QEYRI STASIONAR QAZ DINAMIKASI TƏNLIYININ RIYAZI MODELININ QURULMASI

Kafedra müdiri: Prof:

Diplom rəhbəri: Dos: Qasımov Q.Q.

Tələbə: Məmmədzadə Sənan

Məsələnin riyazi qoyuluşu

İşdə qeyri stasionar qaz dinamikası məsələsini sadə hallarda konservativ fərq sxemi vasitəsilə aproksimasiyasına və alınmış qeyri xətti tənliklər sisteminin Nyuton üsulu ilə həllinə baxılır. Qazın müstəvi axınına birölçülü qeyri stasionar halda baxıldığını qəbul edəcəyik.

Tutaq ki, -sürət, sıxlıq, temperatur, təzyiq, qazın daxili enerjisidir. Qazın hərəkət tənliyini – qaz dinamikası tənliyini yazaq. Qaz dinamikası sistem tənliyi dəyişənlərində belə yazılır:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial s} \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v \qquad (1.2)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial x}{\partial s} \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial s}(pv) - \frac{\partial \omega}{\partial s} \qquad (1.4)$$

$$p = p(\rho, t) \qquad (1.5)$$

BURADA ε – ISTILIK SELIDIR. (1.2) Və (1.3)- TƏNLIKLƏRINDƏN ALıNıR KI,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{\partial v}{\partial s}. \qquad (1.6)$$

Bu tənliklər sisteminin qapalı olması üçün istilik seli üçün əlavə tənlik yazılmalıdır, belə ki,

$$\omega=-\chi(\rho,T)\rho\frac{\partial T}{\partial s} \qquad (1.7)$$

Burada $\chi(\rho,T)-$ istilikkeçirmə əmsalıdır. Əgər ideal qaz halına baxsaq, bu zaman hal tənlikləri belə yazılır:

$$p=R\rho\mathrm{T}$$

$$\varepsilon=\frac{p}{(\gamma-1)\rho} \qquad (1.8)$$

Bu məsələdə izotermik hala baxacağıq.Bu zaman $T=const$ olduqda enerji tənliyini yox etmək olar, çünki onun rolunu $T=const$ tənliyi yerinə yetirir. Qeyd edək ki, $T=const$ şərti daxilində təzyiq sıxlığın funksiyası rolunu oynayır

$$p=E(\rho) \qquad (1.1),\ (1.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial s} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{\partial v}{\partial s} \qquad (1.9)$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\partial x}{\partial s}\ p=E(\rho) \qquad (1.10)$$

Bura (1.8) tənliyini əlavə etsək

$$\varepsilon=\frac{p}{(\gamma-1)\rho} \qquad (1.11)$$

alarıq .

Beləliklə, 4 dəyişəndən $-v,p,\rho,s$ asılı dörd tənliklər sistemi alırıq. Biz ρ sıxlığı əvəzinə xüsusi həcmdən istifadə edəcəyik $\eta=1/\rho$ Bu zaman alarıq ki,

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial s}, \qquad (1.12)$$

$$p\eta=(\gamma-1)\varepsilon. \qquad (1.13)$$

Tam enerji üçün (1.10) tənliyini aşağıdakı tənliklərdən biri ilə əvəzləmək olar

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-p\frac{\partial v}{\partial s}, \qquad (1.14)$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-p\frac{\partial\eta}{\partial t}. \qquad (1.15)$$

(1.9), (1.10) tənliklərinə bütün axtarılan funksiyalar üçün başlanğıc və sərhəd şərtləri mənimsədilir. Bizim məqsədimiz (1.9), (1.10) diferensial tənliklərinə Nyutonun iterasiya üsulunu tətbiq etmək və alınmış fərq tənliklər sistemini qovma üsulu ilə ədədi həllidir.

Həqiqətən də, (1.9)– un birinci tənliyini və (1.12) – ni nəzərə alsaq , alarıq

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon+\frac{\upsilon^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial s}(p\upsilon)=\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\left(\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial p}{\partial s}\right)+p\frac{\partial\upsilon}{\partial s}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+p\frac{\partial\upsilon}{\partial s}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+p\frac{\partial\eta}{\partial t}$$

İzotermik axın;

Bu zaman qazın temperaturu T= const və buna görə də enerji tənliyi buraxılır.

İzotermik axın üçün qaz dinamikası sistem tənliyi ideal qaz üçün aşağıdakı şəklə düşür

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial s} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{\partial\upsilon}{\partial s} \qquad p=c^2\rho \tag{1.16}$$

burada c= const > 0 –səsin sürətidir, və yaxud da

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial s} \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\upsilon}{\partial s} \qquad p\eta=c^2 \tag{1.17}$$

Bu işdə ideal qazın dinamikası tənliyinə izotermik halda baxacağıq. (1.9) , (1.10) tənliklərinə bütün axtarılan funksiyalar üçün başlanğıc şərtləri mənimsədilir, yəni

$\upsilon(x, 0)$, $\rho(x, 0)$, $p(x, 0)$ (1.18)

və sərhəd şərtləri, məsələn

$p(0,t) = p_0(t)$ – s=0 üçün, $p(M,t) = p_1(t)$ – s=M üçün (1.19)

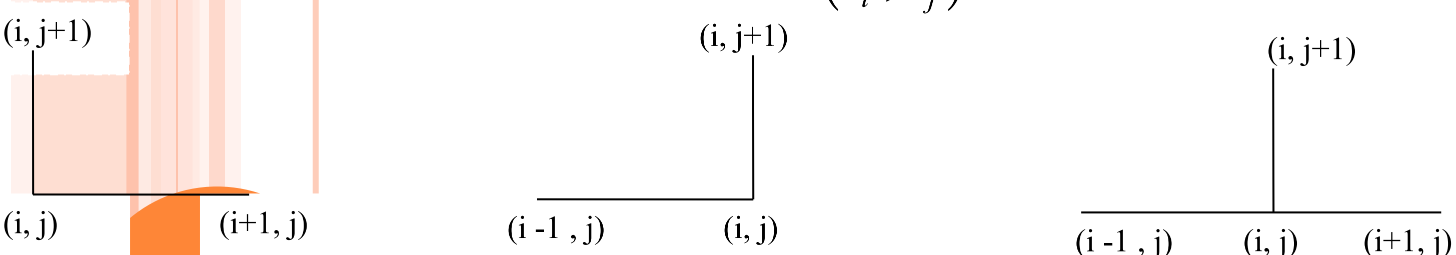
və ya

$\upsilon(0,t) = \upsilon_0(t)$ – s=0 üçün, $p(M,t) = p_1(t)$ – s=M üçün (1.20)

Diferensial tənliklərin fərqlər approksimasiyası: Diferensial tənliklərin aproksimasiyasının mümkün yollarına qaz dinamikası tənliklərindən biri üçün – hərəkət tənliyi üçün baxaq:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial s} = 0 \qquad (2.1)$$

Sürət υ və təzyiqin p kəsilməz arqument funksiyasını ω şəbəkəsində şəbəkə funksiyası ilə əvəz edək və onlar üçün υ və p işarələrini saxlayaq. Hələlik fərz edəcəyik ki, bu şəbəkə funksiyaları $\left(s_i, t_j\right)$ – düyün nöqtələrində hesablanılır.



şəkil 2.1

Yuxarıda daxil edilmiş (2.1) tənliyini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\upsilon_t + p_s = 0 \qquad (2.2)$$

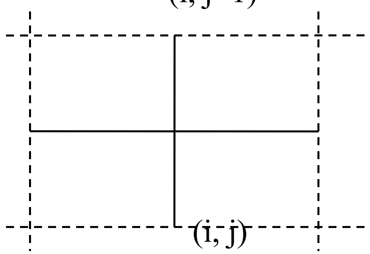
$$\upsilon_t + p_{\bar{s}} = 0 \qquad (2.3)$$

Bu yazılarda iştirak edən düyün nöqtələri dəsti şablon adlanır (şəkil 2.1). (2.1) tənliyinin (2.2), (2.3) vasitəsilə aproksimasiyasının xətası $\left(s_i, t_j\right)$ düyün nöqtələrində zaman və fəza üzrə birinci tərtib $O(\tau + h)$ dəqiqliyə malikdir.

Mərkəzi fərqlə fəza üzrə bu tənliyin dörd nöqtəli şablonda aproksimasiyası 2-ci tərtib dəqiqliyə $O(\tau + h^2)$ malikdir.

$$\upsilon_t + p_{s^0} = 0 \qquad (2.4)$$

Amma göstərmək olar ki, belə nöqtələr vasitəsilə aproksimasiya dayanıqsız sxemlərə gəlir. (2.1) tənliyinin aproksimasiyasına daha bir yanaşma mövcuddur. Təzyiq şəbəkə funksiyasına yarıtam zaman, layında yarıtam nöqtədə $\left(s_{i+1/2}, t_{j+1/2}\right)$ sürət funksiyasına isə tam $\left(s_i, t_j\right)$ nöqtələrinə nəzərən baxaq.



Bu zaman fərqlər tənliyi şəkil 2.2 – dəki şablonda, indeksli formada aşağıdakı şəkildə olar:

$$\frac{\upsilon_i^{j+1} - \upsilon_i^j}{\tau} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \qquad (2.5)$$

Burada təzyiqin fərq törəməsi $\left(s_i, t_{j+1/2}\right)$ nöqtəsinə nəzərən simmetrikdir və 2 – ci tərtib aproksimasiyaya $O(h^2)$ malikdir.

Sürətin fərq törəməsi də həmçinin zaman üzrə $\left(s_i, t_{j+1/2}\right)$ nöqtəsində 2-ci tərtib $O(\tau^2)$ aproksimasiyaya malikdir. Bu o deməkdir ki, (2.5) tənliyi (2.1) diferensial tənliyini bu nöqtədə $\psi = O(\tau^2 + h^2)$ tərtib dəqiqliyi ilə aproksimasiya edir. (2.4) sxemindən fərqli olaraq, (2.5) – münasibətində təzyiqin törəməsi qonşu yarıtam nöqtələr üzrə təyin edilir ki, bu da dayanıqsız sxemlərdən qaçmağa imkan verir. Belə şəbəkə şahmat formalı şəbəkə adlanır. Fərqlər sxeminin yazılışını sadələşdirmək üçün belə bir işarələmə daxil edək:

$$y_{i+1/2}^{j+1/2} = \overline{y}_i^j$$

Bu zaman (2.5) münasibəti indekssiz şəkildə aşağıdakı kimi yazılar

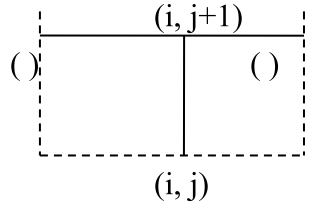
$$\upsilon_t + \overline{p}_s = 0 \qquad (2.6)$$

Əvvəllər (2.1) – də biz j – cu və ya $j + 1/2$ – ci zaman layından istifadə edirdik. Bu formada qurulan sxemlər aşkar sxemlər adlanır. Belə tənliyə yalnız bir naməlum (j+1) – ci zaman layındakı qiymət $\upsilon_i^{j+1} = \hat{\upsilon}$ -daxildir

Əgər şəbəkə funksiyalarının j – cu zaman layında qiymətləri - υ_i^j, $\overline{p}_i^j$ məlumdursa, onda $\hat{\upsilon}$ qiyməti aşkar şəkildə ifadə olunur, məsələn, (2.6) – dan alınır ki, $\hat{\upsilon} = \upsilon - \tau\, \overline{p}_{\bar{s}}$ Təbii ki, fərqlər tənliyi üçün yuxarı zaman layından istifadə etmək olar.

Bu zaman yarıtam nöqtələr şablonunda (şəkil 2.3), analoji olaraq alarıq ki,

$$\upsilon_t + \hat{\bar{p}}_{\bar{s}} = 0 \qquad (2.7)$$



Burada $\hat{p}$ yazılışı bu kəmiyyətin (j+1) – ci layda hesablanılmasını göstərir, yəni

$$\hat{\bar{p}} = \bar{p}_i^{\,j+1} = p_{i+\frac{1}{2}}^{\,j+\frac{3}{2}}$$

(i, j+1) nöqtəsində (2.1) tənliyinin (2.7) vasitəsilə aproksimasiyasının xətası $\psi = O(\tau + h^2)$ - ə bərabərdir. (2.7) fərq tənliyi qeyri aşkar sxem adlanır. Beləki, burada yuxarı layda bir neçə müxtəlif naməlum kəmiyyətlər iştirak edir və bunlar üçün aşkar forma, yəni j – ci lay vasitəsilə ifadə etmə alınmır. Qeyri aşkar fərqlər tənliyinin həlli isə əlavə məsələ meydana çıxarır. Növbəti sxemlərdə yazılışın ixtisarı üçün belə bir işarələmədən istifadə edəcəyik,

$y^{(\sigma)} = \sigma\,\hat{y} + (1-\sigma)\,y$ burada, σ – çəki vuruğu adlanır. Bunun köməyilə

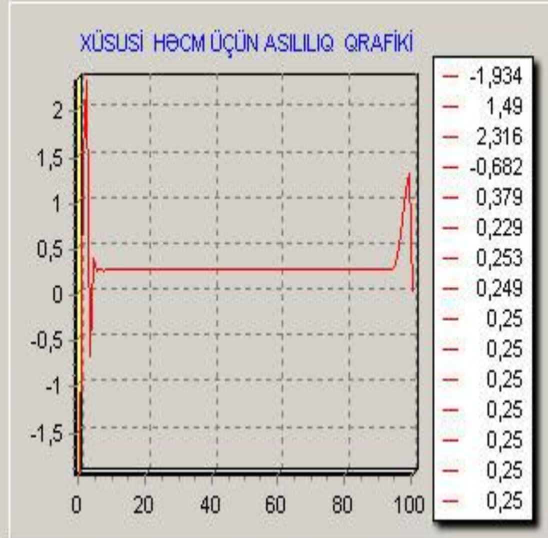
$$\upsilon_t + \sigma\,\hat{\bar{p}}_{\bar{s}} + (1-\sigma)\,\bar{p}_{\bar{s}} \qquad (2.8)$$

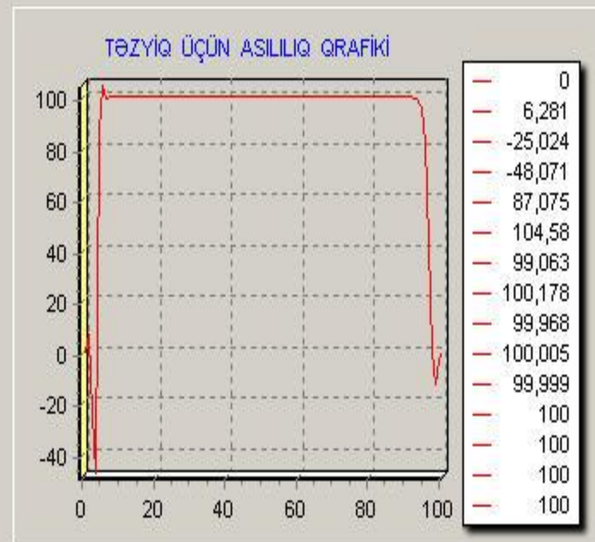
münasibətini belə yazmaq olar

$$\upsilon_t + \bar{p}_{\bar{s}}^{(\sigma)} = 0 \qquad (2.9)$$

σ=0.5 xüsusi qiyməti üçün (2.9) münasibəti $\left(s_i, t_{j+1/2}\right)$ nöqtəsinə nəzərən $O(\tau^2 + h^2)$ aproksimasiya tərtibinə, qalan hallarda isə $\psi = O(\tau + h^2)$ – na bərabərdir.

QAZ DİNAMİKASININ FƏRQ SXEMİ VASİTƏSİLƏ ƏDƏDİ HƏLLİ





1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1,000314429	1,002399424	1,018310115	1,139725290	2,066249796	9
1,016135179	1,100480289	1,586737767	3,862668151	8,532173299	9

0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
0,250000000	0,249999999	0,250000000	0,249999999	0,2500000
0,249999995	0,250000000	0,249999999	0,250000000	0,2499999

100	100	100	100	100	100
99,99993786	99,99952582	99,99638152	99,97238727	99,78928612	98,
99,99562213	99,97102950	99,81282201	98,83201336	93,14773683	65,
99,86702908	99,25466246	96,08382375	82,02283573	42,26961036	-0,5

S koordinatı üzrə parçanın uzunluğu= 10

BÖLGÜ NÖQTƏLƏRİNİN SAYI= 100

tau= 0,01

İLKİN VƏZİYYƏTƏ QAYIT

HESABLAMA