

Динамика — это раздел теоретической (классической) механики, который изучает движение материальных тел и их систем под действием приложенных к ним сил.

Лекция 1

Динамика материальной точки

Динамика есть раздел теоретической (классической) механики, который изучает движение материальных тел и их систем под действием приложенных к ним сил.

Содержание курса:

Динамика материальной точки – 3 лекции

Общие теоремы динамики механической системы –
3 лекции

Основы аналитической механики – 3 лекции

Равновесие консервативных систем

Прецессионная теория гироскопа

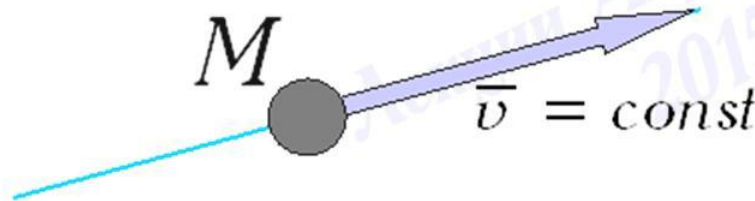
Метод кинетостатики для механической системы

Механические колебания

Динамика материальной точки

Аксиомы динамики материальной точки

A1 *Закон инерции:* Материальная точка движется равномерно и прямолинейно до тех пор, пока действие других тел не выведет ее из этого состояния.



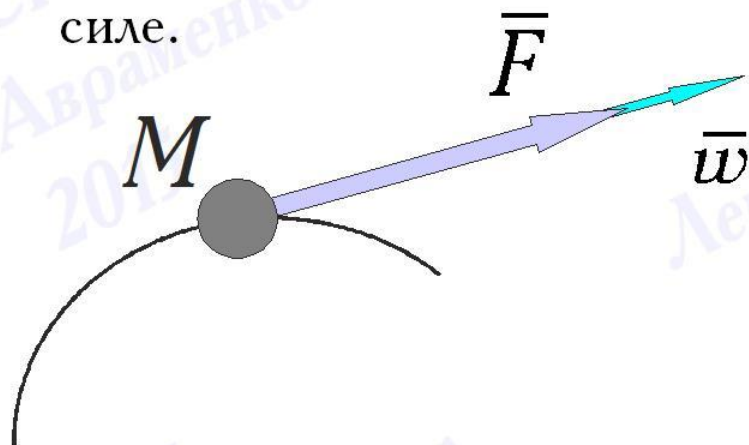
Свойство материальной точки сохранять прямолинейное и равномерное движение называется инерцией, а соответствующее движение точки - движением по инерции.

Аксиомы динамики материальной точки

ТОЧКИ

A2

Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки): Ускорение, которое материальная точка получает под действием приложенной к ней силы, имеет то же направление, что и силы, и по величине пропорционально силе.



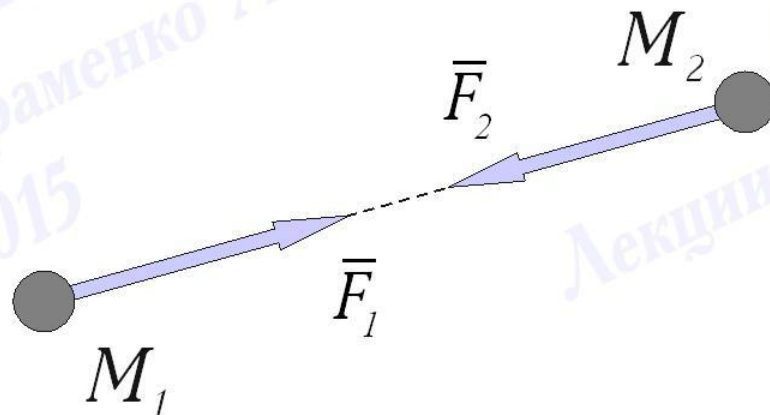
$$m\bar{w} = \bar{F}$$

Масса есть мера инертности точки — чем больше масса точки, тем большая нужна сила, чтобы изменить скорость этой точки.

Аксиомы динамики материальной точки

А3

Закон равенства действия и противодействия:
Силы, с которыми взаимодействуют две материальные точки, имеют равную величину, общую линию действия и противоположное направление.

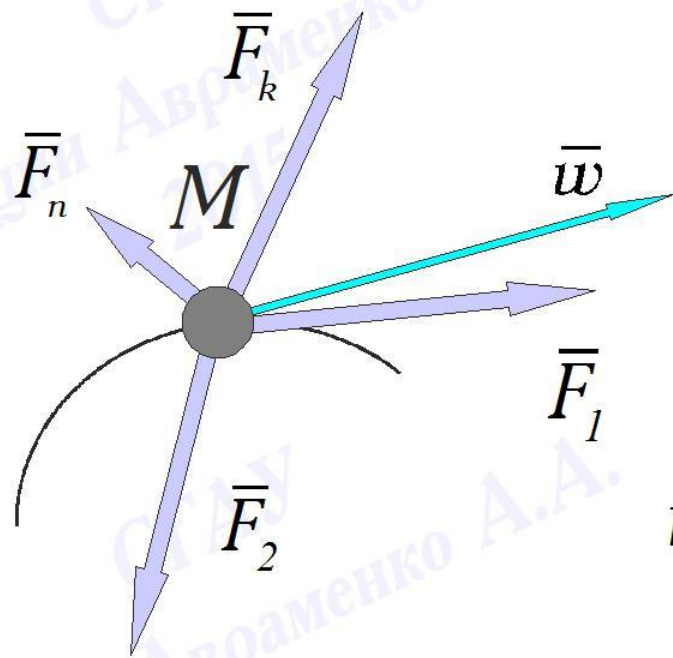


$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Этот закон выполняется при взаимодействии тел, если они соприкасаются в одной точке. Если взаимодействие тел происходит по поверхности или в некотором объеме, то оно не будет сводиться к одной силе.

Аксиомы динамики материальной точки

А4 **Закон независимости действия сил:** Ускорение, получаемое точкой под действием нескольких приложенных к ней сил, равно ускорению, которое получит эта точка под действием одной силы, равной геометрической сумме всех приложенных сил.



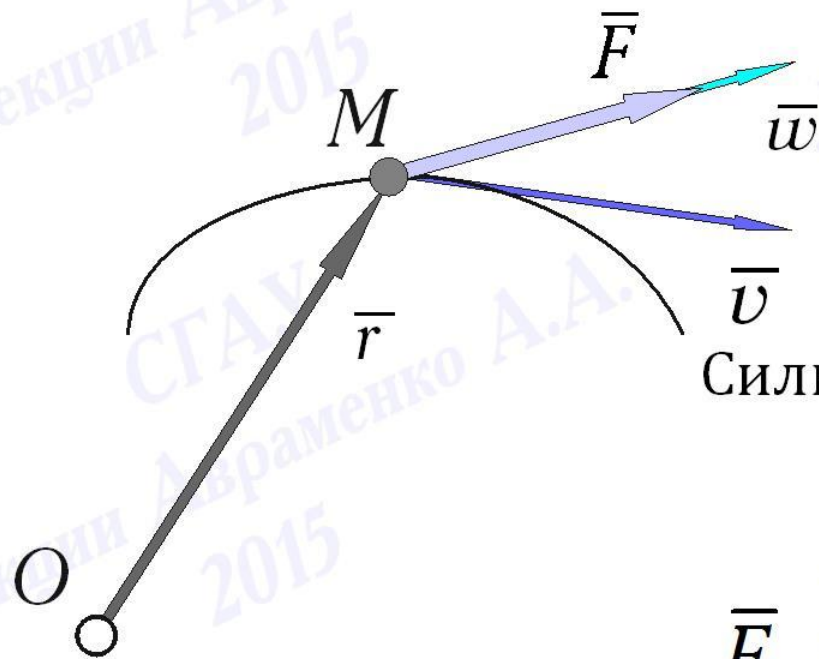
$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \Rightarrow m\vec{w} = \vec{R}$$

ИЛИ

$$m\vec{w}_k = \vec{F}_k \Rightarrow \vec{w} = \sum_{k=1}^n \vec{w}_k$$

Основное уравнение динамики материальной

ТОЧКИ



$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \left(t, \bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt} \right)$$

Силы, зависящие от положения точки

$$\bar{F}_{\text{упр}} = -c\bar{r}$$

$$\bar{F}_{\text{грав}} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\bar{r}}{r} = -\frac{GMm}{r^3} \bar{r}$$

Силы, зависящие от скорости точки

$$\bar{F}_{\text{тр}} = -\mu M \frac{\bar{v}}{v}$$

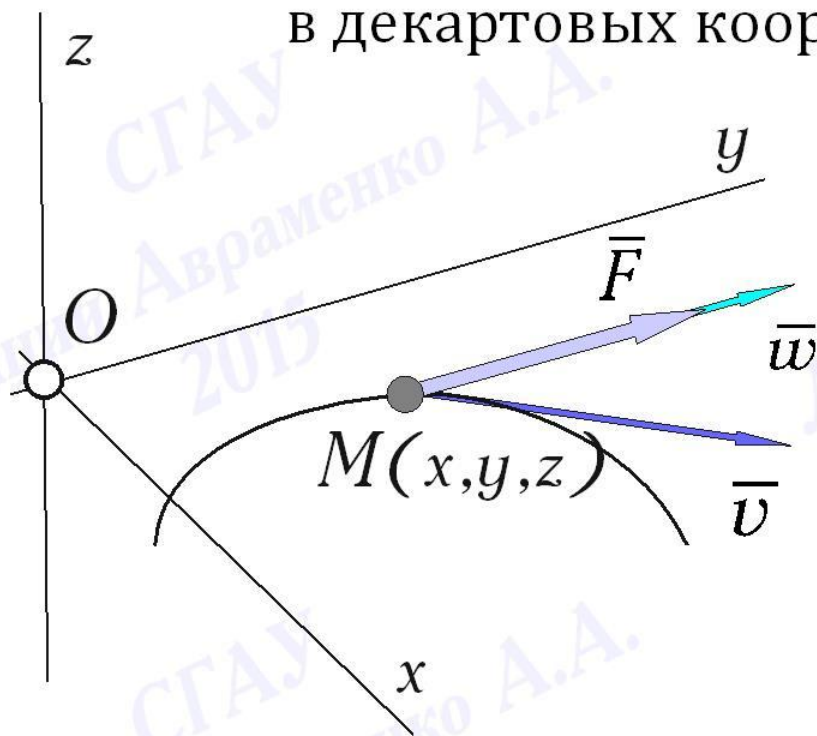
$$\bar{F}_{\text{сопр}} = -k\bar{v}$$

$$\bar{F}_{\text{сопр}} = -kv^2 \frac{\bar{v}}{v}$$

Основное уравнение динамики материальной точки

ТОЧКИ

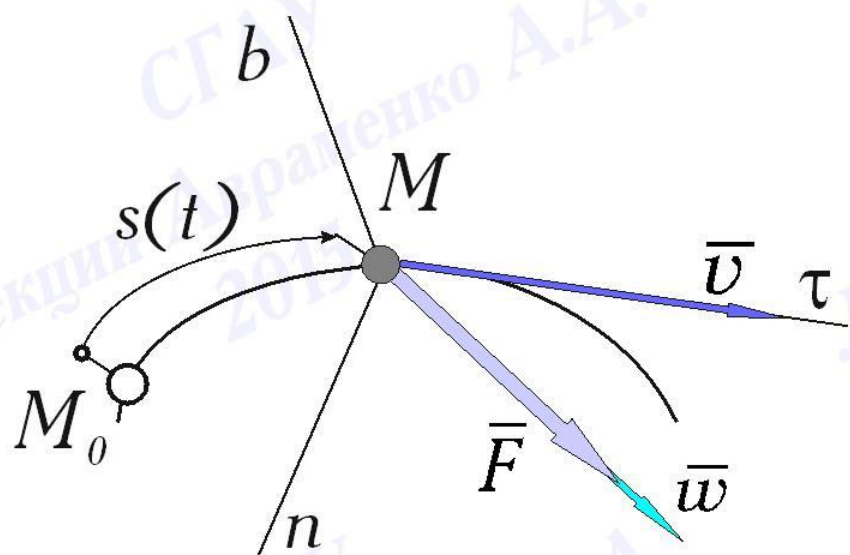
При координатном способе задания движения - в декартовых координатах



$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{cases}$$

Основное уравнение динамики материальной точки

При естественном способе задания движения



$$\left\{ \begin{array}{l} m\omega_\tau = m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(t, s, \dot{s}); \\ m\omega_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n(t, s, \dot{s}); \\ m\omega_b = 0 = F_b(t, s, \dot{s}). \end{array} \right.$$

Основные задачи динамики материальной точки

Первая или прямая задача: Известно движение материальной точки, требуется определить силы, вызывающие это движение.

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \quad \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}) = ?$$

$$\bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}) = m\bar{w}.$$

Для решения этой задачи достаточно найти ускорение точки, т.е. решить основную задачу кинематики.

Пример решения прямой задачи динамики

$$\begin{cases} x = a \cos kt; \\ y = b \sin kt. \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x(t) = mw_x = -mak^2 \cos kt; \\ F_y(t) = mw_y = -mbk^2 \sin kt. \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x(t) = -mk^2 \cdot a \cos kt = -mk^2 x; \\ F_y(t) = -mk^2 \cdot b \sin kt = -mk^2 y. \end{cases}$$

$$\bar{F} = -mk^2 \bar{r} = -c\bar{r}$$

Основные задачи динамики материальной точки

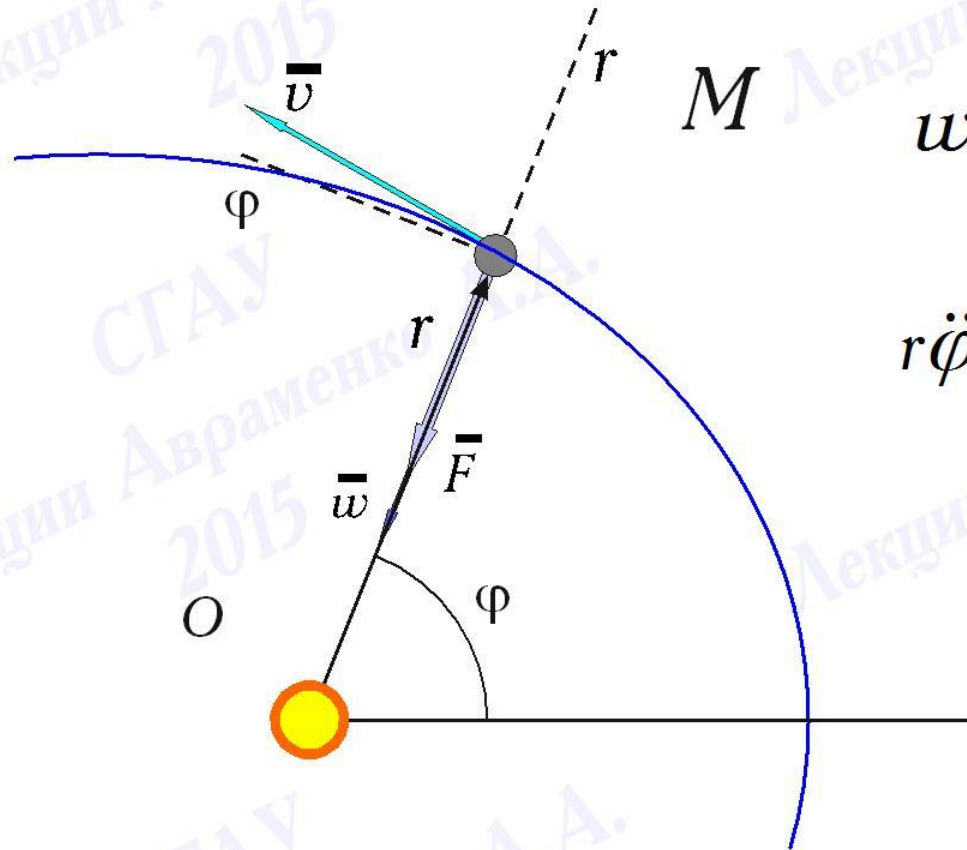
Вторая или обратная задача: Известны силы, действующие на точку, требуется определить движение этой точки.

$$\bar{F} = F(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}), \quad \bar{r}(t) = ?$$

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = F\left(t, \bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt}\right)$$

Решение этой задачи сводится к составлению и интегрированию дифференциальных уравнений движения материальной точки.

Пример решения обратной задачи динамики



$$w_{\varphi} = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 0$$

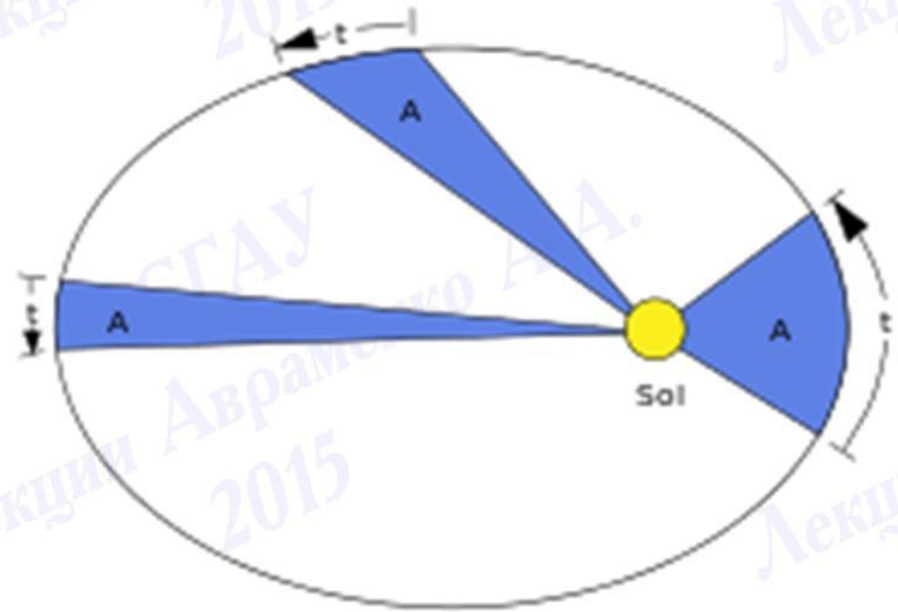
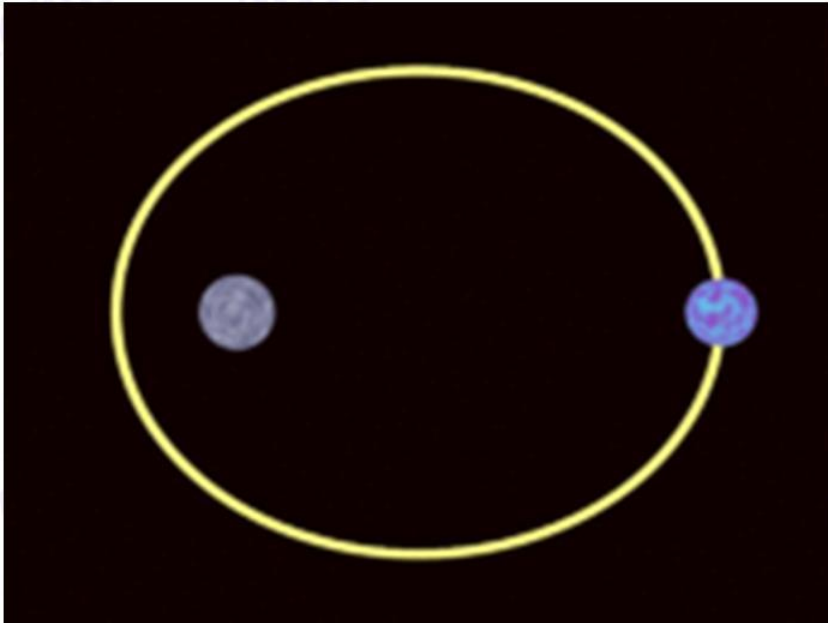
$$r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

$$r\dot{\varphi} = v_{\varphi}$$

$$rv_{\varphi} = c = \text{const}$$

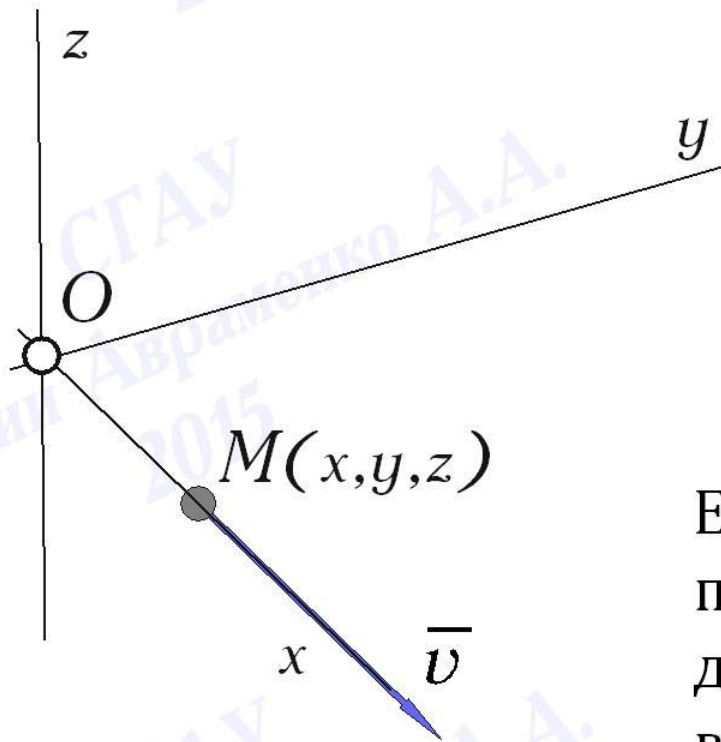
c - постоянная площадей в небесной механике

Второй закон Кеплера



Площади, ометаемые радиусом-вектором за одинаковые промежутки времени равны

Условия прямолинейного движения материальной точки



$$\begin{cases} x(t) = x(t); \\ y(t) = 0; \\ z(t) = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_x = m\ddot{x}; \\ F_y = m\ddot{y} = 0; \\ F_z = m\ddot{z} = 0. \end{cases}$$

Если точка движется прямолинейно, на нее должна действовать сила, направленная вдоль траектории движения

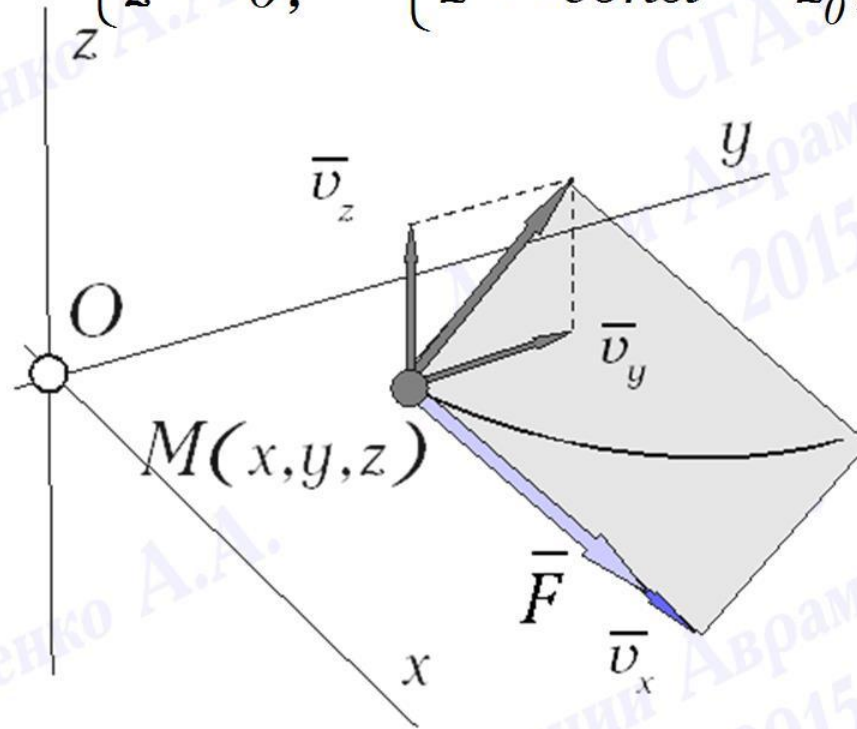
Условия прямолинейного движения материальной точки

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x; \\ m\ddot{y} = F_y = 0; \\ m\ddot{z} = F_z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} = 0; \\ \ddot{z} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = \text{const} = \dot{y}_0; \\ \dot{z} = \text{const} = \dot{z}_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dot{y}_0 t + y_0; \\ z = \dot{z}_0 t + z_0. \end{cases}$$



Условия прямолинейного движения материальной точки

$$\begin{cases} v_y = \dot{y}_0 = 0 \\ v_z = \dot{z}_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y_0 = \text{const} \\ z = z_0 = \text{const} \end{cases}$$

Для того, чтобы материальная точка совершала прямолинейное движение, необходимо и достаточно, чтобы сила, действующая на нее, имела неизменное направление, совпадающее с направлением начальной скорости.