Математическая логика

ОСНОВНЫЕ ТАВТОЛОГИИ

1. $\models A \to (B \to A)$
2. $\models (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
3. $\models A \to (B \to A \& B)$

4А. $\models A \& B \to A$

4Б. $\models A \& B \to B$

5А. $\models A \to A \vee B$

5Б. $\models B \to A \vee B$

6. $\models (A \to C) \to ((B \to C)) \to (A \vee B \to C))$
7. $\models (A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$
8. $\neg\neg A \to A$

ПРАВИЛО ВЫВОДА (MODUS PONENS):

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$ (MP).

ОПР.

ВЫВОДОМ НАЗЫВАЕТСЯ КОНЕЧНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ФОРМУЛ, КАЖДАЯ ИЗ КОТОРЫХ ЯВЛЯЕТСЯ АКСИОМОЙ ИЛИ ПОЛУЧАЕТСЯ ИЗ НЕКОТОРЫХ ПРЕДЫДУЩИХ ФОРМУЛ ПО ПРАВИЛУ ВЫВОДА.

ОПР.

ФОРМУЛА А НАЗЫВАЕТСЯ ВЫВОДИМОЙ В ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ ИЛИ ТЕОРЕМОЙ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (ОБОЗНАЧЕНИЕ $|=A$), ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ВЫВОД, В КОТОРОМ ПОСЛЕДНЯЯ ФОРМУЛА ЕСТЬ А.

ПРИМЕР: $|= A \to A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) В АКСИОМЕ 2 ВОЗЬМЁМ $B = (A \to A)$ И $C = A$

2) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$

3) $A \to (A \to A)$ (1 АКСИОМА)

4) $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ (2,3 MP)

5) $A \to (A \to A)$ (1 АКСИОМА)

6) $A \to A$ (4,5 MP)

ВЫВОДИМОСТЬ ИЗ ГИПОТЕЗ

ОПР.

ПУСТЬ Г — НЕКОТОРОЕ МНОЖЕСТВО ФОРМУЛ, НАЗЫВАЕМЫХ ГИПОТЕЗАМИ. ВЫВОДОМ ИЗ Г НАЗЫВАЕТСЯ КОНЕЧНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ФОРМУЛ, КАЖДАЯ ИЗ КОТОРЫХ ЛИБО ПРИНАДЛЕЖИТ МНОЖЕСТВУ Г, ЛИБО ЯВЛЯЕТСЯ АКСИОМОЙ, ЛИБО ПОЛУЧАЕТСЯ ИЗ ПРЕДЫДУЩИХ ФОРМУЛ ПО ПРАВИЛУ ВЫВОДА.

ОПР.

ФОРМУЛА А НАЗЫВАЕТСЯ ВЫВОДИМОЙ ИЗ МНОЖЕСТВА ФОРМУЛ Г (ОБОЗНАЧЕНИЕ Г |= А), ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ВЫВОД ИЗ Г, В КОТОРОМ ПОСЛЕДНЯЯ ФОРМУЛА ЕСТЬ А.

ПРАВИЛА ВВЕДЕНИЯ И

	Введение	Удаление
→	Г,А|=В;Г|=А→В (теорема о дедукции)	А,А→В|=В правило m.p.
&	А,В|=А&В	А&В|=А А&В|=В
∨	А|=А∨В В|=А∨В	Г,А|=С; Г,В|=С; Г,А∨В|=С
¬	Г,А|=В; Г,А|=¬В; Г|=¬Аб приводит к нелепому	¬¬А|=А, снятие 2-го отрицания А, ¬А|=В, слабое удаление

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

ЕСЛИ $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, ТО $\Gamma \vdash (A \to B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

ИНДУКЦИЯ ПО ДЛИНЕ ВЫВОДА ФОРМУЛЫ B ИЗ МНОЖЕСТВА ГИПОТЕЗ $\Gamma \cup \{A\}$. ЕСЛИ B ЯВЛЯЕТСЯ АКСИОМОЙ ИЛИ ПРИНАДЛЕЖИТ Г, ТО:

B

$B \to (A \to B)$ (1)

$A \to B$ (MP)

ЕСЛИ $B = A$, ТО ИСПОЛЬЗУЕМ ВЫВОД $A \to A$.

ПУСТЬ B ПОЛУЧЕНА ИЗ C И $C \to B$ ПО MODUS PONENS. ИМЕЕМ $\Gamma \vdash (A \to C)$ И $\Gamma \vdash (A \to (C \to B))$ ПО ПРЕДПОЛОЖЕНИЮ ИНДУКЦИИ. СОЕДИНЯЕМ ЭТИ ДВА ВЫВОДА И ДОСТРАИВАЕМ ТАК:

$(A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$ (2)

$(A \to C) \to (A \to B)$ (MP)

$A \to B$ (MP)

ИСПОЛЬЗУЯ ПРИВЕДЕННЫЕ ВЫШЕ АКСИОМЫ И ТЕОРЕМЫ ПРИВЕДЕМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СЛЕДУЮЩИХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ:

9) $A \rightarrow A$

10) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C)(A \rightarrow C))$

11) $(A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ $\qquad A \sim B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

12) $((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

13) $(A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C$

14) $(A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$

15) $((A \wedge B) \sim (B \wedge A)$

16) $((A \vee B) \sim (B \vee A)$

17) $(A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

18) $(A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

19) $(\neg (A \vee B) \sim (\neg A \wedge \neg B)$

20) $\neg (A \wedge B) \sim (\neg A \vee \neg B)$
21) $\neg (A \rightarrow B) \sim (\neg A \vee B)$
22) $\neg \neg A \sim A$
23) $A \vee \neg A$
24) $\neg(A \& \neg A)$
25) $(A \rightarrow B) \sim (\neg A \wedge B)$
26) $(A \vee B) \sim (\neg (\neg A \wedge \neg B))$
27) $(A \wedge B) \sim \neg (\neg A \vee \neg B)$
28) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \sim (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
29) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \sim ((A \& B) \rightarrow C)$

ЗАКОН ТОЖДЕСТВА 9) $\models A \to A$

1. $A \to (A \to A)$ СХ. 1;
2. $(A \to (A \to A)) \to ((A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$, ГДЕ $B = A \to A$, $C = A$, СХ. АКС. 2;
3. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$ ПОЛУЧЕНО ИЗ 1 И 2;
4. $A \to ((A \to A) \to A))$ СХ. АКС. 1;
5. $A \to A$ ИЗ 3 И 4 ПОЛУЧИЛИ 5;

10) $(A \to B) \to ((B \to C)(A \to C))$

ЕСЛИ ДОКАЖЕМ ЧТО СУЩЕСТВУЮТ :

$A \to B, B \to C, A \vdash C$
$A \to B, B \to C \vdash A \to C$
$A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$
ТО ПРИМЕНИВ ИЗ ТАБЛИЦЫ ВВЕДЕНИЕ ИМПЛИКАЦИИ(ВВ. $\to$) 3 РАЗА , (СВЕРХУ ВНИЗ) ПОЛУЧИМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) A – ГИПОТЕЗА
2) $A \to B$ – ГИПОТЕЗА
3) ПРИМЕНЯЯ К ПУНКТАМ 1 И 2 ПРАВИЛО ВЫВОДА (1,2 MP) ПОЛУЧИМ B
4) $B \to C$ (ГИПОТЕЗА)
5) C (3,4 MP)

11) $A \to (\neg A \to B)$

ТРЕБУЕТСЯ ДОКАЗАТЬ $A \vdash (\neg A \to B)$

1) $A, \neg A \vdash B$ (СЛАБОЕ УДАЛЕНИЕ $\neg$)

2) $A \vdash (\neg A \to B)$ (ВВ. $\to$)

3) $A \to (\neg A \to B)$ (ВВ. $\to$)

A ~ B: (A → B) & (B → A)

$\vdash$ A & (B & C) ~ (A & B) & C

1) $\vdash$ A & (B & C) → (A & B) & C
2) $\vdash$ (A & B) & C → A & (B & C)

ДОКАЖЕМ 1-ОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ:
ПУСТЬ A & (B & C) $\vdash$ (A & B) & C ТОГДА

1) A & (B & C) $\vdash$ A (УДАЛЕНИЕ &)
2) A & (B & C) $\vdash$ B & C (УДАЛЕНИЕ &)
3) B & C $\vdash$ B (УДАЛЕНИЕ &)
4) B & C $\vdash$ C (УДАЛЕНИЕ &)
5) A & (B & C) $\vdash$ B (СЕЧЕНИЕ 2,3)
6) A & (B & C) $\vdash$ A & B (СЕЧЕНИЕ 1,3) A, B $\vdash$ A & C
7) A & (B & C) $\vdash$ C (СЕЧЕНИЕ 2,4)
8) A & B, C $\vdash$ (A & B) & C (ВВ. &)
9) A & (B & C) $\vdash$ (A & B) & C (СЕЧЕНИЕ)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 2-ОГО УТВЕРЖДЕНИЯ ПОЛУЧАЕМ В 8-ОМ ПУНКТЕ

12) $(A \to B) \to (\neg A \to \neg B)$

1) $A, A \to B, \neg B \vdash B$ (УДАЛЕНИЕ $\to$, MP)
2) $A, A \to B, \neg B \vdash \neg B$ (УДАЛЕНИЕ $\to$, MP)
3) $A \to B, \neg B \vdash \neg A$
4) $A \to B \vdash (\neg B \to \neg A)$ (ВВ. $\to$)
5) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ (ВВ. $\to$)

13) A&(B&C) ~ (A&B)&C

1 ЧАСТЬ : ⊢ A&(B&C) → (A&B)&C
2 ЧАСТЬ : ⊢ (A&B)&C → A&(B&C)
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1 ЧАСТИ:
1.A&(B&C) ⊢ A (& УД.)
2.A&(B&C) ⊢ B (& УД.)
3.B&C ⊢ B (& УД.)
4.B&C ⊢ C (& УД.)
5.A&(B&C) ⊢ B (2, 3 СЕЧЕНИЕ)
6.A&(B&C) ⊢ A&B (1, 5 И A, B ⊢ A&B – СЕЧЕНИЕ)
7.A&(B&C) ⊢ C (2,4 – СЕЧЕНИЕ)
8.A&(B&C) ⊢ (A&B)&C (7, 6 – СЕЧЕНИЕ)
9. ⊢ A&(B&C) → (A&B)&C (ВВ. →)
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 2 ЧАСТИ: АНАЛОГИЧНО ПЕРВОЙ

14)A V (B V C) ~ (A V B) V C

А) ⊢ A V (B V C) → (A V B) V C
Б) ⊢ (A V B) V C → A V (B V C)
A V (B V C) ⊢ (A V B) V C
1) A ⊢ A V B (ВВ. V)
2) A V B ⊢ (A V B) V C (ВВ. V)
3) A ⊢ (A V B) V C (СЕЧЕНИЕ 1,2)
4) B ⊢ A V B (ВВ. V)
5) B ⊢ (A V B) V C (2,4 СЕЧЕНИЕ)
6) C ⊢ (A V B) V C (ВВ. V)
7) B V C ⊢ (A V B) V C (УДАЛЕНИЕ V)
8) A V (B V C) ⊢ (A V B) V C (УДАЛЕНИЕ V)
9) ВВЕДЕНИЕ →
10) A V (B V C) ⊢ (A V B) V C (СЕЧЕНИЕ)

15)(A & B) ~ (B & A)

$\vdash ((A \& B) \rightarrow (B \& A) \& \vdash (B \& A) \rightarrow (A \& B))$

А) $\vdash (A \& B) \rightarrow (B \& A)$

Б) $\vdash (B \& A) \rightarrow (A \& B)$

$(A \& B) \vdash (B \& A)$

$A \& B \vdash A$ (УД. &)

2) $A \& B \vdash B$ (УД. &)

3) $B, A \vdash B \& A$ (ВВ. &)

4) $A \& B \vdash B \& A$ (1, 2, 3 – Т.7)

16)(A V B) ~ (B V A)

$\vdash$ (A V B → B V A) & (B V A → A V B)

А) $\vdash$ A V B → B V A

Б) $\vdash$ B V A → A V B

A V B $\vdash$ B V A

1) A $\vdash$ B V A (ВВ. V)

2) B $\vdash$ B V A (ВВ. V)

3) A V B $\vdash$ B V A (1 & 2, УД. V)

17) A & (B V C) ~ (A & B) V (A & C)

А) A & (B V C) ├ (A & B) V (A & C)

Б) (A & B) V (A & C) ├ A & (B V C)

ДОКАЖЕМ ЧАСТЬ А:

1) A, B ├ A & B

2) A & B ├ (A & B) V (A & C)

3) A, B ├ (A & B) V (A & C)

4) A, C ├ A & C

5) A & C ├ (A & B) V (A & C)

6) A, C ├ (A & B) V (A & C)

7) A, B V C ├ (A & B) V (A & C)

8) A & (B V C) ├ A

9) A & (B V C) ├ (B V C)

10) A & (B V C) ├ (A & B) V (A & C)

ДОКАЖЕМ ЧАСТЬ Б ПО СЛЕДУЮЩЕЙ СХЕМЕ:

$(A \& B) \vee (A \& C) \vdash A$ (*)

$(A \& B) \vee (A \& C) \vdash B \vee C$ (**)

$A, B \vee C \vdash A \& (B \vee C)$ (ВВ.&) ДАЛЕЕ ПРИМЕНЯЕМ Т.7.

ДОКАЖЕМ(*):

1) $A \& B \vdash A$
2) $A \& C \vdash A$
3) $(A \& B) \vee (A \& C) \vdash A$

(**):

4) $A \& B \vdash B$
5) $B \vdash B \vee C$
6) $A \& B \vdash B \vee C$
7) $A \& B \vdash C$
8) $C \vdash B \vee C$
9) $A \& C \vdash B \vee C$
10) $(A \& B) \vee (A \& C) \vdash B \vee C$
11) $A, B \vee C \vdash A \& (B \vee C)$
12) $(A \& B) \vee (A \& C) \vdash A \& (B \vee C)$

18) A ∨ (B & C) ~ (A ∨ B) & (A ∨ C)

А) ├ A ∨ (B & C) → (A ∨ B) & (A ∨ C)
Б) ├ (A ∨ B) & (A ∨ C) → A ∨ (B & C)
ДОКАЖЕМ ПО СХЕМЕ, КАК В ПРЕДЫДУЩЕМ СЛУЧАЕ:
A ∨ (B & C) ├ A ∨ B (*)
A ∨ (B & C) ├ A ∨ C (**)
A ∨ B, A ∨ C ├ (A ∨ B) & (A ∨ C) (***) (ВВ. &)
ДОКАЖЕМ(*):
1) A ├ A ∨ B
2) B & C ├ B
3) B ├ A ∨ B
4) B & C ├ A ∨ B
5) A ∨ (B & C) ├ A ∨ B
(**):
6) A ├ A ∨ C
7) B & C ├ C
8) C ├ A ∨ C
9) B & C ├ A ∨ C
10) A ∨ (B & C) ├ A ∨ C
11) A ∨ B, A ∨ C ├ (A ∨ B) & (A ∨ C)
12) A ∨ (B & C) ├ (A ∨ B) & (A ∨ C)

ДОКАЖЕМ ЧАСТЬ Б: $\vdash (A \vee B) \& (A \vee C) \rightarrow A \vee (B \& C)$

1) $A \vdash A \vee (B \& C)$
2) $B, C \vdash B \& C$
3) $B \& C \vdash A \vee (B \& C)$
4) $B, C \vdash A \vee (B \& C)$
5) $A \vee B, C \vdash A \vee (B \& C)$
6) $A \vee B, A \vee C \vdash A \vee (B \& C)$
7) $(A \vee B) \& (A \vee C) \vdash A \vee C$
8) $(A \vee B) \& (A \vee C) \vdash A \vee B$
9) $(A \vee B) \& (A \vee C) \vdash A \vee (B \& C)$

19) ¬ (A ∨ B) ~ (¬ A & ¬ B)

А) ├ ¬ (A ∨ B) → (¬ A & ¬ B)
Б) ├ (¬ A & ¬ B) → ¬ (A ∨ B)

ДОКАЖЕМ ЧАСТЬ А:

1) ¬ (A ∨ B) , A ├ A ∨ B
2) ¬ (A ∨ B) , A ├ ¬ (A ∨ B)
3) ¬ (A ∨ B) ├ ¬ A
4) ¬ (A ∨ B) , B ├ A ∨ B
5) ¬ (A ∨ B) , B ├ ¬ (A ∨ B)
6) ¬ (A ∨ B) ├ ¬ B
7) ¬ A ,¬ B ├ ¬ A & ¬ B
8) 3,6,7 Т.7 → 9
9) ¬ (A ∨ B) ├ ¬ A & ¬ B

ЧАСТЬ Б:

1) ¬ A & ¬ B, A ├ A
2) ¬ A & ¬ B, A ├ ¬ A
2.1) A, ¬ A ├ ¬ (A ∨ B)
3) ¬ A & ¬ B, A ├ ¬ (A ∨ B)
4) ¬ A & ¬ B, B ├ B
5) ¬ A & ¬ B, B ├ ¬ B
6) ¬ A & ¬ B, B ├ ¬ (A ∨ B)
7) ¬ A & ¬ B, (A ∨ B) ├ ¬ (A ∨ B)
8) ¬ A & ¬ B, (A ∨ B) ├ A ∨ B
9) ¬ A & ¬ B ├ ¬ (A ∨ B)

20) ¬ (A & B) ~ (¬ A ∨ ¬ B)

А) ├ ¬ (A & B) → (¬ A ∨ ¬ B)
Б) ├ (¬ A ∨ ¬ B)→ ¬ (A & B)

ДОКАЖЕМ ЧАСТЬ А:

1) ¬ (A & B), A, B ├ ¬ (A & B)
2) ¬ (A & B), A, B ├ A & B
3) ¬ (A & B), B ├ ¬ A
4) ¬ A ├ ¬ A ∨ ¬ B
5) ¬ (A & B), B ├ ¬ A ∨ ¬ B
6) ¬ (A & B), ¬ B ├ ¬ A ∨ ¬ B
7) ¬ (A & B), B∨ ¬ B ├ ¬ A ∨ ¬ B
8) B ├ ¬ B
9) ¬ (A & B) ├ ¬ A ∨ ¬ B

ЧАСТЬ Б:

1) ¬ A ├ A & B
2) ¬ A , A & B ├ A
3) ¬ A ├ ¬ (A & B)
4) ¬ B, (A & B) ├ B
5) ¬ B, (A & B) ├ ¬ B
6) ¬ B ├ ¬ (A & B
7) (¬ A ∨ ¬ B) ├ ¬ (A & B)

22) |= ¬¬A~ A

I. |=¬¬A ~ A
II. |=A ~ ¬¬ A
ЧАСТЬ I
1. ¬¬A|=A (УДАЛЕНИЕ ¬)
2. |=¬¬A ~ A (ВВЕДЕНИЕ ¬)
ЧАСТЬ II
1. A, ¬A |=A (СВОЙСТВО ВЫВОДИМОСТИ)
2. A, ¬A |=¬A (ВВЕДЕНИЕ ¬ , ПРИВЕДЕНИЕ К НЕЛЕПОСТИ)
3. A|=¬¬A (ВВЕДЕНИЕ ¬)
4. |=A ~ ¬¬A (ВВЕДЕНИЕ ¬)

23) A∨¬A

1. ¬A, ¬ (A∨¬A) |=¬A∨A (ВВЕДЕНИЕ ∨)
2. ¬A, ¬ (A∨¬A) |=¬(A∨¬A) (СВОЙСТВО ВЫВОДИМОСТИ)
3. ¬ (A∨¬A) |=¬¬A (ВВЕДЕНИЕ ¬)
4. ¬¬A|=A (АКСИОМА №8)
5. ¬(A∨¬A)|=A (СЕЧЕНИЕ (3,4))

5.1 A ~ A∨¬A

6. ¬(A∨¬A)|= A∨¬A
7. ¬ (A∨¬A)|= ¬ (A∨¬A)
8. |=¬¬ (A∨¬A) (ВВЕДЕНИЕ ¬)

? АКСИОМА

9. |=A∨¬A

24) |= ¬ (A&¬A)

1. |= ¬ (A&¬A)~ ¬A V ¬A
2. |= A V ¬A (ПО ФОРМУЛЕ №23)
3. |=¬ (A&¬A)

25) $\models (A \to B) \sim \neg A \vee B$

I. $A \to B \models \neg A \vee B$

II. $\neg A \vee B \models A \to B$

ЧАСТЬ I

1. $A, A \to B \models B$

1.1 $B \models \neg A \vee B$

2. $A \to B, A \models \neg A \vee B$ (СЕЧЕНИЕ (1, 1.1))

3. $\neg A \models \neg A \vee B$

4. $A \to B, A \vee \neg A \models \neg A \vee B$ (УДАЛЕНИЕ $\vee$ (2,3))

5. $\models A \vee \neg A$ (ПО ФОРМУЛЕ №23)

6. $A \to B \models \neg A \vee B$