Беседы о прикладной статистике

Семинар 10. Дисперсионный анализ для сравнения средних. Тест Крускала-Уоллиса

Фастовец И. А.

Сравнение двух средних

- На предыдущих семинарах мы обсуждали сравнение двух средних значений
- В случае нормального распределения применяют, например, t-тест
- Если распределение не описывается нормальной кривой, для сравнения двух распределений используют, например, тест суммы рангов Уилкоксона (Манна-Уитни)

Сравнение нескольких средних

- Если сравниваемых групп 3 и более, можно попарно сравнить группы друг с другом, например, при помощи t-теста. В таком случае количество сравнений $\frac{N(N-1)}{2}$, где N - количество групп, которые нужно сравнить между собой
- Недостаток такого подхода в том, что теряется статистическая информация из других групп. Это приводит к падению *статистической мощности теста* (1-ошибка второго рода)
- Одним из способов решения проблемы является однофакторный дисперсионный анализ (one-way ANOVA)

Однофакторный дисперсионный анализ

- H_0: средние всех групп равны
- H_a: хотя бы два средних различаются между собой
- Дисперсии сравниваемых генеральных совокупностей равны

- Задача сводится к построению линейной модели вида $x_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij}$,

где i – количество групп, j – количество наблюдений в группе.

- Параметры модели – средние значения сравниваемых генеральных совокупностей μ_i и общее стандартное отклонение σ
- Оценка μ_i производится при помощи средних выборок по группам:

$$\overline{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

Объединенная оценка дисперсии

- Остатки $e_{ij} = x_{ij} - \overline{x}_i$ отражают разброс данных вокруг средних значений по группам
- Модель ANOVA предполагает, что распределение признака во всех группах нормальное и имеет одинаковую дисперсию
- Объединенная (усредненная) оценка дисперсии по I группам будет иметь вид:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + \cdots + (n_I - 1)s_I^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_I - 1)}$$

- Тогда несмещенная оценка с $s_p = \sqrt{s_p^2}$
- Группы с бóльшим количеством наблюдений будут иметь больший вес

Регрессия и ANOVA: одно и то же

- Из модели множественной регрессии мы помним, что:

$$\mathrm{SST} = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$\mathrm{SSM} = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$\mathrm{SSE} = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$\mathrm{SST} = \mathrm{SSM} + \mathrm{SSE} \qquad \mathrm{DFT} = \mathrm{DFM} + \mathrm{DFE}$$

$$\mathrm{MS} = \frac{\text{sum of squares}}{\text{degrees of freedom}}$$

- Модель ANOVA аналогична регрессионной модели, где роль линии регрессии выполняют средние по группам
- Поэтому SSM записывают как SSG, что означает сумма квадратов отклонений каждого среднего от генерального среднего
- Аналогично регрессии: SSE – сумма квадратов отклонений значений от внутригрупповых средних, SST – сумма квадратов отклонений каждого значения от генерального среднего

F-тест для дисперсионного анализа

- Несложно догадаться, что $s_p^2 = \mathrm{MSE} = \dfrac{\mathrm{SSE}}{\mathrm{DFE}}$ $\quad s_p = \sqrt{\mathrm{MSE}}$

- Степени свободы для всех отклонений и F-тест :

$$\mathrm{DFT} = N - 1$$

$$\mathrm{DFG} = I - 1$$

$$\mathrm{DFE} = N - I$$

$$R^2 = \frac{\mathrm{SSG}}{\mathrm{SST}}$$ (Аналогично регрессии)

$$F = \frac{\mathrm{MSG}}{\mathrm{MSE}}$$ Подчиняется распределению F(I-1, N-I)

Source	Degrees of freedom	Sum of squares	Mean square	F
Groups	$I - 1$	$\sum_{\text{groups}} n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2$	SSG/DFG	MSG/MSE
Error	$N - I$	$\sum_{\text{groups}} (n_i - 1)s_i^2$	SSE/DFE	
Total	$N - 1$	$\sum_{\text{obs}} (x_{ij} - \bar{x})^2$		

Пример

- Имеем 3 переменных, в каждой 3 наблюдения:

A	B	C
3	5	7
1	3	6
2	4	5

	2	**4**	**6**
	1	**1**	**1**

- $\bar{\bar{X}} = \frac{3+1+2+5+3+4+7+6+5}{9} = \frac{36}{9} = 4$

- $SST = (3-4)^2+(1-4)^2+(2-4)^2+(5-4)^2+(3-4)^2$
  $(4-4)^2+(7-4)^2+(6-4)^2+(5-4)^2 = \mathbf{30}$
- $DFT = N - 1 = 9 - 1 = \mathbf{8}$

- $SSE = SSW = (3-\mathbf{2})^2+(1-\mathbf{2})^2+(2-\mathbf{2})^2+(5-\mathbf{4})^2+(3-\mathbf{4})^2+(4-\mathbf{4})^2+(7-\mathbf{6})^2+(6-\mathbf{6})^2+(5-\mathbf{6})^2 = \mathbf{6}$

- $SSG = SSB = 3\times(\mathbf{2}-4)^2 + 3\times(\mathbf{4}-4)^2 + 3\times(\mathbf{6}-4)^2 =$
- $12 + 0 + 12 = \mathbf{24}$
- $DFG = DFB = I - 1 = \mathbf{2}$
- $MSG = \frac{SSG}{DFG} = \frac{24}{2} = 12$

- $DFE = N - I = 9 - 3 = \mathbf{6}$
- $MSE = \frac{SSE}{DFE} = \frac{6}{6} = 1$
- $MSE = \frac{(3-1)\times1+(3-1)\times1+(3-1)\times1}{(3-1)+(3-1)+(3-1)} = \frac{2+2+2}{2+2+2} = \frac{6}{6} = 1$

$$F(I-1, N-I) = \frac{MSG}{MSE} = \frac{12}{1} = 12$$

$P=0.008$

$$!\,SST = SSG + SSE$$

Индивидуальные сравнения. Контрасты

- Контраст – это комбинация средних генеральной совокупности вида $\psi = \sum a_i \mu_i$, ему соответствует выборочный контраст $c = \sum a_i \bar{x}_i$
- При этом сумма коэффициентов *a* равна 0: $\sum a_i = 0$
- В ANOVA контраст – это линейная комбинация независимых нормально распределенных величин, таким образом, он имеет нормальное распределение
- Стандартная ошибка выборочного контраста: $\mathrm{SE}_c = s_p \sqrt{\sum \frac{a_i^2}{n_i}}$
- Тест H_0: $\psi = 0$ $t = \frac{c}{\mathrm{SE}_c}$ и доверительный интервал $c \pm t^* \mathrm{SE}_c$

– уже знакомые нам из предыдущих семинаров, где используем распределение t(DFE)

Пример расчета контрастов

- Посчитаем значимость различия средних

А-С в нашем примере. Контраст: $c_1 = 1 \times 2 + (-1) \times 6 = -4$

- $SE_{c1} = 1 \times \sqrt{\frac{1^2}{3} + \frac{-1^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816$; $t(6) = \frac{-4}{0.816} = -4.902$; $p = 0.002705$
- Теперь посчитаем, отличается ли среднее С от среднего средних А-В:
- Контраст: $c_2 = 1 \times (2 + 4) + (-2) \times 6 = -6$
- $SE_{c2} = 1 \times \sqrt{\frac{1^2}{3} + \frac{1^2}{3} + \frac{-2^2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2} = 1.414$; $t(6) = \frac{-6}{1.414} = -4.243$; $p = 0.00542$
- Контрасты можно использовать, даже если общий F-тест не значимый, т.к. в некоторых случаях контрасты мощнее
- Нельзя определять индивидуальные сравнения, глядя на данные! Такие сравнения планируются изначально (устранение ошибки III рода)

	A	B	C
	3	5	7
	1	3	6
	2	4	5
	2	**4**	**6**
	1	**1**	**1**

$s_p = 1$

$DFE = 6$

Множественные сравнения

- Используются только после отвержения H_0 при помощи F-теста!
- Тесты множественных сравнений представляют из себя парные t-тесты с использованием объединенной оценки дисперсии s_p из ANOVA :

$$t_{ij} = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}} \qquad |t_{ij}| \geq t^{**}$$

- Метод подбора t^{**} зависит от используемой процедуры сравнения
- Тест НСР (Fisher's LSD) не использует поправку на множественные сравнения, и поэтому не является корректным
- Простейшее решение – использовать поправку Бонферрони
- Огромное количество поправок на любой вкус!

Что делать, если допущения нарушаются

- Если распределения остаются предположительно нормально распределенными, но дисперсия в группах гетерогенна
- Если наибольшее и наименьшее стандартные отклонения различаются менее чем в 2 раза, то можно ничего не делать
- Если различия дисперсий резкие, рекомендуется использовать F-тест Уэлча для разных дисперсий
- Далее для множественных сравнений можно применить тест Геймса-Хоуэлла (Games-Howell test)
- Эти методы менее мощные, чем классические, однако применимы даже при очень малых выборках

Ранговый ANOVA

- Если резко нарушаются допущения, можно обратиться к непараметрическим методам оценки
- Самый неприятный случай – когда возможны резкие выбросы, которые нельзя объяснить и убрать
- Простые и примитивные непараметрические тесты – ранговые
- На предыдущих семинарах мы рассматривали ранговые корреляции Спирмена и тесты попарных сравнений Уилкоксона
- Дисперсионный анализ также можно произвести ранговыми методами. В этом случае мы тестируем общую нулевую гипотезу не F-тестом, а тестом Крускала-Уоллиса (Kruskal-Wallis test)

Тест Крускала-Уоллиса

- Проранжируем все наблюдения (общее ранжирование), рассчитаем суммы рангов R_i в i группах объемом n и общим количеством наблдений N:
- H статистика Крускала-Уоллиса имеет вид:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

- Когда объемы выборок большие и во всех группах примерно одинаковое распределение, H – статистика распределяется в соответствии с $\chi^2(I-1)$
- В большинстве случаев (но не всегда) асимптотический H тест дает надежные результаты и при малых выборках

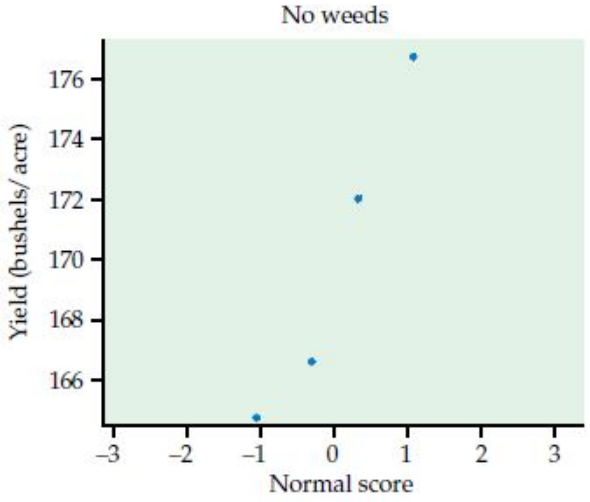
Тест Крускала-Уоллиса

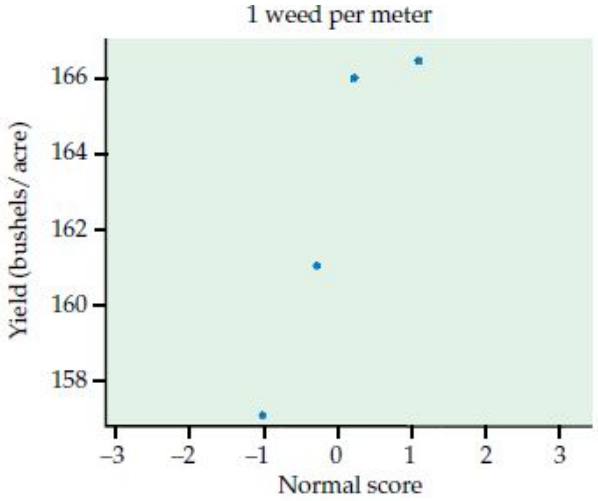
- Рассмотрим урожаи культуры при разном количестве сорняков:

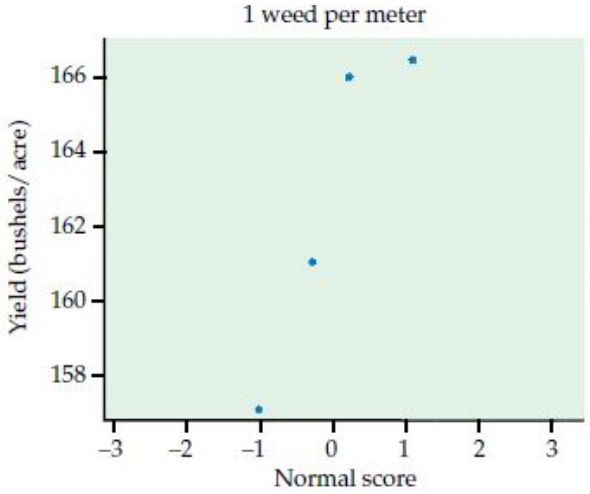
Weeds per meter	Corn yield	Weeds per meter	Corn yield	Weeds per meter	Corn yield	Weeds per meter	Corn yield
0	166.7	1	166.2	3	158.6	9	162.8
0	172.2	1	157.3	3	176.4	9	142.4
0	165.0	1	166.7	3	153.1	9	162.7
0	176.9	1	161.1	3	156.0	9	162.4

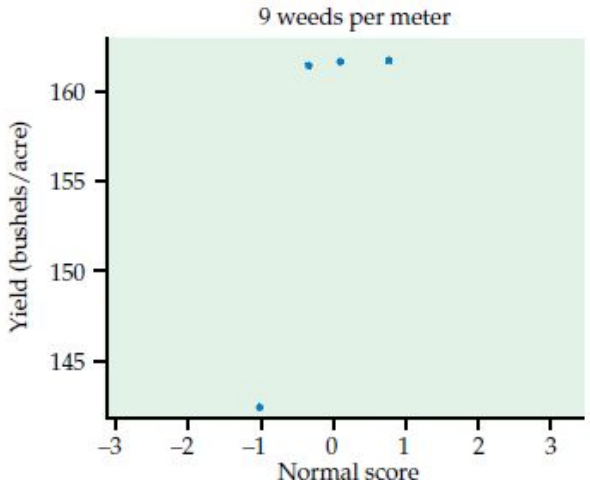
Weeds	n	Mean	Std. dev.
0	4	170.200	5.422
1	4	162.825	4.469
3	4	161.025	10.493
9	4	157.575	10.118

- Графики нормальных квантилей по группам:









Тест Крускала-Уоллиса

- Ранги наблюдений и суммы рангов по группам

Yield	142.4	153.1	156.0	157.3	158.6	161.1	162.4	162.7
Rank	1	2	3	4	5	6	7	8
Yield	162.8	165.0	166.2	166.7	166.7	172.2	176.4	176.9
Rank	9	10	11	12.5	12.5	14	15	16

Weeds	Ranks				Rank sums
0	10	12.5	14	16	52.5
1	4	6	11	12.5	33.5
3	2	3	5	15	25.0
9	1	7	8	9	25.0

- Статистика Крускала-Уоллиса

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1) \\
&= \frac{12}{(16)(17)} \left(\frac{52.5^2}{4} + \frac{33.5^2}{4} + \frac{25^2}{4} + \frac{25^2}{4} \right) - (3)(17) \\
&= \frac{12}{272}(1282.125) - 51 \\
&= 5.56
\end{aligned}
$$

$P =$
0.1344

Многофакторный дисперсионный анализ

- Как и регрессия, дисперсионный анализ может быть многофакторным
- Кроме того, существуют различные модификации регрессии и дисперсионного анализа, входящие в класс общих линейных моделей (GLM)
- Многофакторный анализ мощнее, чем однофакторный по каждому фактору
- Особый интерес представляет возможность нахождения и тестирование значимости взаимодействия между факторами