

Преобразования графиков функций

Цель презентации: дать теоретическое обоснование и практический прием выполнения основных преобразований графиков функций

Пусть $y=f(x)$ - заданная функция. График этой функции может быть подвергнут преобразованиям:

2 $y = f(x)+a$

2 $y = f(x+a)$

2 $y = -y = -f(x)$

2 $y = f(-x)$

2 $y = |f(x)|$

2 $y = f(|x|)$

2 $y = af(x)$

2 $y = f(ax)$

2 комбинации преобразований

Примечание: После рассмотрения каждого из выделенных видов преобразований Вы можете вернуться на этой слайд, воспользовавшись гиперссылкой «Возврат».

Преобразование $y=f(x)+a$

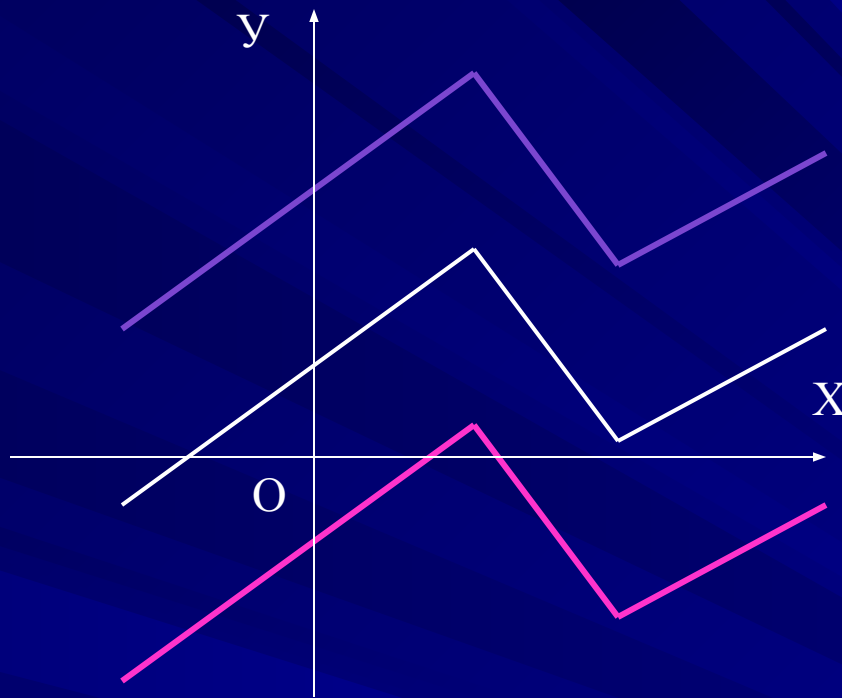
Заметим, что в уравнении функции $y = f(x)+a$ «а»- слагаемое при $f(x)$.

Значит: при одном значении аргумента значение функции $y = f(x)+a$ отличается от значения функции $y = f(x)$ на «а», то есть:

Если $a > 0$, то значение функции $y = f(x)+a$ больше значения функции $y = f(x)$ на «а».

Если $a < 0$, то значение функции $y = f(x)+a$ меньше значения функции $y = f(x)$ на « $|a|$ ».

Взаимное расположение графиков в выделенных случаях проиллюстрировано на [Рис.1.](#)



$$y = f(x) + a \quad (a > 0)$$

$$y = f(x)$$

$$y = f(x) + a \quad (a < 0)$$

Практический прием построения графика функции $y = f(x) + a$ преобразованием графика функции $y = f(x)$:

Чтобы построить график функции $y = f(x) + a$, можно график функции $y = f(x)$ подвергнуть параллельному переносу на $|a|$ единиц

- вверх, если $a > 0$,
- вниз, если $a < 0$.



Элементы самоконтроля (правильности построения графика):

Аналитическим путем

- найти область определения функции и сопоставить с соответствующим свойством графика;
- найти множество значений функции и сопоставить с соответствующим свойством графика;
- найти корни функции и сравнить их с абсциссами (абсциссой) точек пересечения графика с осью абсцисс;
- найти ординату точки пересечения графика функции с осью ординат и сравнить с соответствующей характеристикой точки графика

Замечание:

- если график основной функции $y = f(x)$ имеет асимптоты, то и результирующий график, полученный в результате преобразования (композиции преобразований) также имеет асимптоты.

Преобразование $y=f(x+a)$

1. Сравнивая уравнения функций $y = f(x)$ и $y = f(x+a)$, заметим, что «а» - слагаемое при аргументе.
2. Чтобы установить взаимное расположение графиков выделенных функций, выясним взаимосвязь аргументов этих функций при равных значениях функций.
3. Пусть (x_0, y_0) – координаты точки графика $y=f(x)$, а (x_1, y_0) – координаты соответствующей точки графика функции $y=f(x+a)$.
То есть верны равенства: $y_0 = f(x_0)$, $y_0 = f(x_1 + a)$.

Отсюда верно равенство: $x_0 = x_1 + a$

или $x_1 = x_0 - a$

Последнее равенство говорит о том, что:

если $a > 0$, то $x_1 < x_0$ на « $|a|$ »,

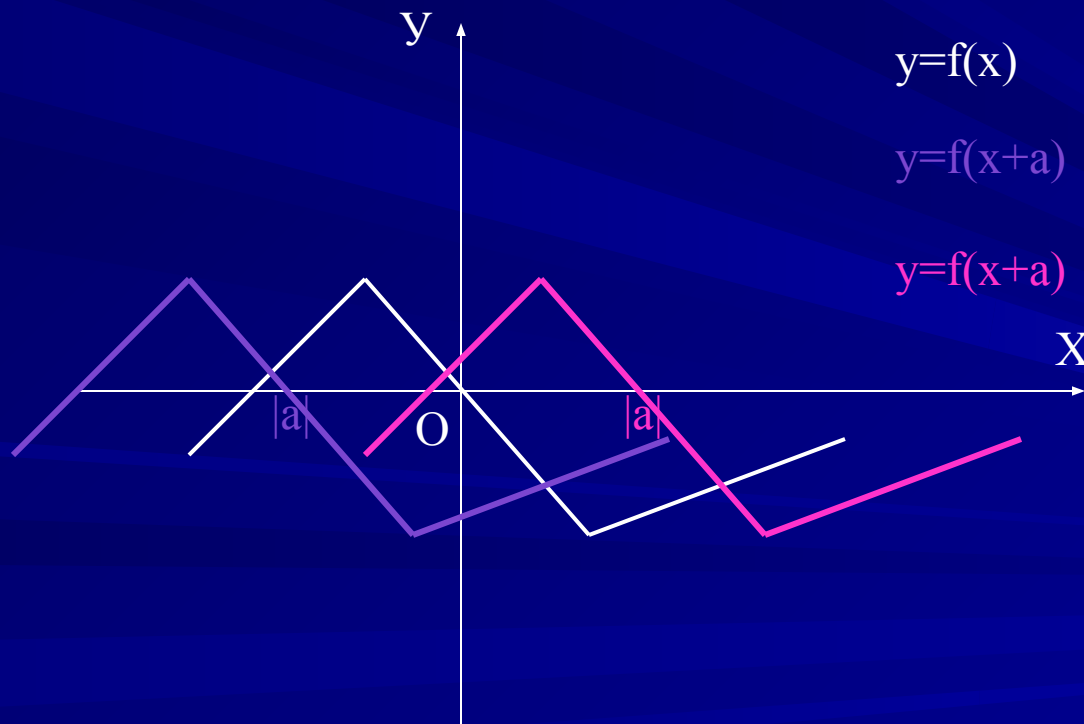
если $a < 0$, то $x_1 > x_0$ на « $|a|$ ».



Полученные выводы дают обоснование взаимному расположению графиков функций $y=f(x)$ и $y=f(x+a)$:

если $a > 0$, то для получения графика функции $y=f(x+a)$ можно график функции $y=f(x)$ «сдвинуть» на « $|a|$ » влево;

если $a < 0$, то для получения графика функции $y=f(x+a)$ можно график функции $y=f(x)$ «сдвинуть» на « $|a|$ » вправо (движение вдоль оси абсцисс).



Преобразование $y = -f(x)$

Уравнение функции $y = -f(x)$ можно привести к виду $y = (-1)f(x)$.

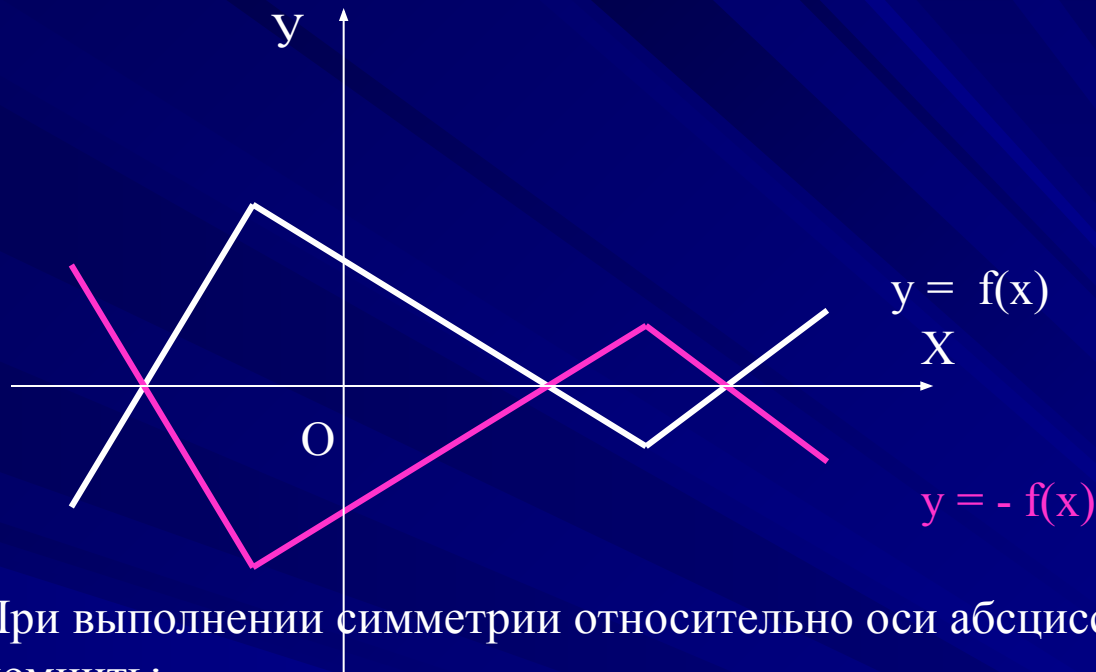
Не трудно заметить, что при одном значении аргумента значение функции $y = -f(x)$ противоположно значению функции $y = f(x)$.

Это означает, что если точка с координатами (x_0, y_0) – точка графика $y = f(x)$, то точка с координатами $(x_0, -y_0)$ – точка графика $y = -f(x)$.

По свойству взаимного расположения точек координатной плоскости: точки с равными абсциссами и противоположными ординатами симметричны относительно оси абсцисс.

Вывод: График функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$, выполнив преобразование «осевая симметрия относительно оси абсцисс».

Взаимное расположение графиков продемонстрировано на [Рис.3](#)



При выполнении симметрии относительно оси абсцисс целесообразно помнить:

- 2 отрезки переходят в равные отрезки, прямые – в прямые, кривые – в равные им кривые;
- 2 характеристические точки основного графика переходят в симметричные им точки относительно оси абсцисс;
- 2 точки пересечения основного графика с осью абсцисс отображаются на себя (остаются на месте)
- 2 если мысленно перегнуть плоскость по оси абсцисс, графики функций «наложатся» друг на друга



Преобразование $y=f(-x)$

1. Чтобы установить взаимное расположение графиков выделенных функций, выясним взаимосвязь аргументов этих функций при равных значениях функций.

2. Сравнивая уравнения функций $y = f(-x)$ и $y = f(x)$, заметим, что аргументы противоположны.

3. Пусть (x_0, y_0) – координаты точки графика $y=f(x)$, а (x_1, y_0) – координаты соответствующей точки графика функции $y=f(-x)$.

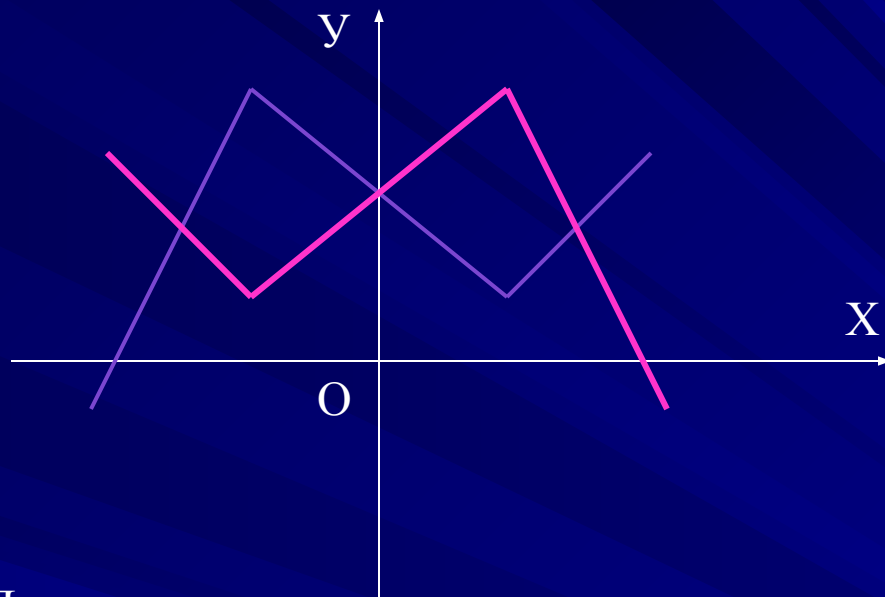
То есть верны равенства: $y_0=f(x_0)$, $y_0=f(x_1)$. Отсюда верно равенство: $x_0 = -x_1$ или $x_1 = -x_0$

Вывод: Если аргументы функций противоположны, то значения функций равны.

4. Геометрической интерпретацией полученного вывода является утверждение: если точка с координатами (x_0, y_0) – точка графика $y=f(x)$, то точка с координатами $(-x_0, y_0)$ – точка графика $y=f(-x)$.
5. По свойству взаимного расположения точек координатной плоскости: точки с противоположными абсциссами и равными ординатами симметричны относительно оси ординат.

Вывод: График функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$, выполнив преобразование «осевая симметрия относительно оси ординат».

Взаимное расположение графиков продемонстрировано на [Рис.4](#)



$$y=f(x)$$

$$y=f(-x)$$

При выполнении симметрии относительно оси ординат целесообразно помнить:

- 2 отрезки переходят в равные отрезки, прямые – в прямые, кривые – в равные им кривые;
- 2 характеристические точки основного графика переходят в симметричные им точки относительно оси ординат;
- 2 точка пересечения основного графика с осью ординат отображается на себя (остается на месте)
- 2 если мысленно перегнуть плоскость по оси ординат, графики функций «наложатся» друг на друга



Преобразование $y=|f(x)|$

Уравнение функции $y=|f(x)|$ можно записать в виде:

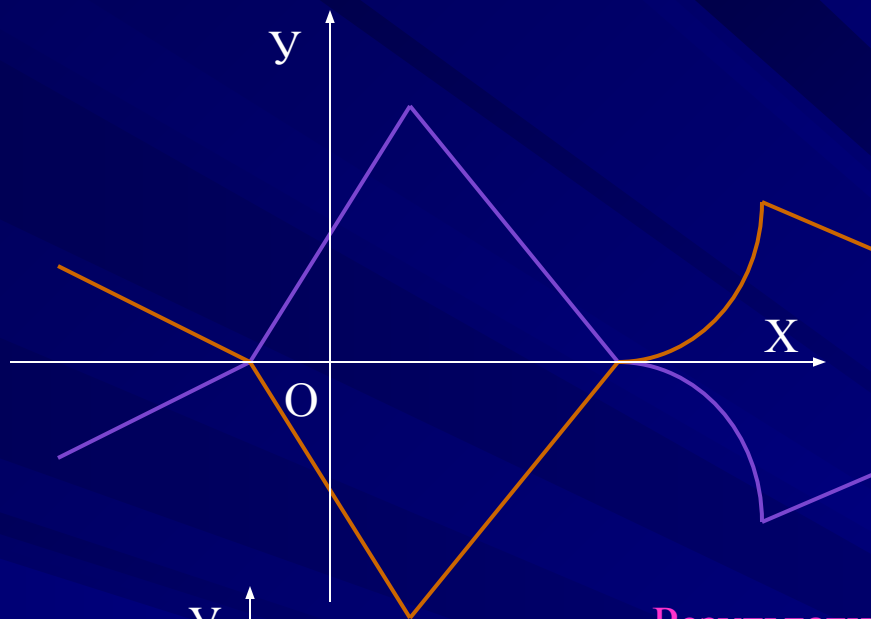
$$y = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}$$

Значит, для построения графика функции $y=|f(x)|$, можно в одной системе координат построить графики функций $y=f(x)$ (основной график) и $y=-f(x)$ (симметрия основного графика относительно оси абсцисс).

Графиком функции $y=|f(x)|$ будет объединение множеств точек:

- графика функции $y=f(x)$ на том множестве области определения, на котором $f(x) \geq 0$,
- графика функции $y=-f(x)$ на том множестве области определения, на котором $f(x) < 0$.

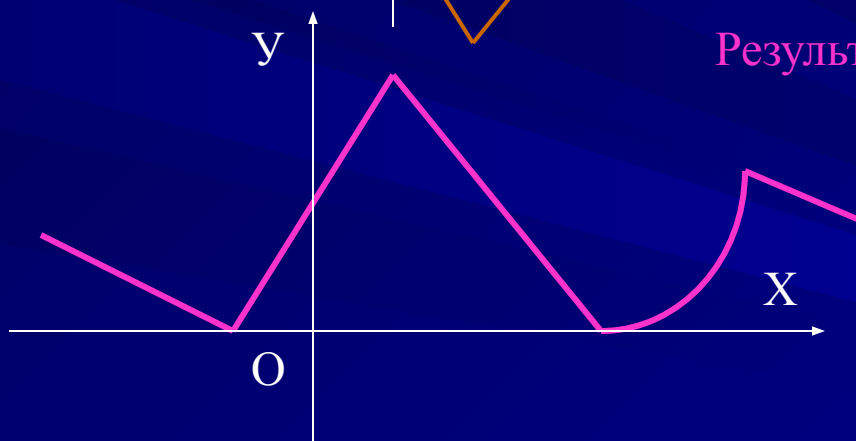
Этапы построения графиков выделены на [Рис.5-6.](#)



$$y=f(x)$$

$$y=-f(x)$$

Результатирующий график $y=|f(x)|$



Практический прием: Для построения графика функции $y=|f(x)|$ преобразованием графика $y=f(x)$ можно:

- множество точек графика $y=f(x)$, расположенных в верхней полуплоскости, оставить на месте,
- множество точек графика $y=f(x)$, расположенных в нижней полуплоскости, отобразить в верхнюю полуплоскость преобразованием «осевая симметрия» относительно оси абсцисс.



Преобразование $y=f(|x|)$

Уравнение функции $y=f(|x|)$ можно записать в виде:

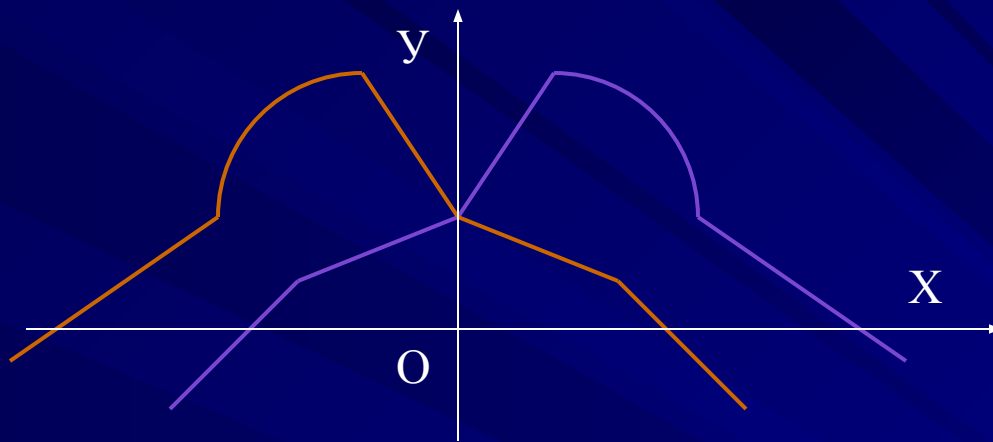
$$y = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq 0 \\ f(-x), & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Значит, для построения графика функции $y=f(|x|)$ можно в одной системе координат построить графики функций $y=f(x)$ (основной график) и $y=f(-x)$ (симметрия основного графика относительно оси ординат).

Графиком функции $y=f(|x|)$ будет объединение множеств точек:

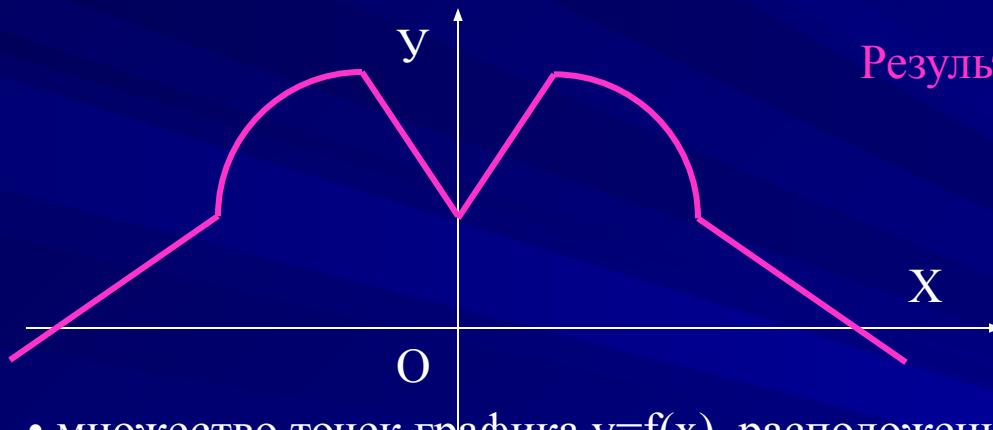
- графика функции $y=f(x)$ на том множестве области определения, на котором $x \geq 0$,
- графика функции $y=f(-x)$ на том множестве области определения, на котором $x < 0$.

Этапы построения графиков выделены на [Рис.7-8.](#)



$$y=f(x)$$

$$y=f(-x)$$



Результатирующий график $y=f(|x|)$

Практический прием: Для построения графика функции $y=f(|x|)$ преобразованием графика $y=f(x)$ можно:

- множество точек графика $y=f(x)$, расположенных в правой полуплоскости, оставить на месте,
- множество точек графика $y=f(x)$, расположенных в правой полуплоскости, отобразить в левую полуплоскость преобразованием «осевая симметрия» относительно оси ординат,
- Замечание: Множество точек основного графика $y=f(x)$, расположенные в левой полуплоскости «исчезают».



Преобразование $y=af(x)$

Преобразование $y=af(x)$ рассмотрим при $a>0$, выделяя случаи: $0<a<1$ и $a>1$.

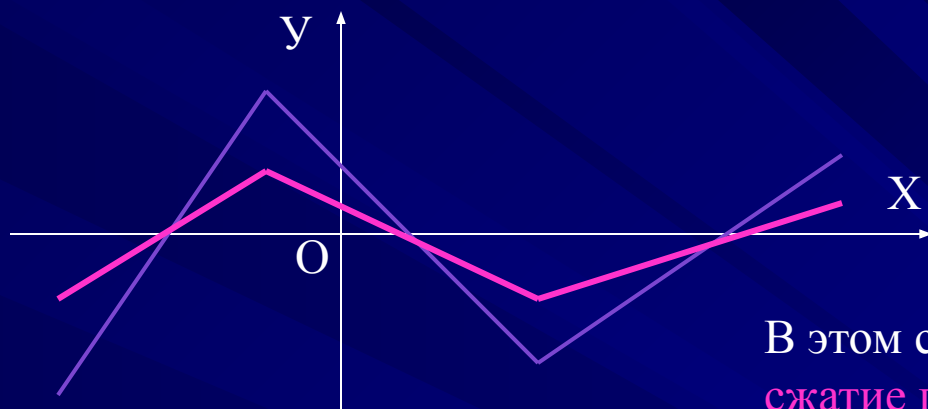
Замечание: Если $a<0$, то график функции $y=af(x)$ можно построить подвергнув график функции $y=f(x)$ композиции преобразований $y=-f(x)$ и $y=af(x)$ при $a>0$.

Заметим, что в уравнении функции $y = af(x)$ «а»- сомножитель при $f(x)$.
Значит: при одном значении аргумента модуль значения функции $y = af(x)$ равен произведению модуля значения функции $y= f(x)$ и «а», то есть:

Если $0<a<1$, то модуль значения функции $y = af(x)$ меньше модуля значения функции $y = f(x)$.

Если $a >1$, то модуль значения функции $y = af(x)$ больше модуля значения функции $y = f(x)$.

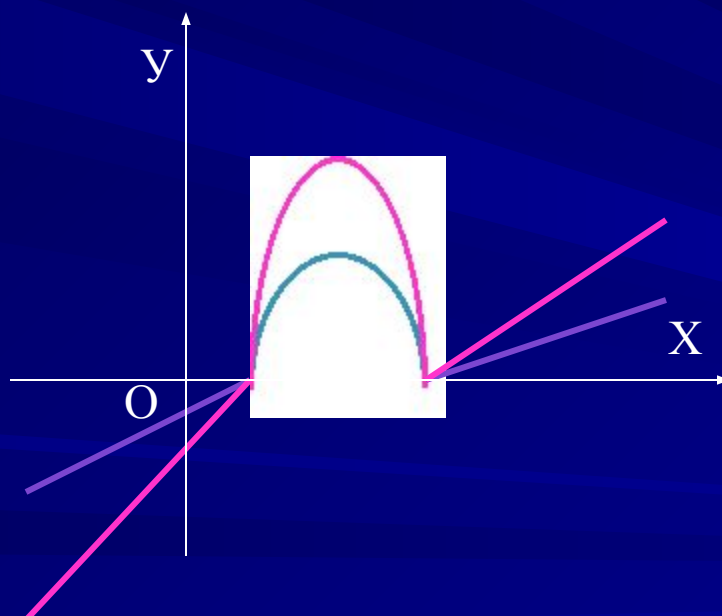
Дадим иллюстрацию взаимного расположения графиков в выделенных случаях при $a=1/2$ ([Рис.9](#) Дадим иллюстрацию взаимного расположения графиков в выделенных случаях при $a=1/2$ (Рис.9) и $a=2$ ([Рис.10](#)).



$$y=f(x)$$

$$y=1/2f(x)$$

В этом случае говорят: произошло сжатие графика функции $y=f(x)$ к оси абсцисс.



$$y=f(x)$$

$$y=2f(x)$$

В этом случае говорят: произошло растяжение графика функции $y=f(x)$ от оси абсцисс.

Заметьте, что во всех рассмотренных случаях точки оси абсцисс не изменили своего положения, то есть остались на месте.



Преобразование $y=f(ax)$

Преобразование $y=f(ax)$ рассмотрим при $a>0$, выделяя случаи: $0<a<1$ и $a >1$.

Замечание: Если $a<0$, то график функции $y=f(ax)$ можно построить подвергнув график функции $y=f(x)$ композиции преобразований $y=f(-x)$ и $y=f(ax)$ при $a>0$.

Чтобы установить взаимное расположение графиков выделенных функций, выясним взаимосвязь аргументов этих функций при равных значениях функций.

Пусть (x_0, y_0) – координаты точки графика $y=f(x)$, а (x_1, y_0) – координаты соответствующей точки графика функции $y=f(ax)$.

То есть верны равенства: $y_0=f(x_0)$, $y_0=f(ax_1)$. Отсюда верно равенство: $x_0=ax_1$ или $x_1=1/a \cdot x_0$

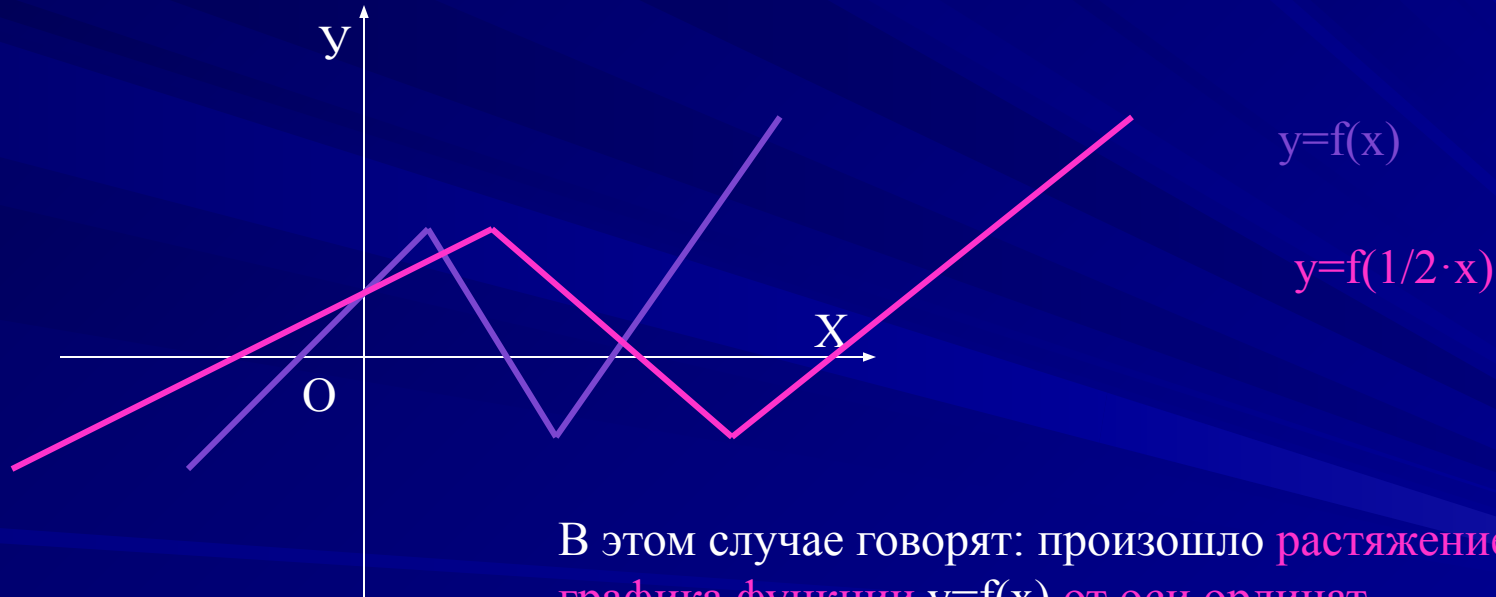
Последнее равенство позволяет сделать следующие выводы:

1. Если $0<a<1$, то $(1/a) >1$, то есть $|x_1| > |x_0|$ в $(1/a)$ раз.



Геометрическая интерпретация этого факта: соответствующие точки графиков функций $y=f(x)$ и $y=f(ax)$ имеют равные ординаты, а соотношение модулей их абсцисс равно $(1/a)$, причем модуль абсциссы графика функции $y=f(ax)$ в $1/a$ раз больше.

Иллюстрацию этого случая рассмотрим на примере взаимного расположения графиков функций $y=f(x)$ и $y=f(1/2 \cdot x)$.



В этом случае говорят: произошло **растяжение** графика функции $y=f(x)$ от оси ординат.

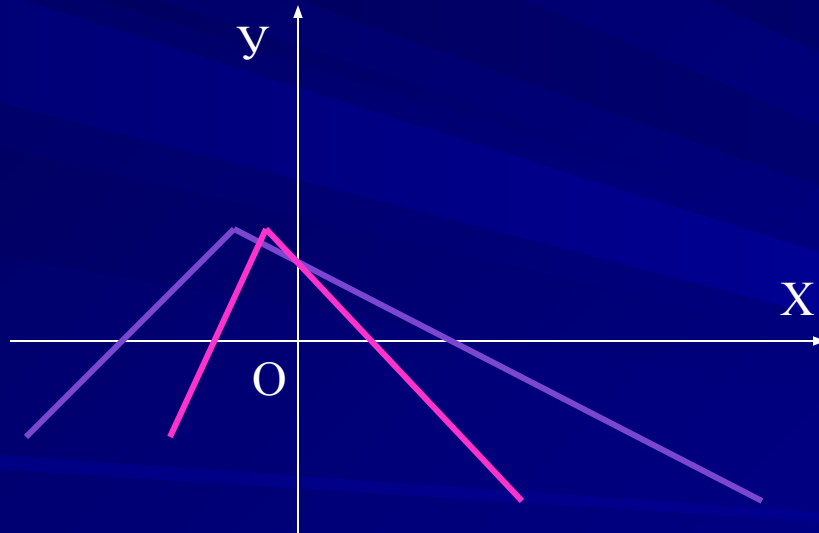
Заметьте, что точка оси ординат не изменила своего положения, то есть осталась на месте.



2. Если $a > 1$, то $(1/a) < 1$, то есть $|x_1| < |x_0|$ в (a) раз.

Геометрическая интерпретация этого факта: соответствующие точки графиков функций $y=f(x)$ и $y=f(ax)$ имеют равные ординаты, а соотношение модулей их абсцисс равно $(1/a)$, причем модуль абсциссы графика функции $y=f(ax)$ в (a) раз меньше.

Иллюстрацию этого случая рассмотрим на примере взаимного расположения графиков функций $y=f(x)$ и $y=f(2 \cdot x)$.



$$y=f(x)$$

$$y=f(2 \cdot x)$$

В этом случае говорят:
произошло **сжатие графика**
функции $y=f(x)$ к оси ординат.

Заметьте, что точка оси ординат не изменила своего положения, то есть осталась на месте.



Комбинации преобразований

$y=f(x)$ $y=|f(x)|$ Преобразование $y=f(|x|)$

$y=f(|x|)$ $y=af(x)$ Преобразование $y=af(x)$

$y=f(ax)$ Преобразование $y=f(ax)$

