МНОЖЕСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ

В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ, СЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО ЕСТЬ БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО, ЭЛЕМЕНТЫ КОТОРОГО МОЖНО ПРОНУМЕРОВАТЬ НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ.

ДРУГИМИ СЛОВАМИ, СЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО – ЭТО МНОЖЕСТВО, РАВНОМОЩНОЕ МНОЖЕСТВУ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ.

ПРИМЕР СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВ: ПРОСТЫЕ ЧИСЛА, НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА, МНОЖЕСТВО ВСЕХ СЛОВ НАД КОНЕЧНЫМ АЛФАВИТОМ, ЛЮБОЕ БЕСКОНЕЧНОЕ СЕМЕЙСТВО НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОТКРЫТЫХ ИНТЕРВАЛОВ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

СВОЙСТВА СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА

- ЛЮБОЕ ПОДМНОЖЕСТВО СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА НЕ БОЛЕЕ, ЧЕМ СЧЁТНО (КОНЕЧНО ИЛИ СЧЁТНО)
- ОБЪЕДИНЕНИЕ КОНЕЧНОГО ИЛИ СЧЕТНОГО ЧИСЛА СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВ СЧЕТНО
- ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВ СЧЕТНО
- МНОЖЕСТВО ВСЕХ КОНЕЧНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА СЧЕТНО
- МНОЖЕСТВО ВСЕХ ПОДМНОЖЕСТВ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА КОНТИНУАЛЬНО И НЕ ЯВЛЯЕТСЯ СЧЕТНЫМ

ОДНОЙ ИЗ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ ЯВЛЯЕТСЯ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТОВ МНОЖЕСТВА И ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА О СРАВНЕНИИ ДРУГ С ДРУГОМ ДВУХ МНОЖЕСТВ ПО КОЛИЧЕСТВУ ЭЛЕМЕНТОВ.

ДЛЯ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ САМОЙ РАЗНОЙ ПРИРОДЫ ЭТА ЗАДАЧА ЛЕГКО РЕШАЕТСЯ НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ ПОДСЧЕТОМ. ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ ВОПРОС О СРАВНЕНИИ НЕВОЗМОЖНО РЕШИТЬ КАК ДЛЯ КОНЕЧНЫХ, С ПОМОЩЬЮ ПОДСЧЕТА. ПОЭТОМУ КАНТОР ПРЕДЛОЖИЛ ДЛЯ СРАВНЕНИЯ ДВУХ БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ УСТАНОВИТЬ МЕЖДУ НИМИ ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОЕ (БИЕКТИВНОЕ) ОТОБРАЖЕНИЕ.

МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА ЯВЛЯЕТСЯ ОБОБЩЕНИЕМ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТОВ МНОЖЕСТВА. ЕСЛИ ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ МНОЖЕСТВ УСТАНОВЛЕНО, ЗНАЧИТ, ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ, В ОБОИХ МНОЖЕСТВАХ ОДИНАКОВОЕ ЧИСЛО ЭЛЕМЕНТОВ ИЛИ МОЩНОСТЬ ОДНОГО МНОЖЕСТВА РАВНА МОЩНОСТИ ДРУГОГО МНОЖЕСТВА.

МОЩНОСТЬ - ЭТО ТО ОБЩЕЕ, ЧТО ЕСТЬ У ДВУХ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ МНОЖЕСТВ. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА A ОБОЗНАЧАЕТСЯ $m(A)$ ИЛИ $|A|$.

- ДО КАНТОРА МАТЕМАТИКИ ПРИЗНАВАЛИ И ИСПОЛЬЗОВАЛИ ТАК НАЗЫВАЕМУЮ ПОТЕНЦИАЛЬНУЮ БЕСКОНЕЧНОСТЬ. НО ОН ПОЗВОЛИЛ СЕБЕ В МАТЕМАТИКЕ АКТУАЛЬНУЮ БЕСКОНЕЧНОСТЬ.

КАНТОР ДОКАЗАЛ ТЕОРЕМУ, ИЗ КОТОРОЙ СЛЕДУЕТ, ЧТО БЕСКОНЕЧНОСТИ МОГУТ БЫТЬ РАЗНЫЕ ПО ВЕЛИЧИНЕ. ПОСКОЛЬКУ «ЧИСЛО» И «КОЛИЧЕСТВО» – ТЕРМИНЫ В ЭТОМ СЛУЧАЕ НЕУМЕСТНЫЕ, ТО ОН ВВЁЛ ПОНЯТИЕ «МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА». МНОЖЕСТВА РАВНОМОЩНЫ, ЕСЛИ МЕЖДУ ИХ ЭЛЕМЕНТАМИ МОЖНО УСТАНОВИТЬ ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ.

КАНТОР УСТАНОВИЛ, ЧТО МОЩНОСТЬ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА БОЛЬШЕ МОЩНОСТИ ЛЮБОГО КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА. ВО-ВТОРЫХ, ДОКАЗАЛ, ЧТО МНОГИЕ БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА ИМЕЮТ ТУ ЖЕ МОЩНОСТЬ (ТО ЖЕ «КОЛИЧЕСТВО» ЭЛЕМЕНТОВ), ЧТО И СЧЁТНОЕ.

- ОДИН ИЗ САМЫХ ПОРАЗИТЕЛЬНЫХ ПРИМЕРОВ, ЧТО МНОЖЕСТВО ЦЕЛЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ИМЕЕТ СТОЛЬКО ЖЕ ЭЛЕМЕНТОВ, СКОЛЬКО И МНОЖЕСТВО ЦЕЛЫХ ЧЁТНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, Т.Е. ОНИ РАВНОМОЩНЫ.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНО, ЗАПИШЕМ ДРУГ ПОД ДРУГОМ:

1 2 3 4 …

2 4 6 8 …

ИЗ ЭТОЙ ЗАПИСИ ВИДНО, ЧТО ОБЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМЕЮТ ОДИНАКОВОЕ КОЛИЧЕСТВО ЭЛЕМЕНТОВ, ПОСКОЛЬКУ ЛЮБОМУ ЧИСЛУ ПЕРВОЙ, ВСЕГДА СООТВЕТСТВУЕТ СТРОГО ОДНО ЧИСЛО ВТОРОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТАК ЧТО ВТОРАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕ МОЖЕТ ИСЧЕРПАТЬСЯ РАНЬШЕ ПЕРВОЙ, И НАОБОРОТ. СЛЕДОВАТЕЛЬНО, ЭТИ МНОЖЕСТВА РАВНОМОЩНЫ, И ЗДЕСЬ ЧАСТЬ РАВНА ЦЕЛОМУ. МЫ ПОЛУЧИЛИ ОДИН ИЗ ПАРАДОКСОВ.

- ЕСЛИ ПОСТРОИТЬ МНОЖЕСТВО ВСЕХ ПОДМНОЖЕСТВ КОНКРЕТНОГО МНОЖЕСТВА, ТО ВСЕГДА ПОЛУЧИМ МНОЖЕСТВО БОЛЬШЕ ИСХОДНОГО. КАНТОР ДОКАЗАЛ, ЧТО ЕСЛИ ВЗЯТЬ БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО СЧЁТНОЙ МОЩНОСТИ, НАПРИМЕР, МНОЖЕСТВО ЦЕЛЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, И УМОЗРИТЕЛЬНО ПОСТРОИТЬ МНОЖЕСТВО, СОДЕРЖАЩЕЕ В КАЧЕСТВЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВСЕ ПОДМНОЖЕСТВА ЭТОГО МНОЖЕСТВА, ТО ПОЛУЧИМ МОЩНОСТЬ БОЛЬШУЮ, ЧЕМ СЧЁТНАЯ МОЩНОСТЬ. В ПРИНЦИПЕ НЕ СУЩЕСТВУЕТ СПОСОБА ПЕРЕСЧИТАТЬ (ПУСТЬ В БЕСКОНЕЧНОСТИ) ТАКОЕ МНОЖЕСТВО. В НЁМ ВСЕГДА БОЛЬШЕ ЭЛЕМЕНТОВ. ЭТА НОВАЯ БОЛЬШАЯ МОЩНОСТЬ НАЗЫВАЕТСЯ МОЩНОСТЬЮ КОНТИНУУМА.

КОНТИ́НУУМ В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ — МОЩНОСТЬ (ИЛИ КАРДИНАЛЬНОЕ ЧИСЛО) МНОЖЕСТВА ВСЕХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ.

МНОЖЕСТВО, ИМЕЮЩЕЕ МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМ, НАЗЫВАЕТСЯ КОНТИНУА́ЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ.