Дискретная математика

Операции и алгебры

- ***N-арная операция*** на множестве М – это функция типа

$$\varphi: M^n \to M \quad ,$$

- где ***n – арность*** операции. Операция замкнута относительно множества М по определению, т. е. операция над элементами множества М, и результат тоже элемент М.

- ***Алгеброй*** называется множество, вместе с заданной на нем совокупностью операций, т. е. система $\Omega = \{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \}$

$$A = (M; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

- ***M – основное (несущее) множество*** (носитель алгебры) алгебры *A*.
- ***Тип алгебры*** – вектор арностей операций.
- ***Сигнатура*** – совокупность операций Ω.

- Множество $M' \subset M$ называется ***замкнутым*** относительно

***n*-**арной операции на *M*, если

$$\varphi\left(M'^{n}\right) \subseteq M' ,$$

т. е. если значения на аргументе из M' принадлежат M'.

- Если M' замкнуто относительно всех операций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n,$ алгебры *A* с носителем *M*, то система

$$A' = \left(M'; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\right)$$

называется ***подалгеброй*** алгебры *A*

Примеры:

- Алгебра $(R, +, \cdot)$– называется ***полем действительных чисел.***
- Обе операции бинарные, поэтому тип этой алгебры (2,2).
- Сигнатура $\Omega = (+, \cdot)$.
- Подалгеброй этой алгебры является, например, ***поле рациональных чисел.***

Примеры:

- Пусть $N_p = \{0, 1, 2, \ldots, p \quad 1\}$.
  Определим на N_p операции:
  $\oplus$ – «сложение по модулю *p*»,
  $\otimes$ – «умножение по модулю *p*»,
  следующим образом:

$$a \oplus b = c \quad \text{и} \quad a \otimes b = d \;,$$

где $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ – остатки от деления на p чисел $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ соответственно.

Примеры:

- Пусть, например, $p = 7$, тогда

$$N_p = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$ и

$$3 \oplus 4 = 0\,,\quad 3 \otimes 4 = 5,$$

$$4 \oplus 6 = 3\,.$$

- Часто обозначают: $a + b = c \pmod{p}$ и $a \cdot b = d \pmod{p}$.

Примеры:

- ***Конечным полем характеристики p*** называется алгебра

$$\{N_p, \oplus, \otimes\}$$

если p – простое число.

Пример:

- ***Булеаном*** $\boldsymbol{U}$ называется множество всех подмножеств множества U (обозначается В(U)).
- ***Булева алгебра множеств над*** $\boldsymbol{U}$ ***или алгебра Кантора*** – алгебра В=(В(U),$\cup$, $\cap$, $\neg$). Ее тип (2,2,1), сигнатура $\Omega = (\cup, \cap, \neg)$.
- Элементами основного множества булевой алгебры являются множества (подмножества U).

Пример:

- Для любого $U' \subseteq U$

$$B' = \left(B(U'), \cup, \cap, \neg\right)$$

– является подалгеброй B.

Пример:

- Множество $U = \{a, b, c, d\}$

тогда основное множество

алгебры B содержит 16

элементов.

$$B' = (B(\{a, b\}), \cup, \cap, \neg)$$

является подалгеброй *B.*

Свойства бинарных алгебраических операций

- Операция φ называется ***ассоциативной,*** если для любых элементов ***a, b, c***

$$(a\varphi b)\varphi c = a\varphi(b\varphi c) = a\varphi b\varphi c$$

Пример:

1. Сложение и умножение чисел ассоциативны, что позволяет не ставить скобки в выражениях

и $a+b+c$ $a\cdot b\cdot c$

2. Возведение в степень $a^b = a\varphi b$

– не ассоциативна, так как $(a\varphi b)\varphi c = \left(a^b\right)^c = a^{bc}$

не равно $a\varphi(b\varphi c) = a^{b^c}$

Свойства бинарных алгебраических операций

- Операция φ называется ***коммутативной***, если для любых элементов a, b

$$a \varphi b = b \varphi a$$

Пример:

1 Сложение чисел коммутативно («от перемены мест слагаемых сумма не меняется»):

$$a + b = b + a$$

2. Умножение чисел коммутативно («от перемены мест множителей произведение не меняется»):

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Пример:

3 Вычитание и деление – некоммутативные

операции.

$$a - b \neq b - a$$

$$a / b \neq b / a$$

2. Умножение матриц – некоммутативная операция,

например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства бинарных алгебраических операций

- Операция φ называется ***дистрибутивной слева*** относительно операции ψ, если для любых a, b, c

$$a\varphi(b\psi c)=(a\varphi b)\psi(a\varphi c)$$

Свойства бинарных алгебраических операций

- Операция φ называется ***дистрибутивной справа*** относительно операции ψ, если для любых a, b, c

$$(a \psi b) \varphi c = (a \varphi c) \psi (b \varphi c)$$

Пример:

1 Умножение дистрибутивно относительно сложения слева и справа

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Пример:

2 Возведение в степень дистрибутивно относительно умножения справа.

$$(a\psi b)\varphi c = (a \cdot b)^{c} = a^{c} \cdot b^{c} = (a \varphi c)\psi (b \varphi c)$$

Пример:

но не слева, так как

$$a\,\varphi\,(b\,\psi\,c) = a^{b\cdot c}$$

$$(a\,\varphi\,b)\,\psi\,(a\,\varphi\,c) = a^{b}\cdot a^{c} = a^{b+c}$$

Пример:

- 3. Сложение не дистрибутивно относительно умножения

$$a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$$

$$(a \cdot b) + c \neq (a + c) \cdot (b + c)$$