Преобразования графиков функций

Цель презентации: дать теоретическое обоснование и практический прием выполнения основных преобразований графиков функций

Пусть y=f(x)- заданная функция. График этой функции может быть подвергнут преобразованиям:

- 2 y = f(x)+a
- 2 y = f(x+a)
- 2 y = - y = - y = - f(x)
- 2 y = f(-x)
- 2 y = |f(x)|
- 2 y = f(|x|)
- 2 y = af(x)
- 2 y = f(ax)
- 2 комбинации преобразований

Примечание: После рассмотрения каждого из выделенных видов преобразований Вы можете вернуться на этой слайд, воспользовавшись гиперссылкой «Возврат».

Преобразование y=f(x)+a

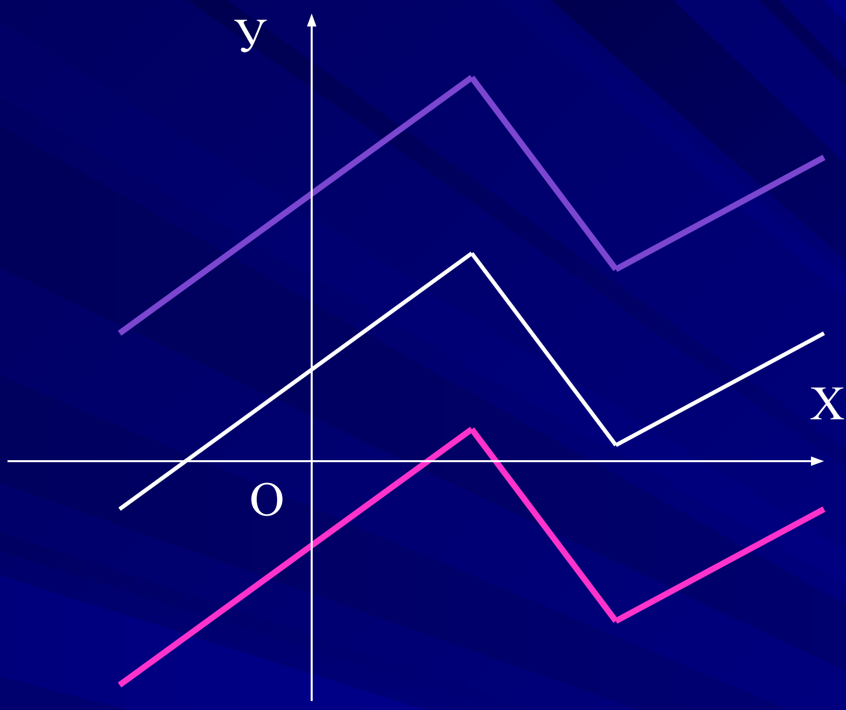
Заметим, что в уравнении функции y = f(x)+a «a»- слагаемое при f(x).

Значит: при одном значении аргумента значение функции y = f(x)+a отличается от значения функции y= f(x) на «a», то есть:

Если a>0, то значение функции y = f(x)+a больше значения функции y = f(x) на «a».

Если a<0, то значение функции y = f(x)+a меньше значения функции y = f(x) на «|a|».

Взаимное расположение графиков в выделенных случаях проиллюстрировано на Рис.1.



$y = f(x)+a\ (a>0)$

$y = f(x)$

$y = f(x)+a\ (a<0)$

Практический прием построения графика функции $y = f(x)+a$ преобразованием графика функции $y = f(x)$:

Чтобы построить график функции $y = f(x)+a$, можно график функции $y = f(x)$ подвергнуть параллельному переносу на $|a|$ единиц

- вверх, если $a>0$,
- вниз, если $a<0$.

Элементы самоконтроля (правильности построения графика):

Аналитическим путем

- найти область определения функции и сопоставить с соответствующим свойством графика;
- найти множество значений функции и сопоставить с соответствующим свойством графика;
- найти корни функции и сравнить их с абсциссами (абсциссой) точек пересечения графика с осью абсцисс;
- найти ординату точки пересечения графика функции с осью ординат и сравнить с соответствующей характеристикой точки графика

Замечание:

- если график основной функции $y = f(x)$ имеет асимптоты, то и результатирующий график, полученный в результате преобразования (композиции преобразований) также имеет асимптоты.

Возврат

Преобразование y=f(x+a)

1. Сравнивая уравнения функций $y = f(x)$ и $y = f(x+a)$, заметим, что «a» - слагаемое при аргументе.

2. Чтобы установить взаимное расположение графиков выделенных функций, выясним взаимосвязь аргументов этих функций при равных значениях функций.

3. Пусть (x_0, y_0) – координаты точки графика $y=f(x)$, а (x_1, y_0) – координаты соответствующей точки графика функции $y=f(x+a)$.

То есть верны равенства: $y_0 = f(x_0)$, $y_0 = f(x_1 + a)$.

Отсюда верно равенство: $x_0 = x_1 + a$

или $\mathbf{x_1 = x_0 - a}$

Последнее равенство говорит о том, что:

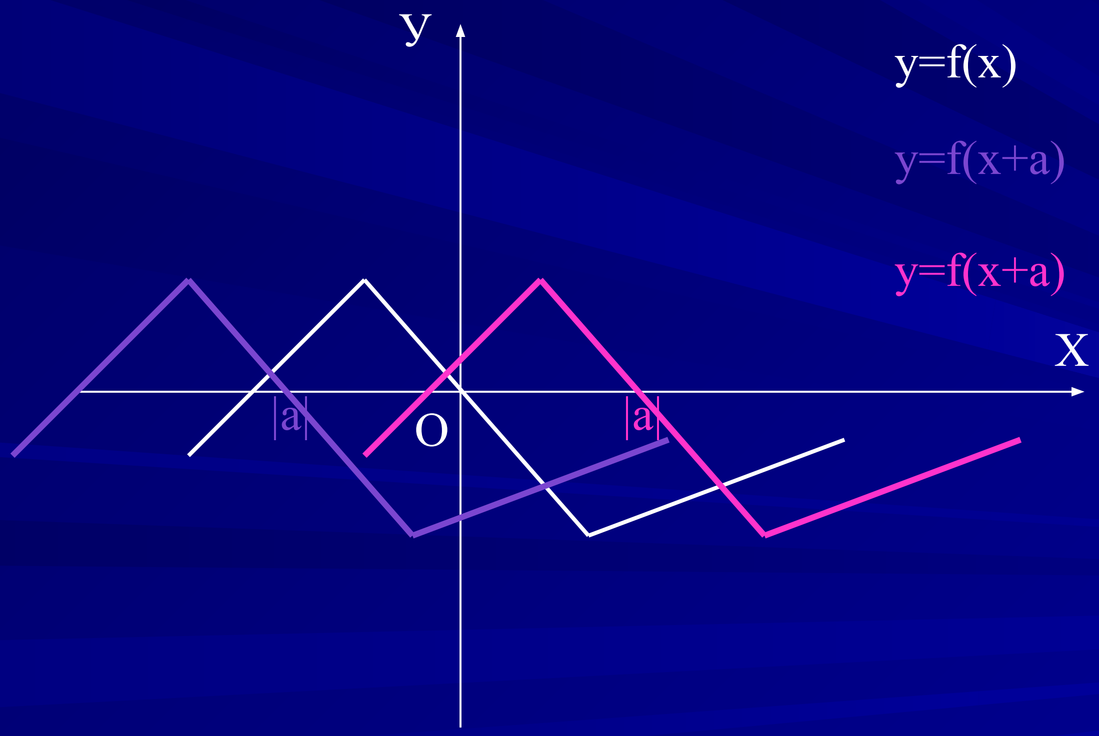
\# если $a>0$, то $x_1<x_0$ на «$|a|$»,

\# если $a<0$, то $x_1>x_0$ на «$|a|$».

Полученные выводы дают обоснование взаимному расположению графиков функций y=f(x) и y=f(x+a):

если a>0, то для получения графика функции y=f(x+a) можно график функции y=f(x) «сдвинуть» на «|a|» влево;

если a <0, то для получения графика функции y=f(x+a) можно график функции y=f(x) «сдвинуть» на «|a|» вправо (движение вдоль оси абсцисс).



Преобразование y=-f(x)

Уравнение функции y = - f(x) можно привести к виду y = (-1)f(x).

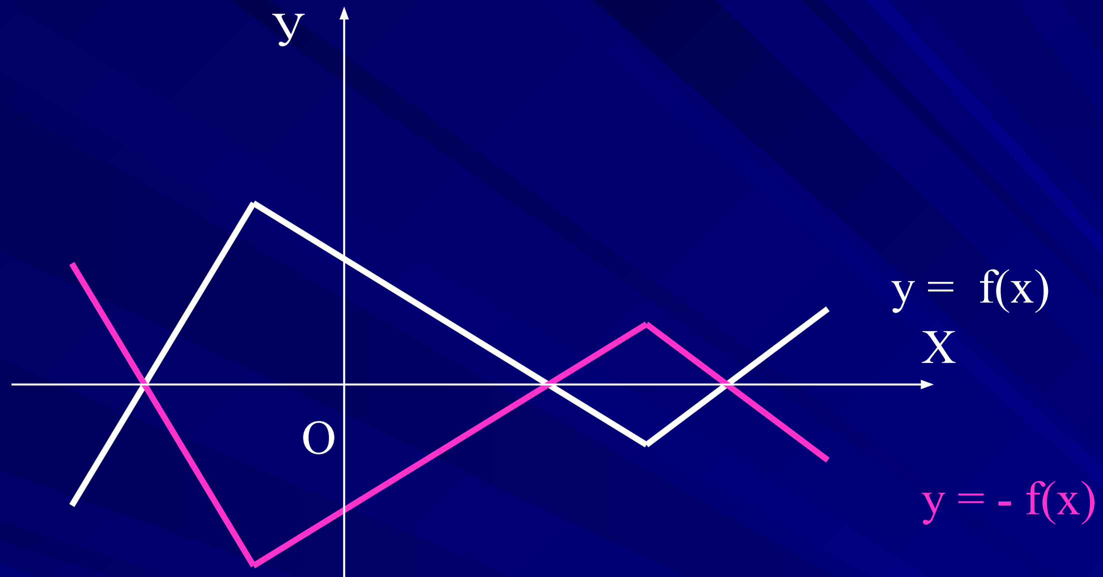
Не трудно заметить, что при одном значении аргумента значение функции y = - f(x) противоположно значению функции y= f(x).

Это означает, что если точка с координатами (x_0,y_0) – точка графика y=f(x), то точка с координатами (x_0,- y_0) – точка графика y= - f(x).

По свойству взаимного расположения точек координатной плоскости: точки с равными абсциссами и противоположными ординатами симметричны относительно оси абсцисс.

Вывод: График функции y = - f(x) можно получить из графика функции y = f(x), выполнив преобразование «осевая симметрия относительно оси абсцисс».

Взаимное расположение графиков продемонстрировано на Рис.3



При выполнении симметрии относительно оси абсцисс целесообразно помнить:

2отрезки переходят в равные отрезки, прямые – в прямые, кривые – в равные им кривые;

2 характеристические точки основного графика переходят в симметричные им точки относительно оси абсцисс;

2 точки пересечения основного графика с осью абсцисс отображаются на себя (остаются на месте)

2 если мысленно перегнуть плоскость по оси абсцисс, графики функций «наложатся» друг на друга

Преобразование y=f(-x)

1. Чтобы установить взаимное расположение графиков выделенных функций, выясним взаимосвязь аргументов этих функций при равных значениях функций.

2. Сравнивая уравнения функций $y = f(-x)$ и $y = f(x)$, заметим, что аргументы противоположны.

3. Пусть (x_0, y_0) – координаты точки графика $y=f(x)$, а (x_1, y_0) – координаты соответствующей точки графика функции $y=f(-x)$.

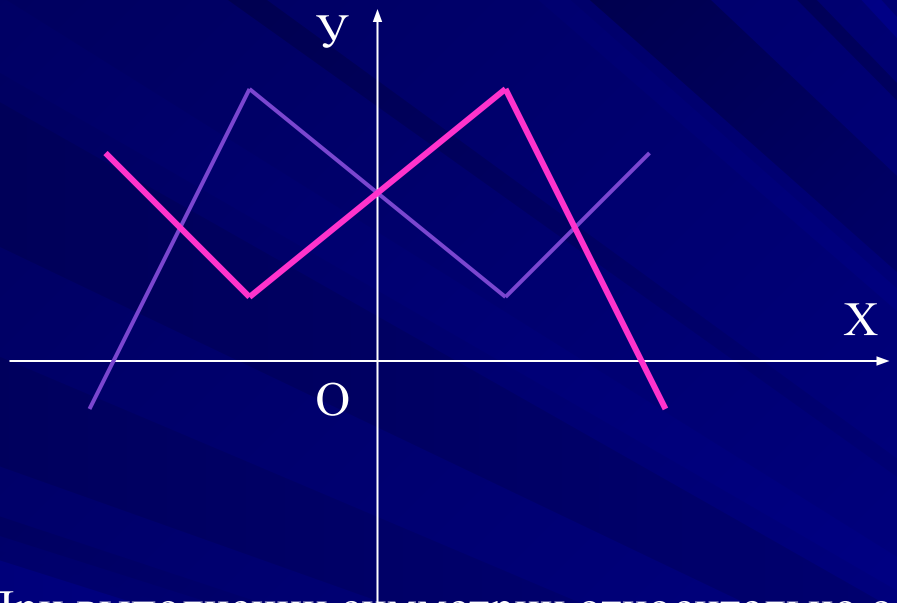
То есть верны равенства: $y_0=f(x_0)$, $y_0=f(x_1)$. Отсюда верно равенство: $x_0= - x_1$ или $\mathbf{x_1 = - x_0}$

Вывод: Если аргументы функций противоположны, то значения функций равны.

4. Геометрической интерпретацией полученного вывода является утверждение: если точка с координатами (x_0,y_0) – точка графика $y=f(x)$, то точка с координатами $(-x_0, y_0)$ – точка графика $y= f(-x)$.
5. По свойству взаимного расположения точек координатной плоскости: точки с противоположными абсциссами и равными ординатами симметричны относительно оси ординат.

Вывод: График функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$, выполнив преобразование «осевая симметрия относительно оси ординат».

Взаимное расположение графиков продемонстрировано на Рис.4



y=f(x)

y=f(-x)

При выполнении симметрии относительно оси ординат целесообразно помнить:

2отрезки переходят в равные отрезки, прямые – в прямые, кривые – в равные им кривые;

2 характеристические точки основного графика переходят в симметричные им точки относительно оси ординат;

2 точка пересечения основного графика с осью ординат отображается на себя (остается на месте)

2 если мысленно перегнуть плоскость по оси ординат, графики функций «наложатся» друг на друга

Преобразование y=|f(x)|

Уравнение функции y=|f(x)| можно записать в виде:

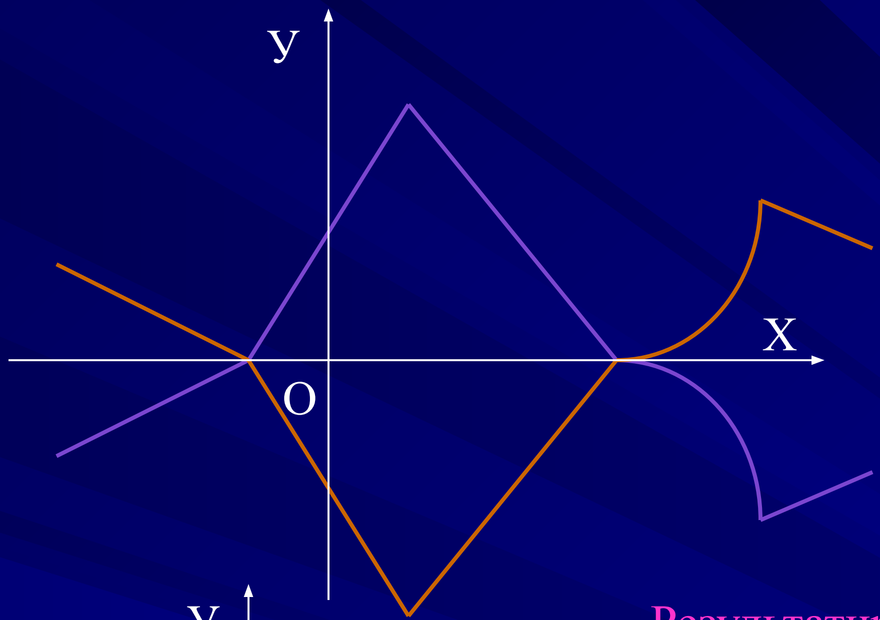
$$y=\begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0 \end{cases}$$

Значит, для построения графика функции y=|f(x)|, можно в одной системе координат построить графики функций y=f(x) (основной график) и y=- f(x) (симметрия основного графика относительно оси абсцисс).

Графиком функции y=|f(x)| будет объединение множеств точек:

- графика функции y=f(x) на том множестве области определения, на котором f(x) ≥ 0,
- графика функции y=- f(x) на том множестве области определения, на котором f(x)<0.

Этапы построения графиков выделены на Рис.5-6.



y=f(x)

y=- f(x)

Результатирующий график y=|f(x)|

Практический прием: Для построения графика функции y=|f(x)| преобразованием графика y=f(x) можно:

- множество точек графика y=f(x), расположенных в верхней полуплоскости, оставить на месте,
- множество точек графика y=f(x), расположенных в нижней полуплоскости, отобразить в верхнюю полуплоскость преобразованием «осевая симметрия» относительно оси абсцисс.

Преобразование y=f(|x|)

Уравнение функции y=f(|x|) можно записать в виде:

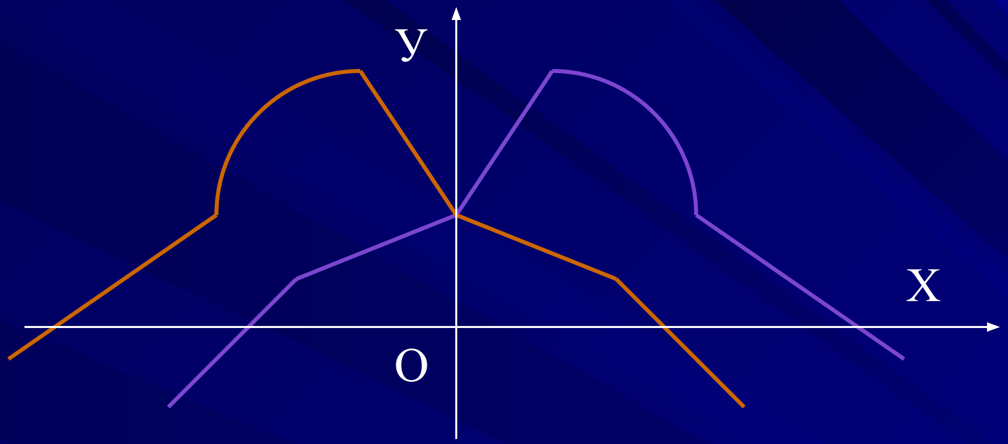
$$y=\begin{cases} f(x), \text{ если } x \geq 0 \\ f(-x), \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

Значит, для построения графика функции y=f(|x|) можно в одной системе координат построить графики функций y=f(x) (основной график) и y=f(-x) (симметрия основного графика относительно оси ординат).

Графиком функции y=f(|x|) будет объединение множеств точек:

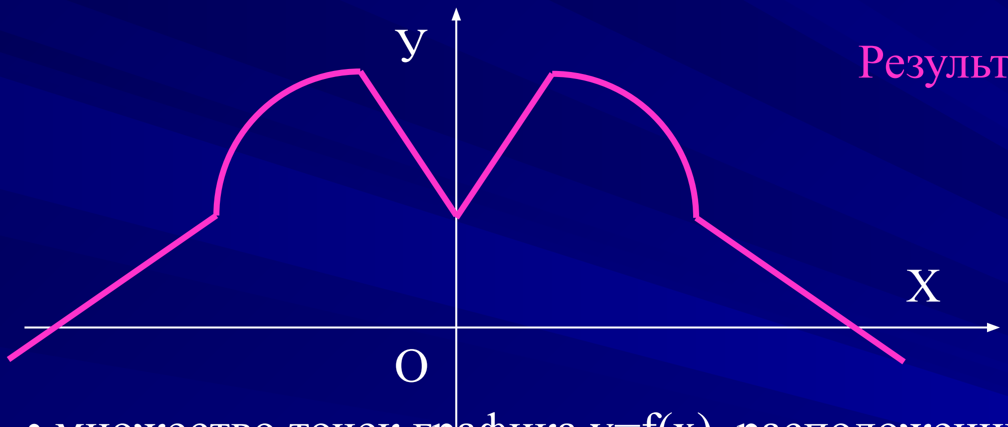
- графика функции y=f(x) на том множестве области определения, на котором $x \geq 0$,
- графика функции y= f(-x) на том множестве области определения, на котором $x <0$.

Этапы построения графиков выделены на Рис.7-8.



y=f(x)

y= f(- x)



Результатирующий график y=f(|x|)

Практический прием: Для построения графика функции y=f(|x|) преобразованием графика y=f(x) можно:

- множество точек графика y=f(x), расположенных в правой полуплоскости, оставить на месте,
- множество точек графика y=f(x), расположенных в правой полуплоскости, отобразить в левую полуплоскость преобразованием «осевая симметрия» относительно оси ординат,
- Замечание: Множество точек основного графика y=f(x), расположенные в левой полуплоскости «исчезают».

Преобразование y=af(x)

Преобразование y=af(x) рассмотрим при $a>0$, выделяя случаи: $0<a<1$ и $a>1$.

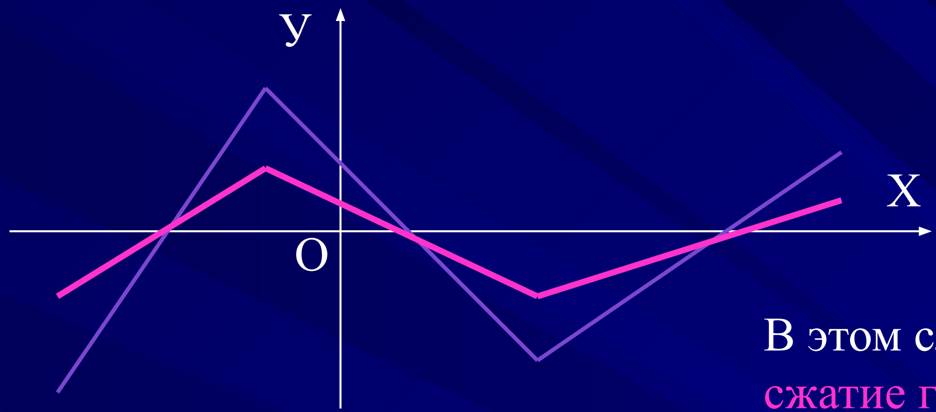
Замечание: Если $a<0$, то график функции y=af(x) можно построить подвергнув график функции y=f(x) композиции преобразований y=-f(x) и y=af(x) при $a>0$.

Заметим, что в уравнении функции y = af(x) «a»- сомножитель при f(x).
Значит: при одном значении аргумента модуль значения функции y = af(x) равен произведению модуля значения функции y= f(x) и «a», то есть:

Если $0<a<1$, то модуль значения функции y = af(x) меньше модуля значения функции y = f(x).

Если $a>1$, то модуль значения функции y = af(x) больше модуля значения функции y = f(x).

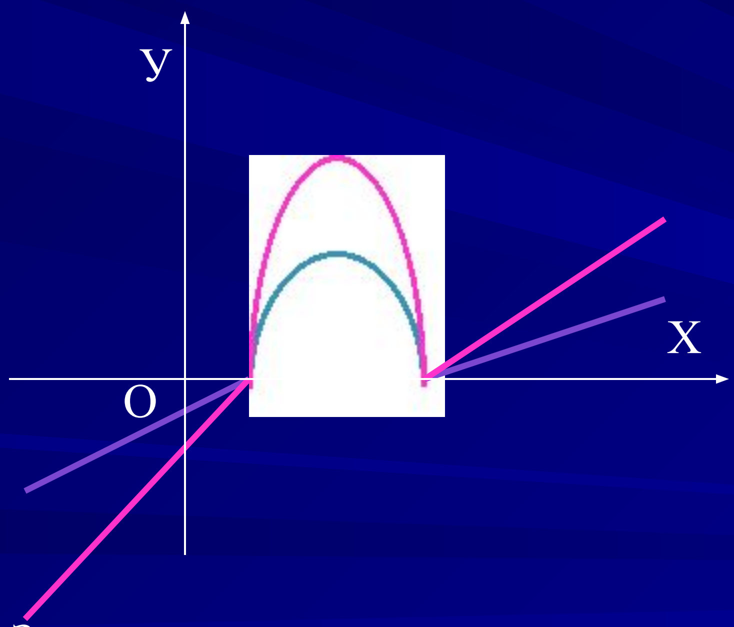
Дадим иллюстрацию взаимного расположения графиков в выделенных случаях при a=1/2 (Рис.9 Дадим иллюстрацию взаимного расположения графиков в выделенных случаях при a=1/2 (Рис.9) и a=2 (Рис.10).



y=f(x)

y=1/2f(x)

В этом случае говорят: произошло сжатие графика функции y=f(x) к оси абсцисс.



y=f(x)

y= 2f(x)

В этом случае говорят: произошло растяжение графика функции y=f(x) от оси абсцисс.

Заметьте, что во всех рассмотренных случаях точки оси абсцисс не изменили своего положения, то есть остались на месте.

Преобразование y=f(ax)

Преобразование y=f(ax) рассмотрим при a>0, выделяя случаи: 0<a<1 и a >1.

Замечание: Если a<0, то график функции y=f(ax) можно построить подвергнув график функции y=f(x) композиции преобразований y=f(-x) и y=f(ax) при a>0.

Чтобы установить взаимное расположение графиков выделенных функций, выясним взаимосвязь аргументов этих функций при равных значениях функций.

Пусть (x_0, y_0) – координаты точки графика y=f(x), а (x_1, y_0) – координаты соответствующей точки графика функции y=f(ax).

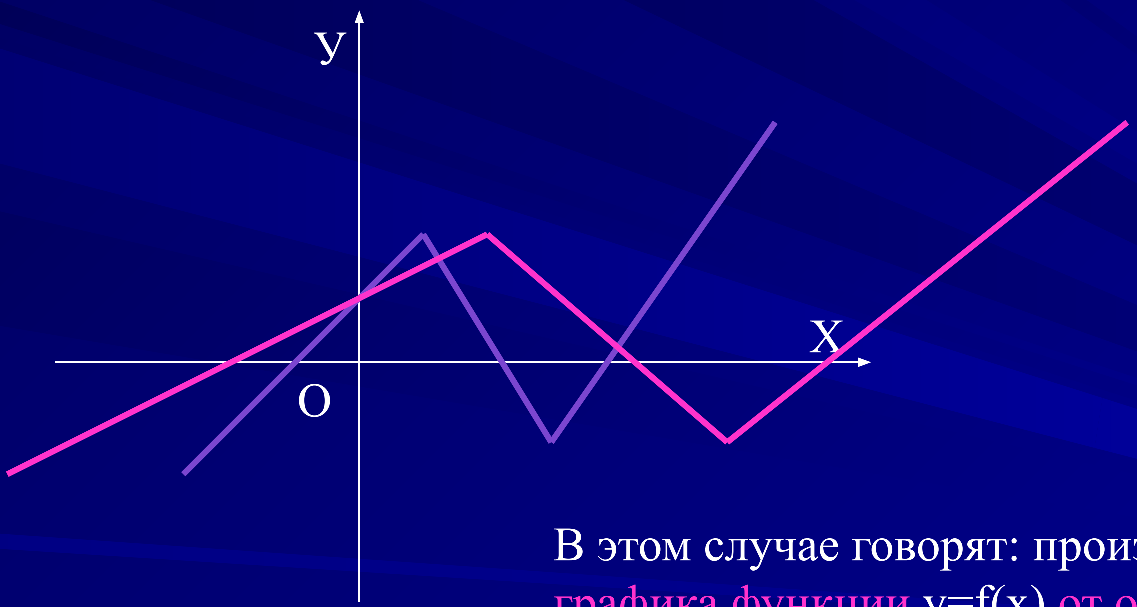
То есть верны равенства: $y_0=f(x_0)$, $y_0=f(ax_1)$. Отсюда верно равенство: $x_0=ax_1$ или $\mathbf{x_1 = 1/a \cdot x_0}$

Последнее равенство позволяет сделать следующие выводы:

1. Если 0<a<1, то (1/a)>1, то есть $|x_1| > |x_0|$ в (1/a) раз.

Геометрическая интерпретация этого факта: соответствующие точки графиков функций y=f(x) и y=f(ax) имеют равные ординаты, а соотношение модулей их абсцисс равно (1/a), причем модуль абсциссы графика функции y=f(ax) в 1/a раз больше.

Иллюстрацию этого случая рассмотрим на примере взаимного расположения графиков функций y=f(x) и y=f(1/2·x).



y=f(x)

y=f(1/2·x)

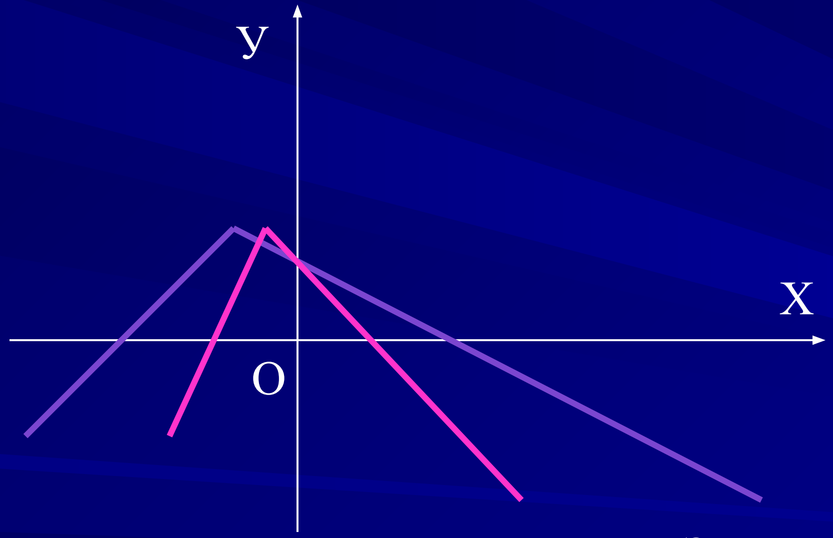
В этом случае говорят: произошло растяжение графика функции y=f(x) от оси ординат.

Заметьте, что точка оси ординат не изменила своего положения, то есть осталась на месте.

2. Если a>1, то (1/a) <1, то есть $|x_1| < |x_0|$ в (a) раз.

Геометрическая интерпретация этого факта: соответствующие точки графиков функций y=f(x) и y=f(ax) имеют равные ординаты, а соотношение модулей их абсцисс равно (1/a), причем модуль абсциссы графика функции y=f(ax) в (a) раз меньше.

Иллюстрацию этого случая рассмотрим на примере взаимного расположения графиков функций y=f(x) и y=f(2·x).



y=f(x)

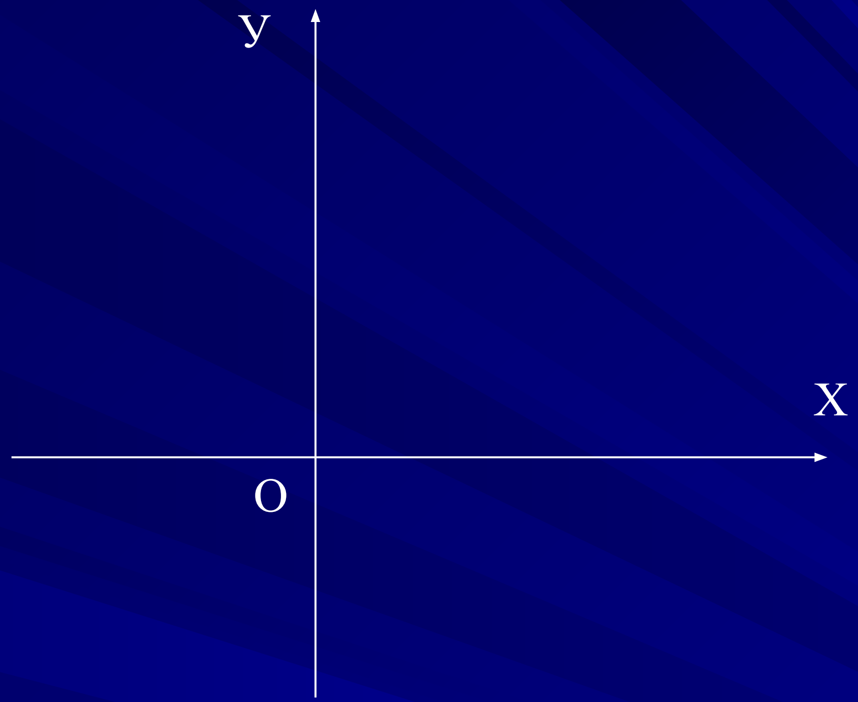
y=f(2·x)

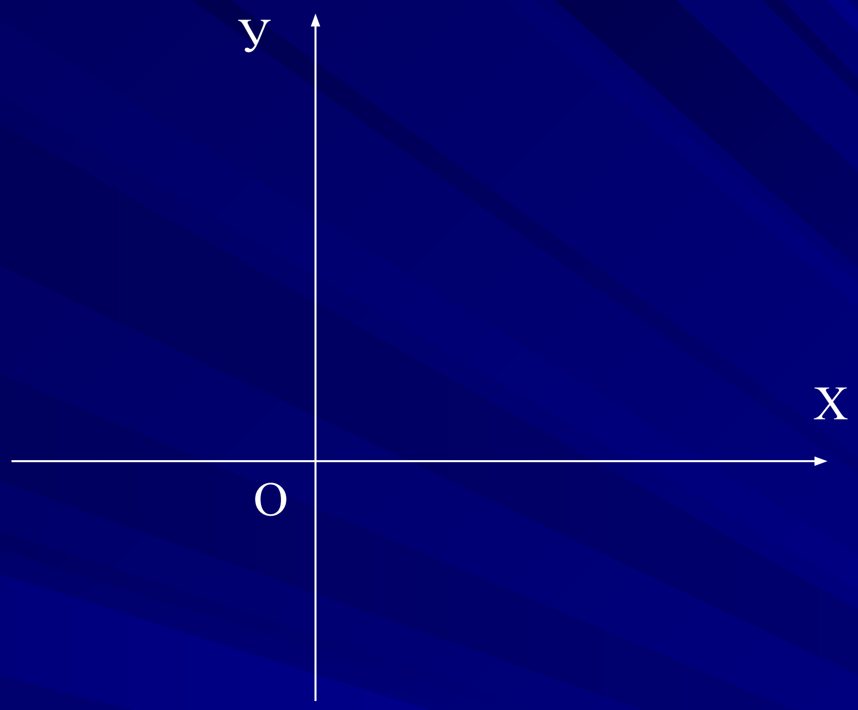
В этом случае говорят: произошло сжатие графика функции y=f(x) к оси ординат.

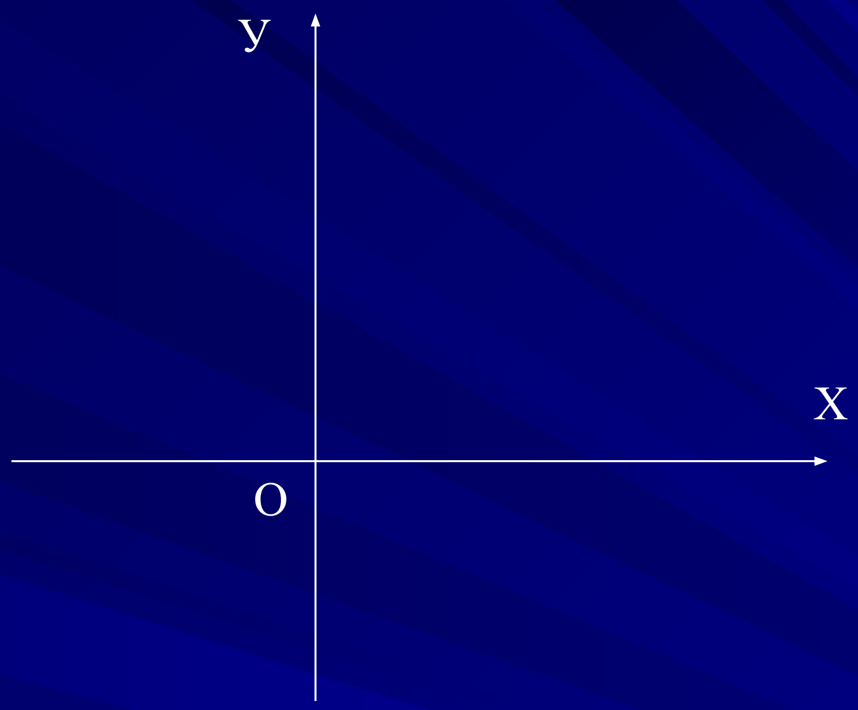
Заметьте, что точка оси ординат не изменила своего положения, то есть осталась на месте.

Комбинации преобразований

$y=f(x)$ $y=|f(x)|$ Преобразование $y=f(|x|)$
$y=f(|x|)$ $y=af(x)$ Преобразование $y=af(x)$
$y=f(ax)$ Преобразование $y=f(ax)$


y
X
O


y
X
O


y
X
O