Функции многих переменных

Лекция 1. Функции многих переменных: определение, предел, непрерывность, частные производные

- ***n*-мерное арифметическое пространство**
- ***Последовательность точек в m-мерном пространстве***
- ***Функции многих переменных, их предел***
- ***Непрерывность ФМП***
- ***Частные производные и дифференцируемость***
- ***Дифференцирование неявных функций***

Предел и непрерывность функции многих переменных в

Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$

<u>Определение.</u> Пространством $\mathbf{R}^n$ называется множество наборов, состоящих из n действительных чисел: $\mathbf{R}^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_i \in \mathbf{R},\ i = 1,\ldots,n\}$.

При $n=2$ пространство $\mathbf{R}^2$ – это плоскость.

При $n=3$ пространство $\mathbf{R}^3$ – это трехмерное пространство.

Во множестве $\mathbf{R}^n$ можно следующим образом ввести операции сложения и умножения на число.

Суммой элементов $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,\ldots,y_n)$ называется элемент $x+y=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$.

Произведением элемента $x=(x_1,\ldots,x_n)$ на число α называется элемент $\alpha\cdot x=(\alpha\cdot x_1,\ldots,\alpha\cdot x_n)$.

Стандартный базис в пространстве $\mathbf{R}^n$ – это набор векторов $\vec{e}_1=(1,0,\dots,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,\dots,0)$, …, $\vec{e}_n=(0,0,\dots,1)$. Любой элемент $x=(x_1,\dots,x_n)$ пространства $\mathbf{R}^n$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов: $x=x_1\cdot\vec{e}_1+x_2\cdot\vec{e}_2+\dots+x_n\cdot\vec{e}_n$; числа $x_1,\dots,x_n$ называются *координатами вектора x в данном базисе*.

Определение. *Скалярным произведением* в линейном пространстве L называется скалярная функция (x,y), зависящая от двух векторов и удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $\forall x\in L\ (x,x)\geq 0;\quad (x,x)=0 \Leftrightarrow x=0;$

2) $\forall x\in L\ \ \forall y\in L\quad (x,y)=(y,x);$

3) $\forall x\in L\ \ \forall y\in L\ \ \forall \lambda\in\mathbf{R}\quad (\lambda\cdot x,y)=\lambda\cdot(x,y);$

4) $\forall x\in L\ \ \forall y\in L\ \ \forall z\in L\quad (x,y+z)=(x,y)+(x,z).$

Линейное пространство, в котором задано скалярное произведение, называется *евклидовым пространством*.

Пространство $\mathbf{R}^n$ можно сделать евклидовым, если ввести в нем скалярное произведение любых двух векторов $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,\ldots,y_n)$ по формуле $\boxed{(x,y)=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+\ldots+x_n\cdot y_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i}$.

Определение. *Нормой* в линейном пространстве L называется скалярная функция $\|x\|$, зависящая от одного векторного аргумента и удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $\forall x\in L\ \|x\|\geq 0;\ \|x\|=0\Leftrightarrow x=0;$

2) $\forall x\in L\ \forall\lambda\in\mathbf{R}\ \|\lambda\cdot x\|=|\lambda|\cdot\|x\|;$

3) $\forall x\in L\,\forall y\in L\ \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|.$

Норму можно ввести в любом евклидовом пространстве, если воспользоваться скалярным произведением: $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Такая норма называется *евклидовой*. Например, в пространстве $\mathbf{R}^n$ евклидова норма элемента $x = (x_1, \ldots, x_n)$ вычисляется по формуле $\boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}}$.

В свою очередь, с помощью нормы можно задать *метрику* (расстояние между двумя элементами) по формуле $\boxed{\rho(x,y) = \|x - y\|}$.

Метрика обладает следующими свойствами:

1) $\forall x \in \mathbf{R}^n \;\; \rho(x,x) \ge 0; \quad \rho(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $\forall x \in \mathbf{R}^n \; \forall y \in \mathbf{R}^n \;\; \rho(x,y) = \rho(y,x);$

3) $\forall x \in \mathbf{R}^n \; \forall y \in \mathbf{R}^n \; \forall z \in \mathbf{R}^n \;\; \rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z).$

Открытые, замкнутые, ограниченные множества в R^n

Открытым шаром $B(x,r)$ с центром в точке $x \in \mathbf{R}^n$ и радиусом $r \in \mathbf{R}$ называется множество, состоящее из элементов, отстоящих от центра на расстояние меньшее радиуса, то есть $B(x,r) = \{ y \in \mathbf{R}^n \mid \rho(x,y) < r \}$. Аналогично определяется *замкнутый шар* $B[x,r] = \{ y \in \mathbf{R}^n \mid \rho(x,y) \le r \}$ с центром в точке $x \in \mathbf{R}^n$ и радиусом $r \in \mathbf{R}$.

Через понятие шара вводится следующее важное определение: $\varepsilon -$*окрестность* точки $x \in \mathbf{R}^n$ это открытый шар с центром в этой точке радиуса ε, будем ее обозначать $U_\varepsilon(x) = B(x,\varepsilon)$.

Пусть задано произвольное множество $G \subset \mathbf{R}^n$. Точка $x \in G$ называется *внутренней точкой* множества G, если найдется окрестность этой точки, целиком лежащая в множестве G. *Множество открыто*, если любая его точка является внутренней. Множество F называется *замкнутым*, если его дополнение $CF = \mathbf{R}^n \setminus F$ открыто.

Множество из $\mathbf{R}^n$ называется *ограниченным*, если оно целиком содержится в некотором замкнутом шаре.

Понятие функции многих переменных

Пусть D – некоторое множество из пространства $\mathbf{R}^n$.

Определение. Функцией f, определенной на множестве D и принимающей действительные значения, будем называть правило, при котором каждому элементу x из множества D соответствует одно и только одно число $y \in \mathbf{R}$. Будем использовать запись $f : D \to \mathbf{R}$, $y = f(x)$.

Пример 1. Найти область определения функции $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$.

Решение. Область определения задается системой неравенств $\begin{cases} x + y \geq 0\,; \\ x - y \geq 0\,. \end{cases}$

На плоскости это будет прямой угол. Он является замкнутым, неограниченным множеством (см. рис. 1).

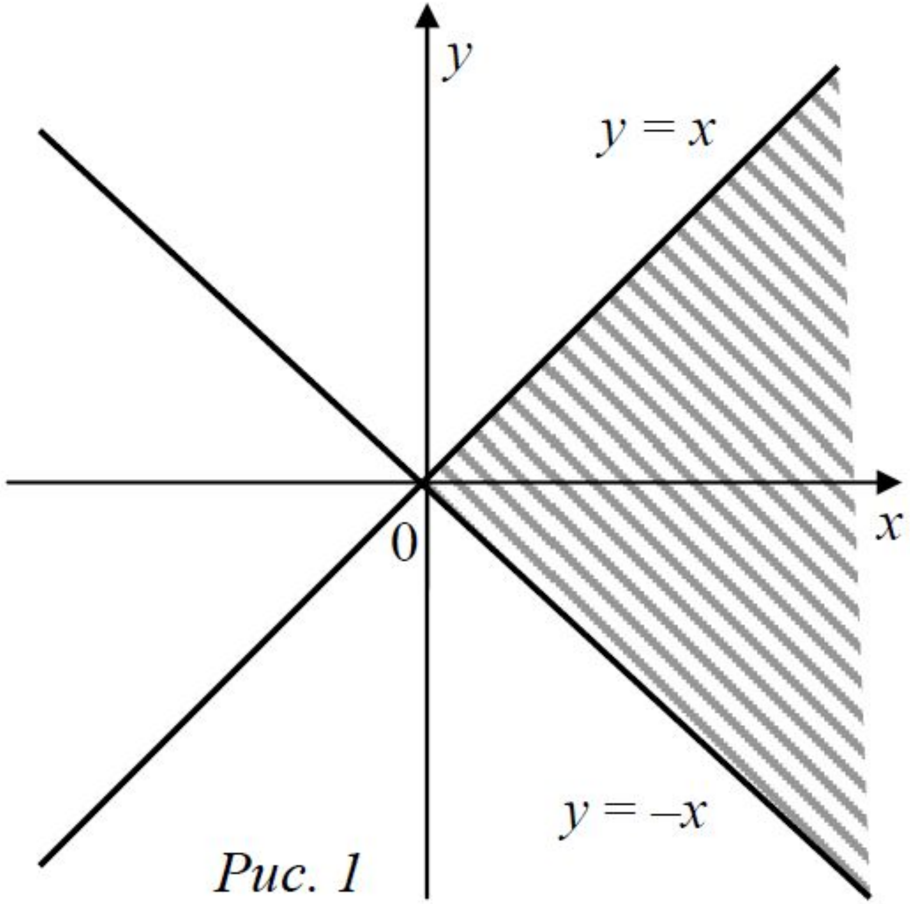

Рис. 1

Пример 2. Найти область определения функции $z = \ln(y \cdot \sin x)$.

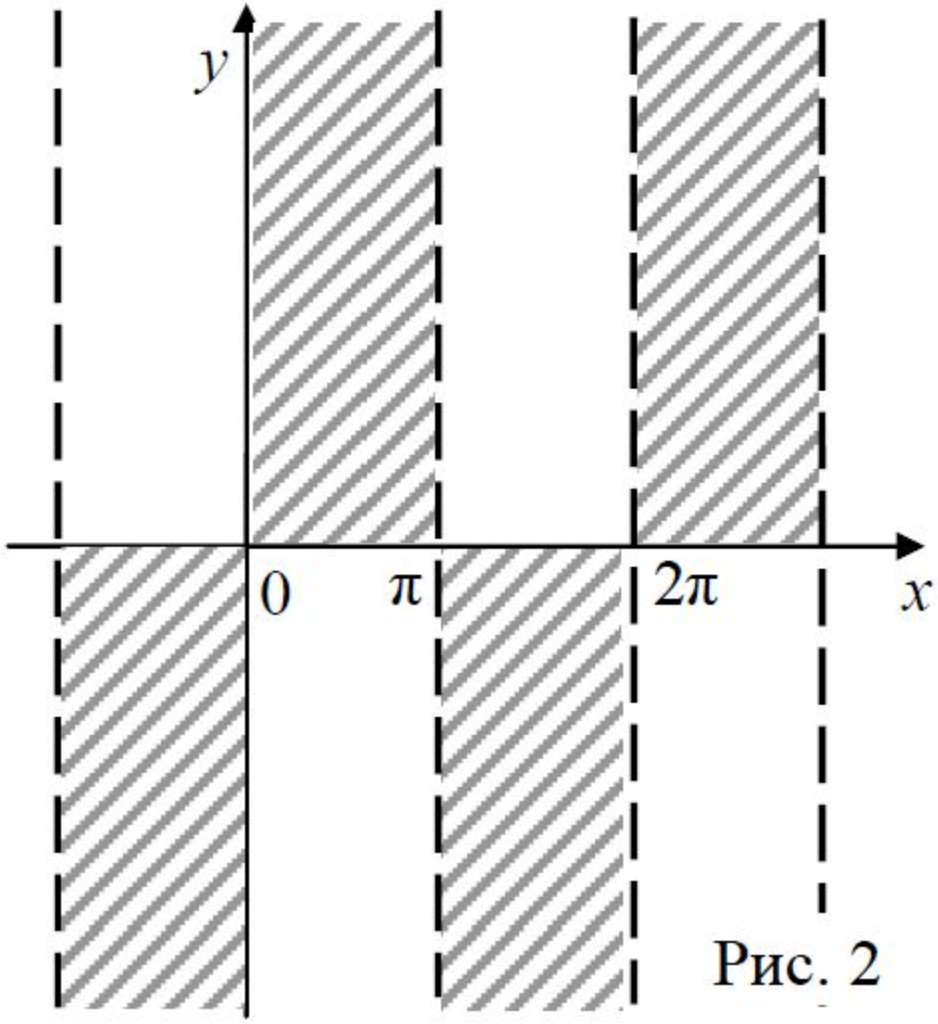

Рис. 2

Решение. Область определения задается совокупность системой неравенств: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > 0; \\ \sin x > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0; \\ \sin x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$ На плоскости это множество состоит из полуполос, не включая их границу. Множество является открытым, неограниченным (см. рис. 2).

Рассмотрим теперь функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определенную на множестве $D \subset \mathbf{R}^2$.

График функции f – это множество в трехмерном пространстве, состоящее из точек $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in D\}$.

Линия уровня функции f – это множество точек (x, y) плоскости, удовлетворяющих уравнению $f(x, y) = c$, где c – константа. Линия уровня является проекцией на плоскость XOY линии пересечения графика $z = f(x, y)$ с горизонтальной плоскостью $z = c$.

<u>Пример</u>. Найти линии уровня и построить график функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 = c$ при $c < 0$ не имеет решений, при $c = 0$ его решением является единственная точка $(0,0)$, при $c > 0$ линией уровня является окружность с центром в точке $(0,0)$ и радиусом $\sqrt{c}$. Графиком функции является параболоид вращения.

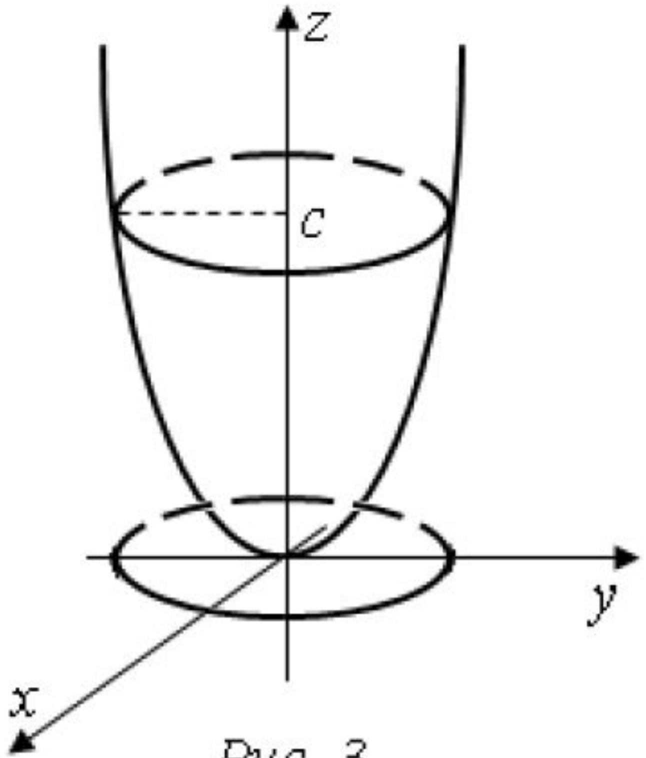

Рис. 3

Предел функции многих переменных

Пусть задана функция $f: D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^n$.

<u>Определение</u>. Элемент $A \in \overline{\mathbf{R}}$ из расширенной числовой прямой называется пределом функции f при значении переменной x, стремящемся к a, если для любой $\varepsilon-$окрестности A найдется $\delta-$окрестность точки a, такая что для всякого значения переменной x из области определения функции, лежащего в $\delta-$окрестность точки a, значение $f(x)$ попадает в $\varepsilon-$окрестность A. Обозначается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

<u>Определение</u> предела функции двух переменных по Коши:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ \forall (x, y) \in D: \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow \left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon.$$

<u>Определение</u> предела функции двух переменных по Гейне:

$$\lim_{x \to a} f(x, y) = A \Leftrightarrow \forall (x_n, y_n) \in D: (x_n, y_n) \to (a, b) \Rightarrow f(x_n, y_n) \to f(a, b).$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

Решение. Перейдем к полярным координатам $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\varphi \\ y=\rho\cdot\sin\varphi \end{cases}$.

При $x\to 0, y\to 0$ переменные $\rho\to 0$, φ – любое. Тогда предел примет вид

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\lim_{\rho\to 0}\rho\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi=0.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}$.

Решение. Покажем, что данный предел не существует, пользуясь определением предела по Гейне.

Пусть $x_n = \dfrac{1}{n} \to 0,\ y_n = \dfrac{1}{n} \to 0$.

При подстановке в предел получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Пусть теперь $x_n' = \dfrac{3}{n} \to 0,\ y_n' = \dfrac{1}{n} \to 0$

При подстановке в предел получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{3}{n^2}}{\frac{9}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{3}{10}$.

Если предел функции существует, то он единственный. Так как $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{3}{10}$, то данный предел не существует.

Непрерывность функции многих переменных

Определение. Функция непрерывна в точке, если предел функции в этой точке равен значению функции в данной точке. В частности, функция двух переменных $f(x,y)$ непрерывна в точке (x_0,y_0), если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

Определение непрерывности функции в точке по Коши:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall(x,y)\in D: \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow \left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon.$$

Определение непрерывности функции в точке по Гейне:

$$\forall(x_n,y_n)\in D: (x_n,y_n)\to(x_0,y_0)\ \Rightarrow f(x_n,y_n)\to f(x_0,y_0).$$

Определение непрерывности функции в точке через приращение:

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f=0$, где $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$ – приращения переменных,

$\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ – приращение функции.

Определение. Функция непрерывна на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Определение. Функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна на множестве M, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall (x_1, y_1) \in M \; \forall (x_2, y_2) \in M$:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \Rightarrow \left| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \right| < \varepsilon.$$

Равномерная непрерывность функции на множестве – это более сильное условие, чем просто непрерывность. Если для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, удовлетворяющее условию равномерной непрерывности, то это же $\delta > 0$ подходит для определения непрерывности в каждой точке этого множества. Обратное неверно. Однако, если множество обладает некоторыми дополнительными свойствами, то на нем непрерывность и равномерная непрерывность могут совпадать.

Определение. Компакт в пространстве $\mathbf{R}^n$ – это ограниченное и замкнутое множество.

Свойства функций, непрерывных на компакте.

1. Непрерывный образ компакта есть компакт.
2. Функция, непрерывная на компакте, ограничена на нем.
3. Если функция непрерывна на компакте, то она достигает на нем своих точных верхней и нижней граней.
4. Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем.

Дифференцируемость функции многих переменных

Понятие частных производных

Пусть задана функция $z = f(x, y)$, определенная на множестве $D \subset \mathbf{R}^2$ и принимающая действительные значения. Точка (x_0, y_0) является внутренней точкой области определения.

<u>Определение</u>. Частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке (x_0, y_0) обозначается одним из следующих символов $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$, $z'_x(x_0, y_0)$ и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогично, частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y в точке (x_0, y_0) вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Можно вычислять частную производную так же, как производную функции одной переменной, пользуясь правилами и таблицей производных. При вычислении частной производной по переменной x, вторую переменную y считаем фиксированной. Так, для функции $z = x \cdot \sin y$ в точке $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x \cdot \sin y)'_x = \sin y \cdot (x)'_x = \sin y; \quad \frac{\partial z}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x \cdot \sin y)'_y = x \cdot (\sin y)'_y = x \cdot \cos y; \quad \frac{\partial z}{\partial y}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Геометрический смысл частной производной

Пусть функция $z = f(x, y)$ задает некоторую поверхность в пространстве, $y = y_0$ – плоскость, параллельная плоскости XOY. В пересечении поверхности с плоскостью получается некоторая кривая. Тогда геометрический смысл частной производной по переменной x в точке (x_0, y_0) выражается формулой $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \mathbf{tg}\alpha$, где α – угол наклона касательной прямой в точке (x_0, y_0) к кривой, являющейся пересечением поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$.

Физический смысл частной производной

Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ – это скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) в направлении оси Ox.

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

<u>Определение</u>. Функция $f(x,y)$ называется *дифференцируемой в точке* (x_0,y_0), если ее приращение представимо в виде суммы главной части, линейной относительно приращений переменных, и бесконечно малой более высокого порядка, чем норма вектора $(\Delta x,\Delta y)$, составленного из приращений переменных:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right),$$

где A,B – числа, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$.

Главная линейная часть $df(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$ приращения $\Delta f(x_0,y_0)$ называется (*полным*) *дифференциалом* функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0).

Теорема (необходимое условие дифференцируемости).
Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), тогда
1) функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0);
2) $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости). Пусть функция $f(x, y)$ имеет обе частные производные в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), которые непрерывны в самой точке (x_0, y_0). Тогда функция дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то есть выполняется равенство

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\Delta y+o(\|h\|).$$

Так как последнее слагаемое в правой части является бесконечно малой более высокого порядка, чем норма вектора, составленного из приращений переменных, то при малых приращениях переменной последнее слагаемое в этой формуле можно отбросить, заменив точное равенство приближенным. Таким образом, получаем формулу для приближенных вычислений

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0, y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\Delta y.$$

Эта формула будет тем точнее, чем меньше приращения переменных.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{(2{,}98)^2+(4{,}01)^2}$.

Решение. Введем функцию $f(x)=\sqrt{x^2+y^2}$. Тогда нужно вычислить значение функции $f(2{,}98;4{,}01)$. Выберем близкую точку $x_0=3;\ y_0=4$, в которой значения функции, а также ее частных производных, вычисляются хорошо. Формула для приближенных вычислений примет вид

$$f(2{,}98;4{,}01)\approx f(3{,}4)+\frac{\partial f}{\partial x}(3{,}4)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(3{,}4)\cdot\Delta y.$$

Приращения переменных $\Delta x=2{,}98-3=-0{,}02;\ \Delta y=4{,}01-4=0{,}01$. Значение функции $f(3,4)=5$. Вычислим частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial x}(3{,}4)=\frac{3}{5}=0{,}6;\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}(3{,}4)=\frac{4}{5}=0{,}8$.

Подставляя все в формулу, получим

$f(2{,}98;4{,}01)\approx 5+0{,}6\cdot(-0{,}02)+0{,}8\cdot 0{,}01$ или $\sqrt{(2{,}98)^2+(4{,}01)^2}\approx 4{,}996$.

Производная сложной функции

Теорема. Пусть внешняя функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Внутренние функции $x = x(t), y = y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, причем $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$. Тогда сложная функция $f(t) = f(x(t), y(t))$ также дифференцируема в точке t_0 и ее производная вычисляется по формуле

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0).$$ Или более кратко

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}\ .$$

Теорема. Пусть внешняя функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0). Внутренние функции $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ дифференцируемы в точке (u_0,v_0), причем $x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$. Тогда сложная функция $f(u,v)=f(x(u,v),\,y(u,v))$ также дифференцируема в точке (u_0,v_0) и ее частные производные вычисляются по формулам

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};\qquad \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}}\,.$$

Пример 1. Для функции $z=\arcsin\frac{x}{y}$, $y=\sqrt{x^2+1}$ найти частную и полную производные по переменной x.

Решение. 1) Вычислим частную производную по переменной x, считая переменную y постоянной

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\arcsin\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}.$$

Если подставить $y=\sqrt{x^2+1}$, то получим $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$.

2) Применим формулу полной производной $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$.

Частная производная по переменной y равна

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\arcsin\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}.$$

При $y=\sqrt{x^2+1}$ частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Производная функции y по переменной x равна $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Подставляя эти выражения в формулу для полной производной, получаем

$$\frac{dz}{dx}=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{x^2+1}.$$

Пример 2. Доказать, что функция $u = \sin x + F(\sin y - \sin x)$ удовлетворяет равенству $\dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos x + \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos y = \cos x \cdot \cos y$.

Решение. Функция $F(\sin y - \sin x)$ является сложной. Внешняя функция $F(t)$, а внутренняя $t = \sin y - \sin x$. Вычислим частные производные функции u, считая производную от второго слагаемого по правилу сложной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x + \frac{dF}{dt} \cdot (\sin y - \sin x)'_x = \cos x - \frac{dF}{dt} \cdot \cos x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dF}{dt} \cdot \cos y.$$

Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos x + \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos y = \left(\dfrac{dF}{dt} \cdot \cos y \right) \cdot \cos x + \left(\cos x - \dfrac{dF}{dt} \cdot \cos x \right) \cdot \cos y =$

$$= \frac{dF}{dt} \cdot \cos y \cdot \cos x + \cos x \cdot \cos y - \frac{dF}{dt} \cdot \cos x \cdot \cos y = \cos x \cdot \cos y,$$

что и требовалось доказать.

Правила вычисления дифференциала

Рассмотрим функции нескольких переменных $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Справедливы следующие правила для вычисления дифференциалов:

1) $d(c \cdot u) = c \cdot du$, где $c = const$;

2) $d(u + v) = du + dv$;

3) $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$;

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Неявные функции и системы неявных функций

Рассматриваем случай, когда функция $y(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$.

Если предположить, что неявная функция $y(x)$ существует и функции $y(x)$ и $F(x,y)$ дифференцируемы, то формула для вычисления производной неявной функции выводится легко. В этом случае дифференцируема сложная функция $F(x)=F(x,y(x))$ и ее производная вычисляется по формуле полной производной $F'(x)=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$. Так как $F(x)\equiv 0$, то $F'(x)\equiv 0$ и $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$. Отсюда получаем формулу для вычисления производной неявной функции $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ или $\boxed{y'(x)=-\frac{F_x'}{F_y'}}$.

Пример. Найти производную функции $y(x)$, заданной уравнением $y^3 + 2y = 2x$.

Решение. Функция $y(x)$ задается неявно уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y) = y^3 + 2y - 2x$. Частные производные этой функции равны $F'_x = -2$, $F'_y = 3y^2 + 2$. Подставляя в формулу для вычисления производной функции, заданной неявно, получаем $y'(x) = \dfrac{2}{3y^2 + 2}$.

Пусть теперь функция $z(x,y)$ задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$. Предположим, что функции $z(x,y)$ и $F(x,y,z)$ дифференцируемы. Тогда дифференцируема сложная функция $F(x,y,z(x,y))$. Вычисляя ее частные производные по формуле сложной функции и учитывая, что функция тождественно равна нулю, получаем $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$. Отсюда следуют формулы для вычисления частных производных неявной функции $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

Пример. Найти частные производные функции $z(x,y)$, заданной неявно уравнением $e^z+z-x^2y+1=0$.

Решение. Функция $F(x,y,z)=e^z+z-x^2y+1$ задает неявно функцию $z(x,y)$. Вычислим ее частные производные: $F_x'=-2xy$, $F_y'=-x^2$, $F_z'=e^z+1$.

Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{2xy}{e^z+1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=\dfrac{x^2}{e^z+1}$.

Неявные функции от одной переменной, определяемые системой уравнений

Пусть система $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{cases}$

задает неявно две функции одного переменного $y(x)$, $z(x)$.

Подставим их в уравнения системы, получим

$$\begin{cases} F(x,y(x),z(x))=0, \\ \Phi(x,y(x),z(x))=0. \end{cases}$$

Дифференцируем эти тождества по переменной x по правилу производной сложной функции

$$\begin{cases} F'_x+F'_y\cdot y'(x)+F'_z\cdot z'(x)=0, \\ \Phi'_x+\Phi'_y\cdot y'(x)+\Phi'_z\cdot z'(x)=0. \end{cases}$$

Это система линейных уравнений относительно неизвестных $y'(x)$ и $z'(x)$:

$$\begin{cases} F'_y \cdot y'(x) + F'_z \cdot z'(x) = -F'_x, \\ \Phi'_y \cdot y'(x) + \Phi'_z \cdot z'(x) = -\Phi'_x. \end{cases}$$

то система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{D(F,\Phi)}{D(x,z)} : \frac{D(F,\Phi)}{D(y,z)}; \qquad z'(x) = \frac{dz}{dx} = -\frac{D(F,\Phi)}{D(y,x)} : \frac{D(F,\Phi)}{D(y,z)}.$$

Неявные функции нескольких переменных, определяемые системой уравнений

Рассмотрим функции $z_1 = z_1(x_1,\ldots,x_n), \ldots, z_m = z_m(x_1,\ldots,x_n)$, заданные системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(z_1,\ldots,z_m,x_1,\ldots,x_n) = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \\ F_m(z_1,\ldots,z_m,x_1,\ldots,x_n) = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Решением этой системы является набор функций, таких, что при подстановке их в систему все уравнения обращаются в тождество.

Введем понятие определителя Якоби – это определитель, составленный из частных производных

$$\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(z_1,\ldots,z_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ . & . & . \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{vmatrix}.$$

Вычисление частных производных функций $z_i = z_i(x_1,\dots,x_n)$, $i=1,\dots,m$, определяемых системой $(*)$, можно производить двумя способами.

Первый способ. Дифференцируем каждое уравнение системы $(*)$ по переменной x_l. По правилу сложной функции получаем

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x_l}+\frac{\partial F_i}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial z_2}{\partial x_l}+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial z_m}\cdot\frac{\partial z_m}{\partial x_l}+\frac{\partial F_i}{\partial x_l}=0 \quad (i=1,\dots,m).$$

Это система линейных уравнений относительно переменных $\frac{\partial z_1}{\partial x_l},\dots,\frac{\partial z_m}{\partial x_l}$.

Если определитель этой системы (якобиан) $\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(z_1,\dots,z_m)}\neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_l}=-\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(z_1,\dots,z_{k-1},x_l,z_{k+1},\dots,z_m)}:\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(z_1,\dots,z_m)}.$$

Второй способ. Можно брать дифференциалы от правой и левой частей каждого из уравнений системы $(*)$. Получим систему уравнений относительно переменных $dz_1,\ldots,dz_m$. Так как $dz_i = \frac{\partial z_i}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial x_n}\cdot dx_n$, то найдя дифференциалы, мы найдём частные производные.

Пример. Функции $u(x,y,z), v(x,y,z)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} uv = 3x - 2y + z, \\ v^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

1) Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$.

2) Доказать, что выполняется тождество $x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + z\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Решение. Возьмём дифференциалы от правой и левой частей каждого из уравнений системы:

$$\begin{cases} d(uv) = d(3x - 2y + z), \\ d(v^2) = d(x^2 + y^2 + z^2). \end{cases}$$

Получим относительно переменных dx, dy, dz систему уравнений:

$$\begin{cases} vdu + udv = 3dx - 2dy + dz, \\ vdv = xdx + ydy + zdz. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выражаем $dv = \frac{x}{v}dx + \frac{y}{v}dy + \frac{z}{v}dz$.

Учитывая формулу полного дифференциала $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$, находим частные производные $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{v}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{v}, \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{z}{v}$.

Подставив в первое уравнение системы дифференциал dv, получим

$$vdu = \left(3 - \frac{ux}{v}\right)dx - \left(2 + \frac{uy}{v}\right)dy + \left(1 - \frac{uz}{v}\right)dz.$$

Учитывая формулу полного дифференциала $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$,

находим частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3v - ux}{v^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2v + uy}{v^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v - uz}{v^2}$.

Для проверки пункта 2) подставим найденные частные производные в левую часть доказываемого тождества:

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x(3v - ux) - y(2v + uy) + z(v - uz)}{v^2} =$$

$$= \frac{v(3x - 2y + z) - u(x^2 + y^2 + z^2)}{v^2}.$$

Учитывая первоначальные уравнения системы, получаем требуемое тождество. Пункт 2) доказан.