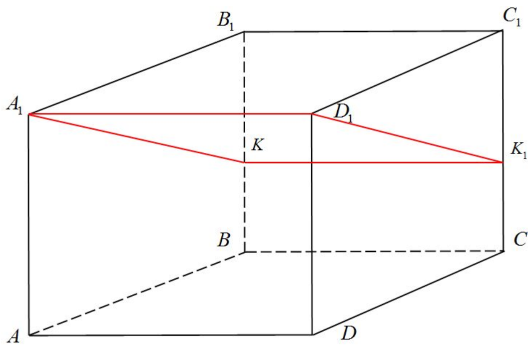
Стереометрия в задачах ЕГЭ

СЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ И КРУГЛЫЕ ТЕЛА

М.Г.КИМ, УЧИТЕЛЬ МАОУ СОШ № 77

Г. ХАБАРОВСК

В прямоугольном параллепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB = 2$, ребро $AD = \sqrt{5}$, ребро $AA_1 = 2$. Точка K — середина ребра BB_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, D_1 и K.



Ответ. 5

Решение.

Сечение пересекает параллельные грани по параллельным отрезкам. Поэтому четырехугольник $A_1KK_1D_1$ — параллелограмм. Кроме того, ребро A_1D_1 перпендикулярно граням DD_1C_1C и AA_1B_1B, поэтому углы $A_1D_1K_1$ и D_1A_1K — прямые. Следовательно, сечение $A_1KK_1D_1$ — прямоугольник.

Из прямоугольного треугольника A_1B_1K по теореме Пифагора найдем A_1K:

$$A_1K = \sqrt{(A_1B_1)^2 + (B_1K)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Тогда площадь прямоугольника $A_1KK_1D_1$ равна:

$A_1D_1 \cdot A_1K = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5.$

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $CD = 2$, ребро $BC = 2\sqrt{2}$, ребро $CC_1 = 4$. Точка K — середина ребра DD_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки C_1, B_1 и K.

Ответ. 8

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AD = 6$, ребро $CD = \sqrt{37}$, ребро $DD_1 = 2$. Точка K — середина ребра AA_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки D_1, C_1 и K.

Ответ. 37

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $CD = 4$, ребро $BC = \sqrt{17}$, ребро $CC_1 = 2$. Точка K — середина ребра DD_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки C_1, B_1 и K.

Ответ. 17

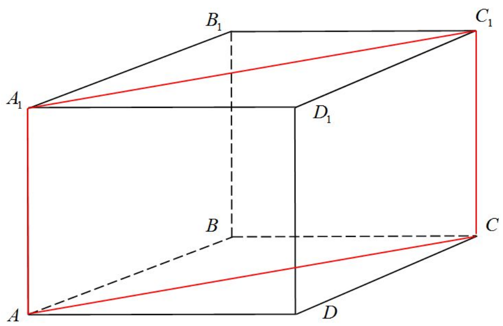
В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AD = 2$, ребро $CD = 2\sqrt{2}$, ребро $DD_1 = 4$. Точка K — середина ребра AA_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки D_1, C_1 и K.

Ответ. 8

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AD = 2$, ребро $CD = \sqrt{5}$, ребро $DD_1 = 2$. Точка K — середина ребра AA_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки D_1, C_1 и K.

Ответ. 5

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 24$, $AD = 10$, $AA_1 = 22$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, A_1 и C.



Решение.

Сечение пересекает параллельные грани по параллельным отрезкам. Поэтому сечение AA_1C_1C – параллелограмм. Кроме того, ребро A_1A перпендикулярно граням $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Поэтому углы AA_1C_1 и A_1AC – прямые. Поэтому сечение AA_1C_1C — прямоугольник.

Из прямоугольного треугольника ABC найдем AC

$$AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26$$

Тогда площадь прямоугольника AA_1C_1C равна:

$AA_1 \cdot AC = 22 \cdot 26 = 572$

Ответ. 572

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 44$, $AD = 33$, $AA_1 = 6$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины D, D_1 и B.

Ответ. 330

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 21$, $AD = 28$, $AA_1 = 25$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины D, D_1 и B.

Ответ. 875

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 12$, $AD = 16$, $AA_1 = 3$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины B, B_1 и D.

Ответ. 60

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 40$, $AD = 30$, $AA_1 = 48$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, A_1 и C.

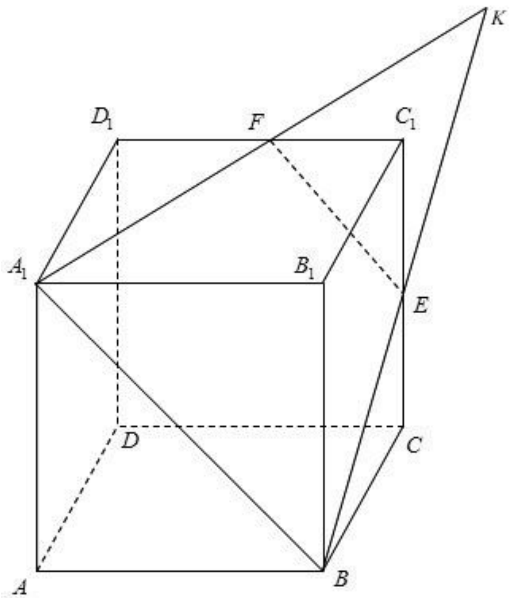
Ответ. 2400

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 36$, $AD = 15$, $AA_1 = 48$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины C, C_1 и A.

Ответ. 1872

Задание C2

Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью A_1BE, если ребра куба равны 2.



Решение.

Прямая BE пересекает прямую B_1C_1 в точке K. Прямая A_1K пересекает ребро C_1D_1 в его середине — точке F. A_1BEF — сечение куба плоскостью A_1BE.

Равнобедренный треугольник A_1BK подобен треугольнику KFE $A_1K = BK = 2BE = 2\sqrt{5}$,

$A_1B = \sqrt{2} \cdot AB = 2\sqrt{2}$ и высота $KH = \sqrt{BK^2 - \left(\frac{A_1B}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$.

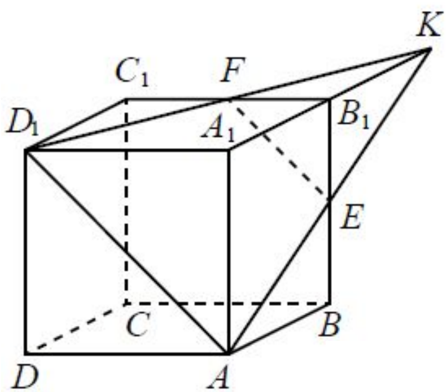
Поскольку EF — средняя линия треугольника A_1BK, получаем:

$$S_{KEF} = \frac{1}{4} S_{A_1BK}$$

$$S_{A_1BEF} = S_{A_1BK} - S_{KEF} = \frac{3}{4} S_{A_1BK} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot KH \cdot A_1B = 4{,}5$$

Ответ. 4,5

Точка E — середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью D_1AE, если ребра куба равны 4.



Ответ. 18

Решение.

Прямая AE пересекает прямую A_1B_1 в точке K. Прямая D_1K пересекает ребро B_1C_1 в его середине — точке F. $AEFD_1$ — сечение куба плоскостью D_1AE.

В равнобедренном треугольнике AKD_1 имеем

$D_1K = AK = 2AE = 4\sqrt{5}$ $AD_1 = \sqrt{2} \cdot AD = 4\sqrt{2}$ и высота

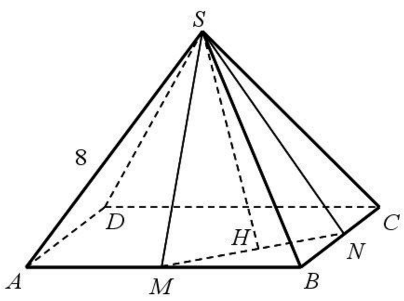
$$KH = \sqrt{AK^2 - \left(\frac{AD_1}{2}\right)^2} = 6\sqrt{2}.$$

Поскольку EF — средняя линия треугольника AKD_1, получаем:

$$S_{KEF} = \frac{1}{4} S_{AKD_1}$$

$$S_{AEFD_1} = S_{AKD_1} - S_{KEF} = \frac{3}{4} S_{AKD_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot KH \cdot AD_1 = 18.$$

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины ребер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если все ребра пирамиды равны 8.



Решение.

Пусть M — середина AB, а N — середина BC. Тогда площадь сечения равна площади треугольника SMN. Найдем последовательно SM, MN и SN.

SM и SN — медианы треугольников SAB и SBC соответственно. Т. к. эти треугольники равносторонние (поскольку все ребра пирамиды одинаковой длины),

$$SM = SN = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 4\sqrt{3}.$$

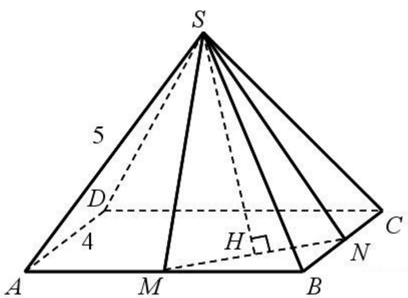
Найдем теперь MN из прямоугольного треугольника MBN. В нем катеты равны 4. Гипотенуза MN, по теореме Пифагора, будет равна $4\sqrt{2}$.

Теперь найдем площадь равнобедренного треугольника SMN. Для этого проведем высоту SH, по теореме Пифагора равную $2\sqrt{10}$, и вычислим площадь:

$$S = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{5}.$$

Ответ. $8\sqrt{5}$

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 5, а сторона основания равна 4.



Решение.

Пусть M — середина AB, а N — середина BC Тогда площадь сечения равна площади треугольника SMN Найдем последовательно SM, SN и MN. SM и SN — медианы треугольников SAB и SBC соответственно. Так как эти треугольники равнобедренные (поскольку пирамида правильная),

$$SM = SN = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

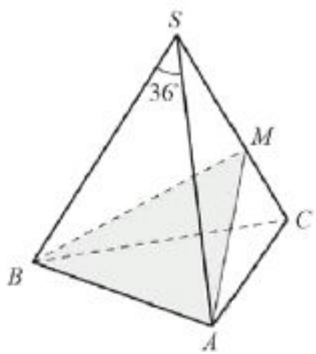
Найдем теперь MN из прямоугольного треугольника MBN. В нем катеты равны 2. Гипотенуза MN по теореме Пифагора, будет равна $2\sqrt{2}$.

Теперь найдем площадь равнобедренного треугольника SMN. Для этого проведем высоту SH, которая, по теореме Пифагора, равна $\sqrt{19}$ и вычислим площадь:

$$S = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{38}.$$

Ответ. $\sqrt{38}$

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна 8, а угол ASB равен 36°. На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A, M и B.



Решение.

Нужное сечение — треугольник AMB.

Рассмотрим треугольник ASC .Он равнобедренный.

$\angle ASC = \angle ASB = 36°$, поэтому $\angle SAC = \angle SCA = 72°$.

Значит, $\angle MAC = 36°$.

Рассмотрим теперь треугольник CAM. Сумма его углов 180°, значит, $\angle AMC = 72°$.

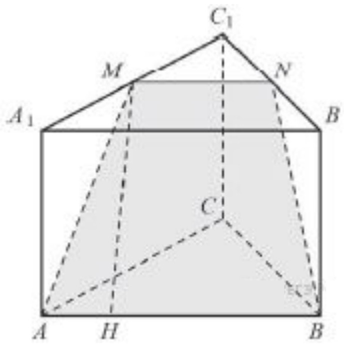
Следовательно, треугольник CAM равнобедренный, и поэтому $AM = AC = 8$. Аналогично находим, что $BM = 8$.

Таким образом, треугольник AMB равносторонний со стороной 8.

Его площадь равна $\frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$.

Ответ. $16\sqrt{3}$

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 6, боковые рёбра равны 4. Изобразите сечение, проходящее через вершины A, B и середину ребра A_1C_1. Найдите его площадь.



Решение.

Обозначим через M и N средины ребер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно.

По теореме о средней линии треугольника $MN \parallel A_1B_1 \parallel AB$, так что прямые MN и ABлежат в одной плоскости. Сечение про которое спрашивается в условии, – это сечение призмы этой плоскостью. Оно представляет собой равнобокую трапецию $AMNB$.

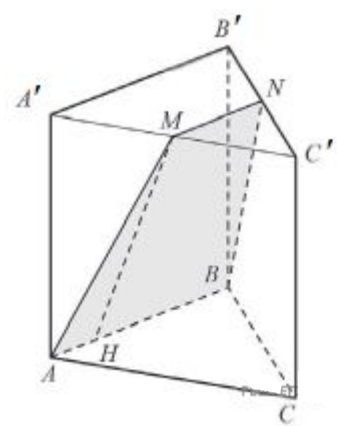
Основания трапеции $AB = 6$, $MN = 3$, по теореме Пифагора найдем боковую сторону: $AM = \sqrt{AA_1^2 + A_1M^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

Проведем в трапеции высоту MH. Отрезок AH равен полуразности оснований трапеции: $AH = \frac{AB-MN}{2} = 3/2$

Следовательно, высота трапеции $MH = \sqrt{5^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{2}$. Зная её, находим площадь трапеции: $S_{AMNB} = \frac{MN+AB}{2} \cdot MH = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{9}{4}\sqrt{91}$

Ответ. $\frac{9}{4}\sqrt{91}$

В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 4. Изобразите сечение, проходящее через вершины A, B и середину ребра $A'C'$. Найдите его площадь.



Решение.

Параллельные грани оснований сечение пересекает по параллельным прямым, поэтому сечение — трапеция. Пусть точка M — середина $A'C'$, точка N — середина $B'C'$. Боковые стороны трапеции $ABNM$ являются гипотенузами равных прямоугольных треугольников $AA'M$ и $BB'N$, катеты которых равны 3 и 4. Тем самым, трапеция является равнобедренной, а ее боковые стороны равны 5.

Отрезок MN — средняя линия треугольника $A'B'C'$, поэтому $MN = 0{,}5\ A'C' = 3$. Пусть MH — высота трапеции, тогда

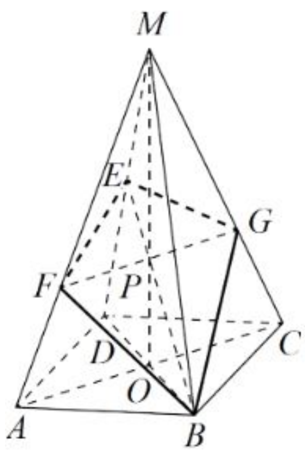
$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

Следовательно,

$$S_{\text{трап}} = \frac{AB+MN}{2} \cdot MH = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{9\sqrt{91}}{4}.$$

Ответ. $\frac{9\sqrt{91}}{4}$

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые ребра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.



Решение.

$MF: FA = MG: GC = MP: PO = 2: 1,$

$FG = \frac{2}{3} AC = \frac{2\sqrt{2} \cdot AB}{3} = 10\sqrt{2}.$

Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$BE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MB^2}}{2} = 17.$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{BCFEG} = \frac{BE \cdot FG}{2} = 85\sqrt{2}.$

Ответ. $85\sqrt{2}$

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 20, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка M принадлежит ребру A_1D_1 и делит его в отношении $2:3$ считая от вершины D_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и M.

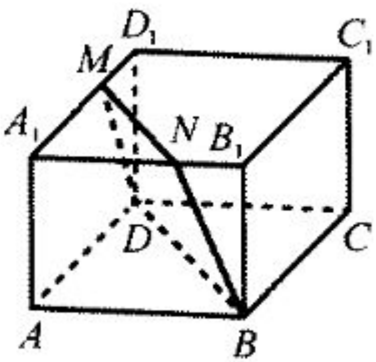


Рис. 1

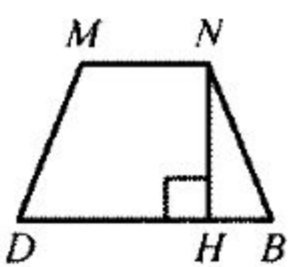


Рис. 2

Ответ. $144\sqrt{2}$

Решение.

Отрезок MN параллелен диагонали BD (точка N принадлежит ребру A_1B_1), следовательно, искомое сечение — трапеция $BDMN$ (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD параллельной B_1D_1 значит, MN параллелен B_1D_1.

Треугольники NA_1M и $B_1A_1D_1$ подобны, следовательно,

$A_1N : A_1B_1 = A_1M : A_1D_1 = MN : B_1D_1 = 3:5$.

Значит, $BD = B_1D_1 = 20\sqrt{2},\ MN = 12\sqrt{2}$.

В равных прямоугольных треугольниках BB_1N и DD_1M

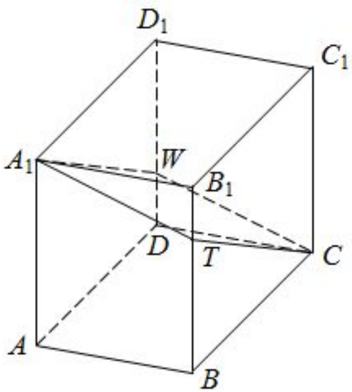
$DM = BN = \sqrt{BB_1^2 + B_1N^2} = \sqrt{113}$, значит, трапеция $BDMN$ равнобедренная.

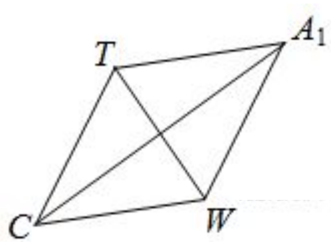
Пусть NH — высота трапеции $BDMN$, проведённая к основанию BD (рис. 2), тогда:

$BH = \frac{BD - MN}{2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow NH = \sqrt{BN^2 - BH^2} = 9 \Leftrightarrow$

$S_{BDMN} = \frac{BD + MN}{2} \cdot NH = 144\sqrt{2}$.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 8$, $AD = 7$, $AA_1 = 5$. Точка W принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении 1:4, считая от вершины D. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C, W и A_1.





Решение.

Отрезок CT параллелен A_1W (точка T принадлежит ребру BB_1). Плоскость сечения пересекает плоскость AA_1B_1 по прямой A_1T параллельной CW, следовательно, искомое сечение — параллелограмм CTA_1W (рис. 1).

Треугольники CBT и A_1D_1W равны, следовательно,

$BT = D_1W = \frac{4}{5}DD_1 = 4$; $DW = DD_1 - D_1W = 1$.

$CT = \sqrt{BC^2 + BT^2} = \sqrt{65}$; $CW = \sqrt{CD^2 + DW^2} = \sqrt{65}$,

значит, CTA_1W — ромб со стороной $\sqrt{65}$ и диагональю

$CA_1 = \sqrt{CB^2 + BA^2 + AA_1^2} = \sqrt{138}$ (рис. 2).

Тогда диагональ

$WT = 2\sqrt{CT^2 - \left(\frac{CA_1^2}{2}\right)} = \sqrt{122}$; $S_{CTA_1W} = \frac{(CA_1 \cdot WT)}{2} = \sqrt{4209}$.

Ответ. $\sqrt{4209}$

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 5$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $2:3$ считая от вершины B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1.

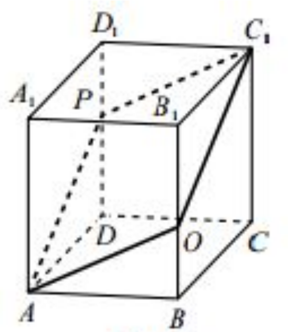


Рис. 1

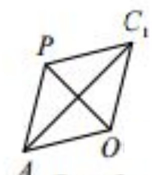


Рис. 2

Решение.

Сечение плоскостью AOC_1 пересекает ребро DD_1 в точке P. Отрезок AP параллелен C_1O, отрезок C_1P параллелен AO. Следовательно, искомое сечение — параллелограмм AOC_1P (рис.1). Далее имеем:

$$BO = \frac{2}{5}BB_1 = 2,\ B_1O = 3,\quad C_1O = \sqrt{C_1B_1^2 + B_1O^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13},$$

$$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Значит, AOC_1P — ромб. Найдем его диагонали:

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38};$$

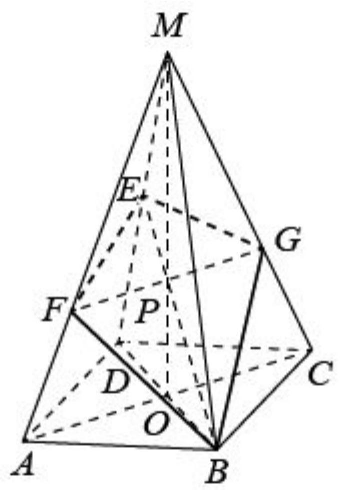
$$OP = 2\sqrt{AO^2 - \frac{1}{4}AC_1^2} = \sqrt{4 \cdot 13 - 38} = \sqrt{14}.$$

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Поэтому

$$S_{AOC_1P} = \frac{AC_1 \cdot OP}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{38} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{133}.$$

Ответ. $\sqrt{133}$

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.



Ответ. $5\sqrt{2}$

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

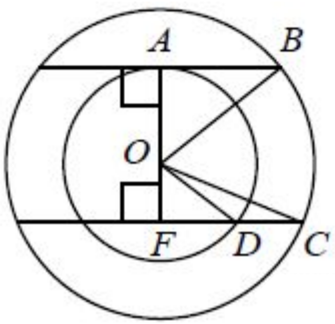
$$MF:FA = MG:GC = MP:PO = 2:1,\ FG = \frac{2}{3}AC = 2\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $BEFG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD значит,

$$BE = \frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2} = 5.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{BFEG} = \frac{BE\cdot FG}{2} = 5\sqrt{2}$.

Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 8. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.



Решение.

Сечение шара плоскостью — круг. Рассмотрим сечение, проходящее через общий центр шаров и центры кругов. Обозначение центра, точки касания и точек пересечения поверхностей шаров с плоскостями α и β дано на рисунке.

FD — радиус круга, полученного в сечении меньшего шара плоскостью α, тогда $S_\alpha = \pi \cdot FD^2 = 8$ — площадь сечения меньшего шара плоскостью α.

AB — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью β, тогда $S_\beta = \pi \cdot AB^2 = 5$ — площадь сечения большего шара плоскостью β.

CF — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью α.

Параллельные прямые AB и CF перпендикулярны прямой AF.

Из прямоугольных треугольников получаем:

$OF^2 = OC^2 - CF^2 = OD^2 - FD^2$,

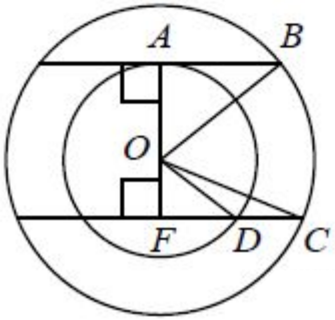
откуда $CF^2 = OC^2 - OD^2 + FD^2 = OB^2 - OA^2 + FD^2 = AB^2 + FD^2$.

Площадь сечения большего шара плоскостью α:

$S = \pi \cdot CF^2 = \pi \cdot AB^2 + \pi \cdot FD^2 = 13$.

Ответ. 13

Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 6. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 4. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.



Решение.

Сечение шара плоскостью — круг. Рассмотрим сечение, проходящее через общий центр шаров и центры кругов.

Обозначение центра, точки касания и точек пересечения поверхностей шаров с плоскостями α и β дано на рисунке.

FD — радиус круга, полученного в сечении меньшего шара плоскостью α тогда $S_\alpha = \pi \cdot FD^2 = 6$ — площадь сечения меньшего шара плоскостью α.

AB — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью β, тогда $S_\beta = \pi \cdot AB^2 = 4$ — площадь сечения большего шара плоскостью β.

CF — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью α. Параллельные прямые AB и CF перпендикулярны прямой AF.

Из прямоугольных треугольников получаем: $OF^2 = OC^2 - CF^2 = OD^2 - FD^2$, откуда $CF^2 = OC^2 - OD^2 + FD^2 = OB^2 - OA^2 + FD^2 = AB^2 + FD^2$.

Площадь сечения большего шара плоскостью α:

$S = \pi \cdot CF^2 = \pi \cdot AB^2 + \pi \cdot FD^2 = 10$.

Ответ. 10

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро AA_1=7. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 и делит его в отношении 8:3, считая от вершины B_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K.

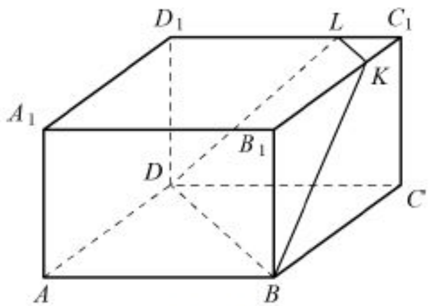


Рис. 1

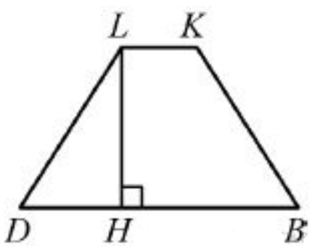


Рис. 2

Решение.

Пусть L — точка, в которой плоскость сечения пересекает ребро C_1D_1. Отрезок KL параллелен диагонали BD. Искомое сечение — трапеция $BDLK$ (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD, параллельной B_1D_1, значит, KL параллельно B_1D_1.

Треугольники LC_1K и $D_1C_1B_1$ подобны, следовательно,

$C_1L\colon C_1D_1 = C_1L\colon C_1B_1 = KL\colon B_1D_1 = 3\colon 11$.

Значит, $BD = B_1D_1 = 11\sqrt{2},\ KL = 3\sqrt{2}$.

В равных прямоугольных треугольниках DD_1L и BB_1K имеем

$BK = DL = \sqrt{DD_1^2 + D_1L^2} = \sqrt{113}$, значит, трапеция $BDLK$ равнобедренная.

Пусть LH — высота трапеции $BDLK$, проведённая к основанию BD (рис.2), тогда: $DH = \frac{BD-KL}{2} = 4\sqrt{2}$; $LH = \sqrt{DL^2 - DH^2} = 9$;

$S_{BDLK} = \frac{BD+KL}{2} \cdot LH = 63\sqrt{2}$.

Ответ. $63\sqrt{2}$

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 5, AD = 4, AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении 4:5, считая от вершины B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1.

Решение.

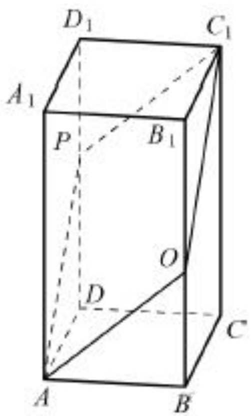


Рис. 1

Пусть плоскость AOC_1 пересекает ребро DD_1 в точке P. Плоскость сечения пересекает плоскость CC_1D_1 по прямой C_1P параллельной AO следовательно, искомое сечение — параллелограмм AOC_1P (рис. 1).

Треугольники ADP и C_1B_1O равны, следовательно,

$DP = B_1O = \frac{5}{9}BB_1 = 5; BO = BB_1 - B_1O = 4$

Далее, $AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \sqrt{41}; AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{41}$, значит, AOC_1P и — ромб со стороной $\sqrt{41}$ и диагональю

$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{122}$ (рис. 2).

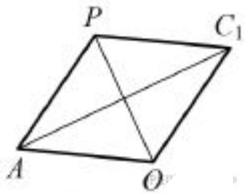


Рис. 2

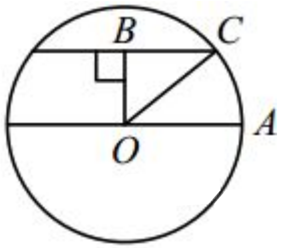
Тогда другая диагональ

$OP = 2\sqrt{AO^2 - \left(\frac{AC_1}{2}\right)^2} = \sqrt{42}; S_{AOC_1P} = \frac{AC_1}{2} = \sqrt{1281}.$

Ответ. $\sqrt{1281}$

Две параллельные плоскости, расстояние между которыми 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84. Найдите радиус шара.

Решение.



Сечение шара плоскостью — круг. Рассмотрим сечение плоскостью, проходящей через центры сечений. Обозначения даны на рисунке. OA — радиус шара, тогда $S_1 = \pi \cdot OA^2$ — площадь сечения шара плоскостью, проходящей через его центр. BC — радиус меньшего круга, полученного в сечении, тогда $S_2 = \pi \cdot BC^2$ — площадь сечения шара второй плоскостью.

Из отношения площадей сечений получаем: $\frac{BC}{OA} = \frac{\sqrt{21}}{5}$. OB — расстояние между плоскостями, равное 2.

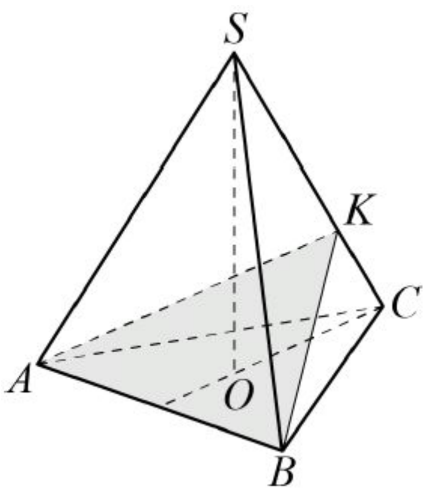
В прямоугольном треугольнике OBC: $OC^2 = BC^2 + OB^2$, откуда получаем:

$$OA^2 = \left(\frac{\sqrt{21}}{5} OA\right)^2 + 4; \qquad OA = 5.$$

Ответ. 5

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро $SA = 5$, а сторона основания $AB = 4$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро AB перпендикулярно ребру SC.

Решение.



В треугольнике BCS проведём высоту BK, тогда искомое сечение — треугольник ABK. Пусть Q — площадь треугольника ABK. Сечение из условия разбивает пирамиду на тетраэдры $CAKB$ и $SAKB$. Их суммарный объём $\frac{1}{3}\cdot Q\cdot SK+\frac{1}{3}\cdot Q\cdot CK=\frac{1}{3}\cdot Q\cdot SC=\frac{5Q}{3}$ равен объёму пирамиды.

Пусть — SO высота пирамиды. В треугольнике SCO имеем:

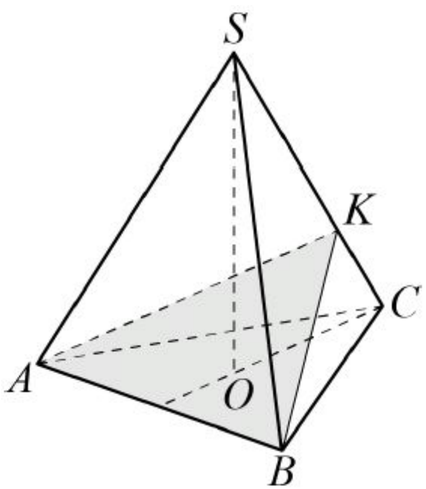
$$CO=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3},\ \ SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{25-\frac{16}{3}}=\frac{\sqrt{59}}{\sqrt{3}}.$$

Объём пирамиды $SABC$ равен $\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABC}=\frac{\sqrt{59}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{16\sqrt{3}}{4}=\frac{4\sqrt{59}}{3}$.

Приравнивая два найденных значения для объёма, получаем $Q=\frac{4\sqrt{59}}{5}$.

Ответ. $\frac{4\sqrt{59}}{5}$

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро $SA = 6$, а сторона основания $AB = 4$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро AB перпендикулярно ребру SC.



Решение.

В треугольнике BCS проведём высоту BK, тогда искомое сечение — треугольник ABK. Пусть Q — площадь треугольника ABK. Сечение из условия разбивает пирамиду на тетраэдры $CAKB$ и $SAKB$. Их суммарный объём $\frac{1}{3}\cdot Q\cdot SK+\frac{1}{3}\cdot Q\cdot CK=\frac{1}{3}\cdot Q\cdot SC=2Q$ равен объёму пирамиды.

Пусть — SO высота пирамиды. В треугольнике SCO имеем:

$$CO=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}, SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{36-\frac{16}{3}}=\frac{2\sqrt{69}}{\sqrt{3}}.$$

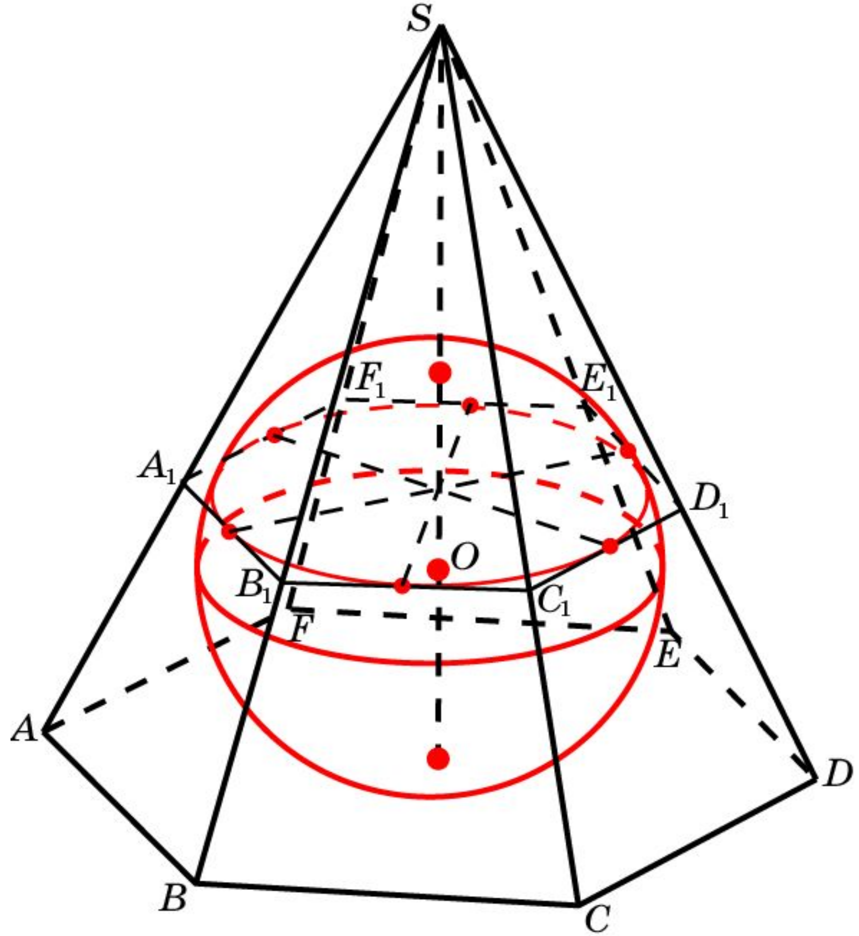
Объём пирамиды $SABC$ равен

$$\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{69}}{3}\cdot\frac{16\sqrt{3}}{4}=\frac{8\sqrt{23}}{3}.$$

Приравнивая два найденных значения для объёма, получаем $Q=\frac{4\sqrt{23}}{3}$.

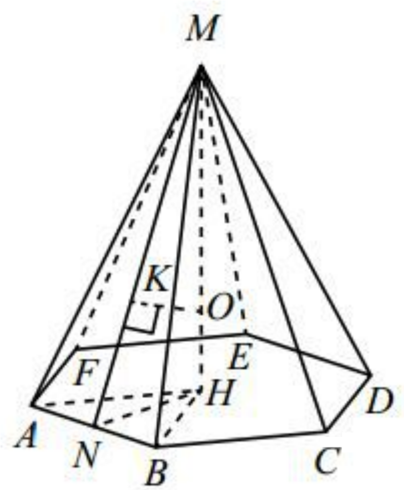
Ответ. $\frac{4\sqrt{23}}{3}$

Сфера, вписанная в правильную шестиугольную пирамиду



В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

Решение.



Пусть MH — высота правильной шестиугольной пирамиды $MABCDEF$ с вершиной M, тогда треугольник AMH прямоугольный, $MA = 10$, $MH = 6$, откуда $AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 8$.

Треугольник ABH равносторонний, следовательно, $AB = AH = 8$.

В треугольнике AMB высота $MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 2\sqrt{21}$.

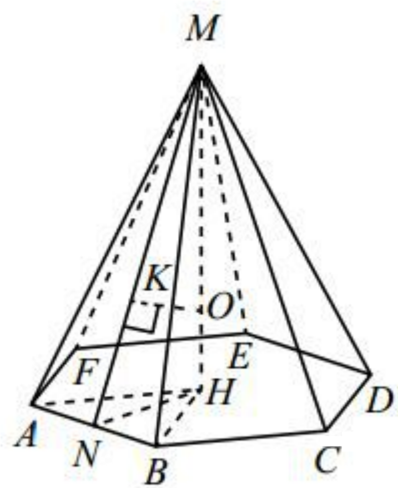
В правильном треугольнике AHB высота $NH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Центр O сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому $MO : OK = MH : HN \Leftrightarrow (6 - r) \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{21} \cdot r \Leftrightarrow r = 4\sqrt{7} - 8$, где r — радиус сферы. Площадь сферы $S = 4\pi r^2 = 64\left(11 - 4\sqrt{7}\right)\pi$.

Ответ.

$64\left(11 - 4\sqrt{7}\right)\pi$

В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно $\sqrt{5}$, а высота равна 1, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.



Решение.

Пусть MH — высота правильной шестиугольной пирамиды $MABCDEF$ с вершиной M, тогда треугольник AMH прямоугольный, $MA = \sqrt{5}, MH = 1$, откуда $AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 2$.

Треугольник ABH равносторонний, следовательно, $AB = AH = 2$.

В треугольнике AMB высота $MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 2$.

В правильном треугольнике AHB высота $HN = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

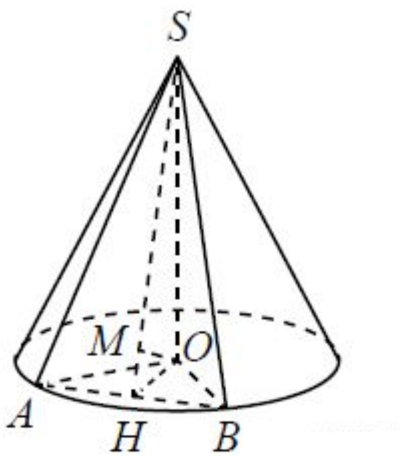
Центр O сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, лежит на её высоте МН, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому $MO: OK = MN: HN \Leftrightarrow (1 - r) \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot r \Leftrightarrow r = 2\sqrt{3} - 3$, где r — радиус сферы.

Площадь сферы $S = 4\pi r^2 = 12(7 - 4\sqrt{3})\pi$.

Ответ. $12(7 - 4\sqrt{3})\pi$

Радиус основания конуса равен 6, а его высота равна 8. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 4. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

Решение.



Сечение конуса плоскостью, содержащей его вершину S и хорду $AB = 4$, — треугольник ASB.

В равных прямоугольных треугольниках SOA и SOB, где O — центр основания конуса, $OA = OB = 6$, $SO = 8$, откуда

$SA = SB = \sqrt{OB^2 + SO^2} = 10.$

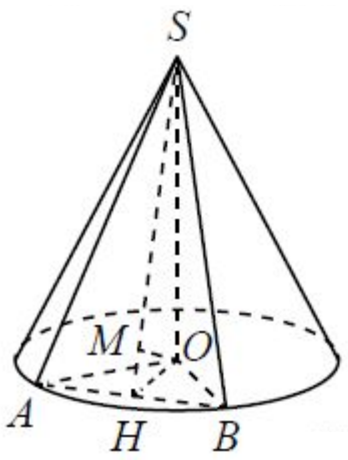
Пусть SH — высота и медиана равнобедренного треугольника ASB, $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 4\sqrt{6}$, Тогда отрезок OH — высота и медиана равнобедренного треугольника AOB, $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = 4\sqrt{2}$.

Прямые SH и OH перпендикулярны прямой AB, поэтому плоскость SOH перпендикулярна плоскости ASB. Следовательно, расстояние от точки O до плоскости ASB равно высоте OM прямоугольного треугольника SOH, проведённой к гипотенузе: $OM = \frac{OH \cdot SO}{SH} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Ответ. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

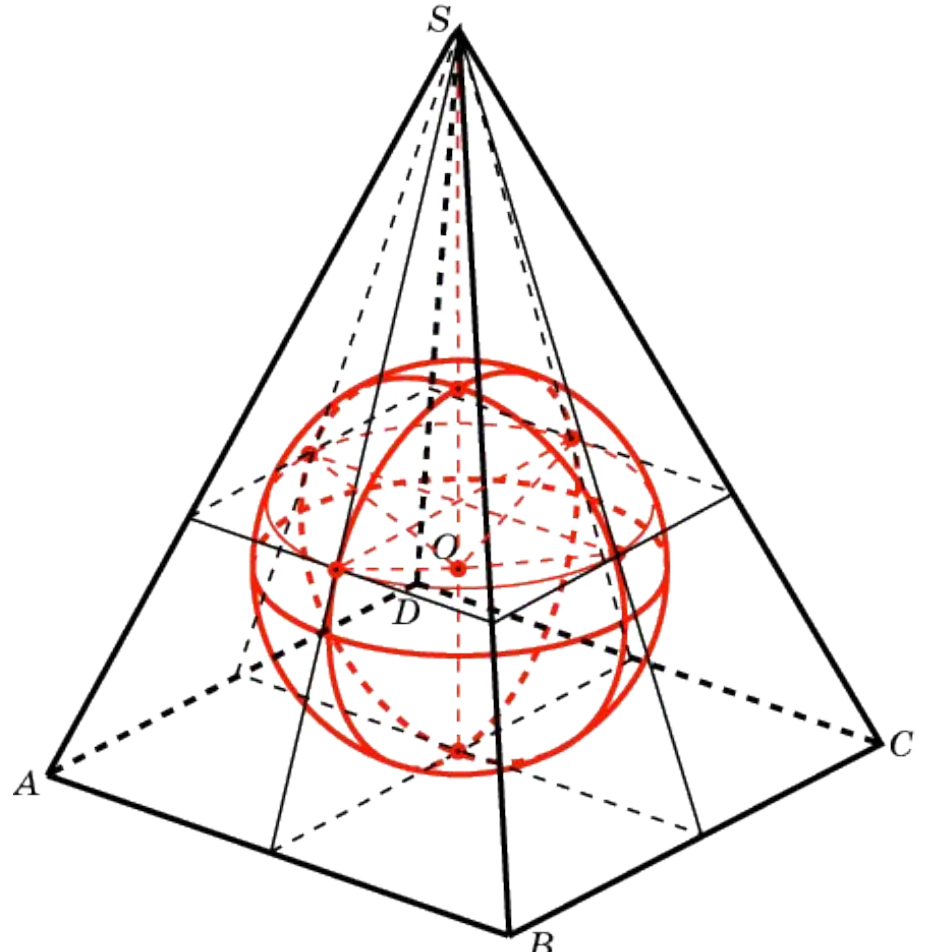
Решение.



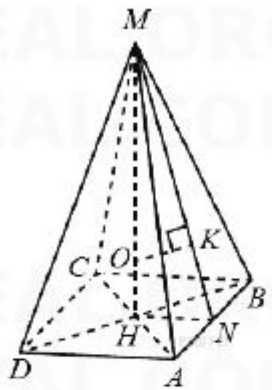
Сечение конуса плоскостью, содержащей его вершину S и хорду $AB = 6$ — треугольник ASB.
В равных прямоугольных треугольниках SOA и SOB, где O — центр основания конуса, $OA = OB = 5$, $SO = 12$, откуда
$SA = SB = \sqrt{OB^2 + SO^2} = 13$.
Пусть SH — высота и медиана равнобедренного треугольника ASB,
$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 4\sqrt{10}$. Тогда отрезок OH — высота и медиана равнобедренного треугольника AOB $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = 4$.
Прямые SH и OH перпендикулярны прямой AB, поэтому плоскость SOH перпендикулярна плоскости ASB. Следовательно, расстояние от точки O до плоскости ASB равно высоте OM прямоугольного треугольника SOH, проведенной к гипотенузе: $OM = \frac{OH \cdot SO}{SH} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$.

Ответ. $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

Сфера, вписанная в четырехугольную пирамиду



В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.



Решение.

Пусть MH — высота правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с вершиной M. тогда треугольник AMH прямоугольный.

$MA = 10$, $MH = 6$, откуда $AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 8$.

Треугольник ABH прямоугольный равнобедренный, следовательно, $AB = AH\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.В треугольнике AMB высота

$$MH = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 2\sqrt{17}.$$

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABH высота $NH = \frac{AB}{2} = 4\sqrt{2}$.

Центр O сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO:OK = MN:HN \Leftrightarrow (6 - r)\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{17}\cdot r \Leftrightarrow r = \frac{4\sqrt{34} - 16}{3},$$

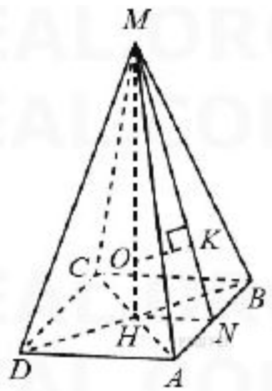
где r — радиус сферы.

Площадь сферы $S = 4\pi r^2 = \frac{128(25 - 4\sqrt{34})\pi}{9}$.

Ответ.

$$\frac{128(25 - 4\sqrt{34})\pi}{9}$$

В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 17, а высота равна 7, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.



Решение.

Пусть MH — высота правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с вершиной M тогда треугольник AMH — прямоугольный, $MA = 17, MH = 7,$ откуда $AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 4\sqrt{15}.$

Треугольник ABH — прямоугольный равнобедренный, следовательно, $AB = AH\sqrt{2} = 4\sqrt{30}.$ В треугольнике AMB высота

$$MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 13.$$

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABH высота $HN = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{30}.$

Центр O сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, лежит на её высоте MH точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO: OK = MN: HN \Leftrightarrow \frac{7-r}{r} = \frac{13}{2\sqrt{30}} \Leftrightarrow (7-r)\cdot 2\sqrt{30} = 13\cdot r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{26\sqrt{30}-120}{7},$$ где r — радиус сферы.

Площадь сферы $S = 4\pi r^2 = \frac{480(289-52\sqrt{30})\pi}{49}.$

Ответ.

$$\frac{480\left(289 - 52\sqrt{30}\right)\pi}{49}$$

В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 4, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Ответ.

В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 18, а боковые рёбра равны 15. Точка R принадлежит ребру MB, причём $MR : RB = 2 : 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки C и R параллельно прямой BD.

Ответ.

В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 12, а боковые рёбра равны 24. Точка G принадлежит ребру MA, причём $MG : GA = 2 : 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B и G параллельно прямой AC.

Ответ.

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 22, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 и делит его в отношении 6 : 5, считая от вершины B_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K.

Ответ.

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 10, а боковое ребро $AA_1 = 2$. Точка O принадлежит ребру A_1B_1 и делит его в отношении 4 : 1, считая от вершины A_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A, C и O.

Ответ.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 7$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении 3 : 4, считая от вершины B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_{1}.

Ответ.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 3$, $AA_1 = 8$. Точка R принадлежит ребру AA_1 и делит его в отношении 3 : 5, считая от вершины A. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B, R и D_1.

Ответ.

Спасибо за внимание!