \frac{\sin(D\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right]^{2N} \cdot \exp(-j \cdot N \cdot (D-1) \cdot \omega/2).$$

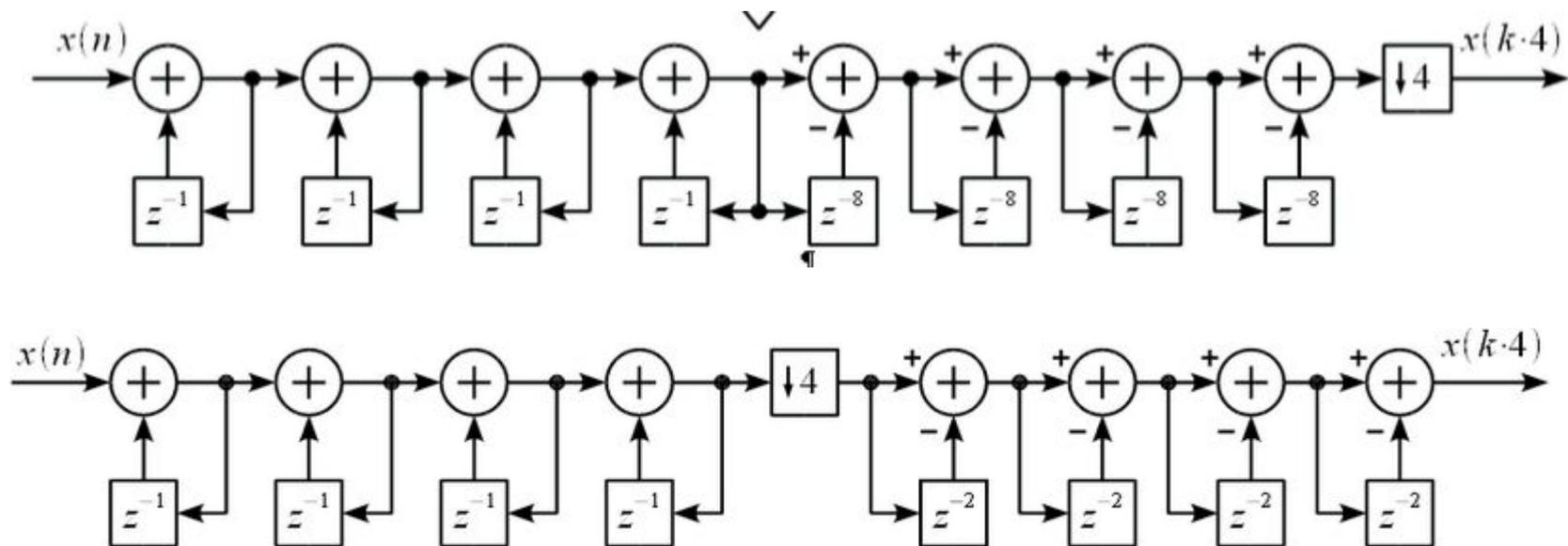
## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

### СИС фильтры высших порядков.



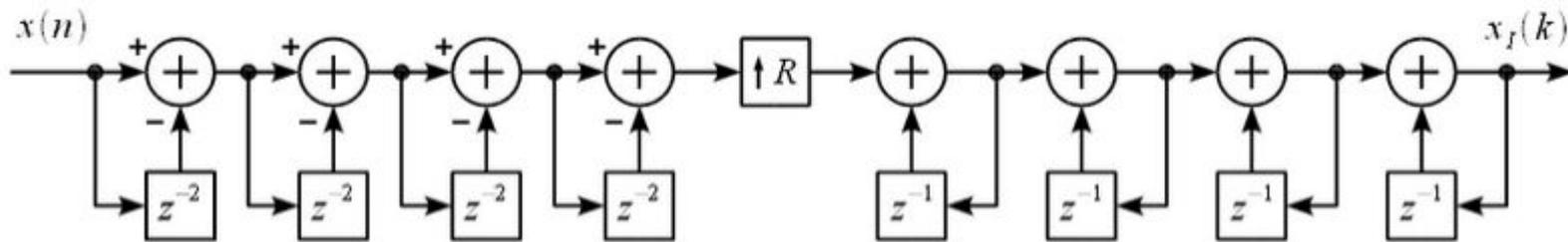
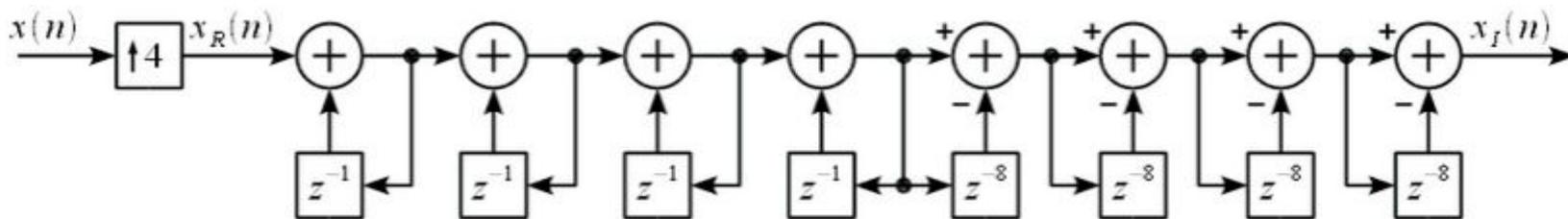
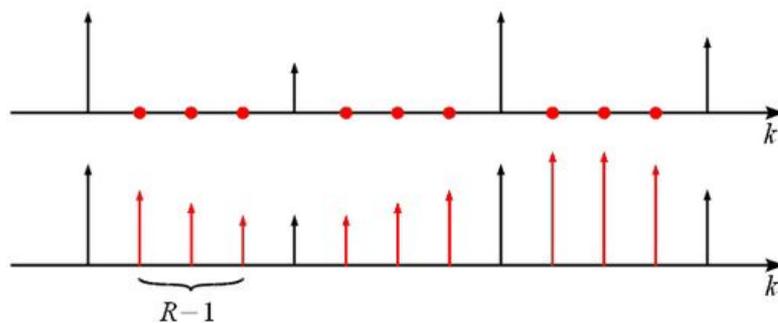
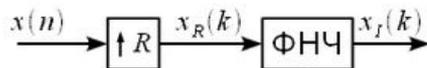
## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Децимация и интерполяция с помощью СИС фильтров Хогенауэра.



## II. Основные теоретические вопросы проектирования ПОР.

Децимация и интерполяция с помощью СИ фильтров Хогенауэра.





Московский Авиационный  
(Национальный Исследовательский  
Институт  
Университет)

---

**Спасибо за внимание.**