Решение уравнений математической физики

методом д'Аламбера

16.24 Найти решение уравнения:

$$u''_{tt} = u''_{xx} \qquad -\infty < x < +\infty$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u\big|_{t=0} = \frac{\sin x}{x}$$

$$u'_t\big|_{t=0} = 0$$

План решения:

1. Определяем тип уравнения.
2. Исходя из начальных условий и формулы Д’Аламбера, определяем функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$.
3. Получаем решение уравнения $u(x,t)$.
4. Строим графики прямой и обратной волн, а также их суммарного воздействия для различных моментов времени t.

Решение

1. Приведем уравнение к следующему виду:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\cdot[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$$

где $a=1$, $b=0$, $c=-1$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\cdot[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$$ - уравнение гиперболического типа

Т.е. мы имеем задачу Коши для однородного (поскольку отсутствует внешняя среда) волнового уравнения.

2. Уравнение Д'Аламбера имеет следующий вид:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\cdot[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$$

Определим функции ϕ(x) и ψ(x).

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x) &= u\big|_{t=0}\\ \psi(x) &= u_t'\big|_{t=0}\end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{\sin x}{x}\\ \psi(x) &= 0\end{aligned}$$

Воспользуемся указанной ранее формулой Д'Аламбера, подставив в нее заданные функции (учтем, что ***a = 1***):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi =$$

$$= \left|\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{\sin x}{x}\\ \psi(x) &= 0\\ a &= 1\end{aligned}\right| = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(x-t)}{x-t}+\frac{\sin(x+t)}{x+t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x\cos t-\cos x\sin t}{x-t}+\frac{\sin x\cos t+\cos x\sin t}{x+t}\right]$$

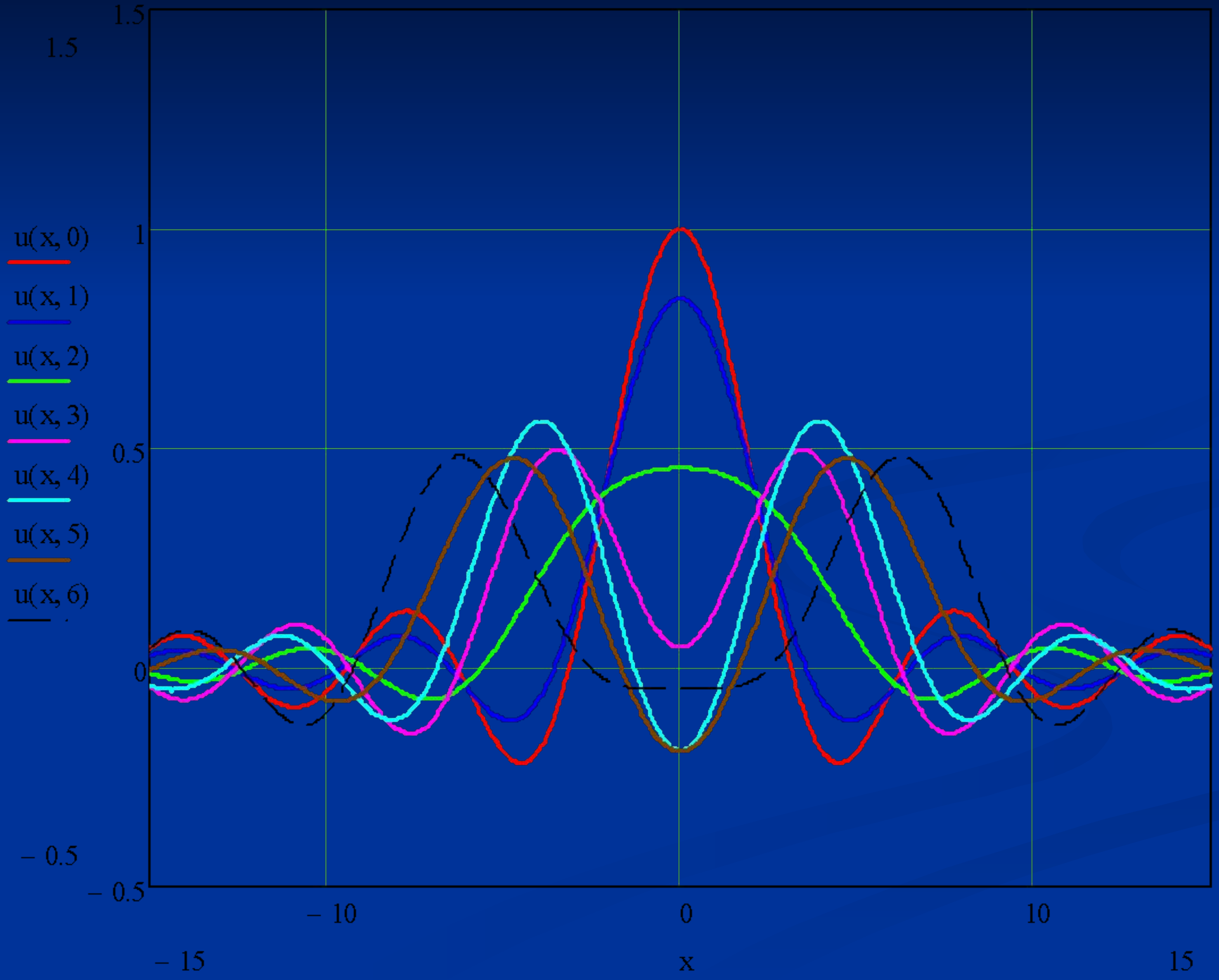
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin x\cos t-\cos x\sin t}{x-t}+\frac{\sin x\cos t+\cos x\sin t}{x+t}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(x+t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)+(x-t)(\sin x\cos t+\cos x\sin t)}{x^2-t^2}\right]=$$

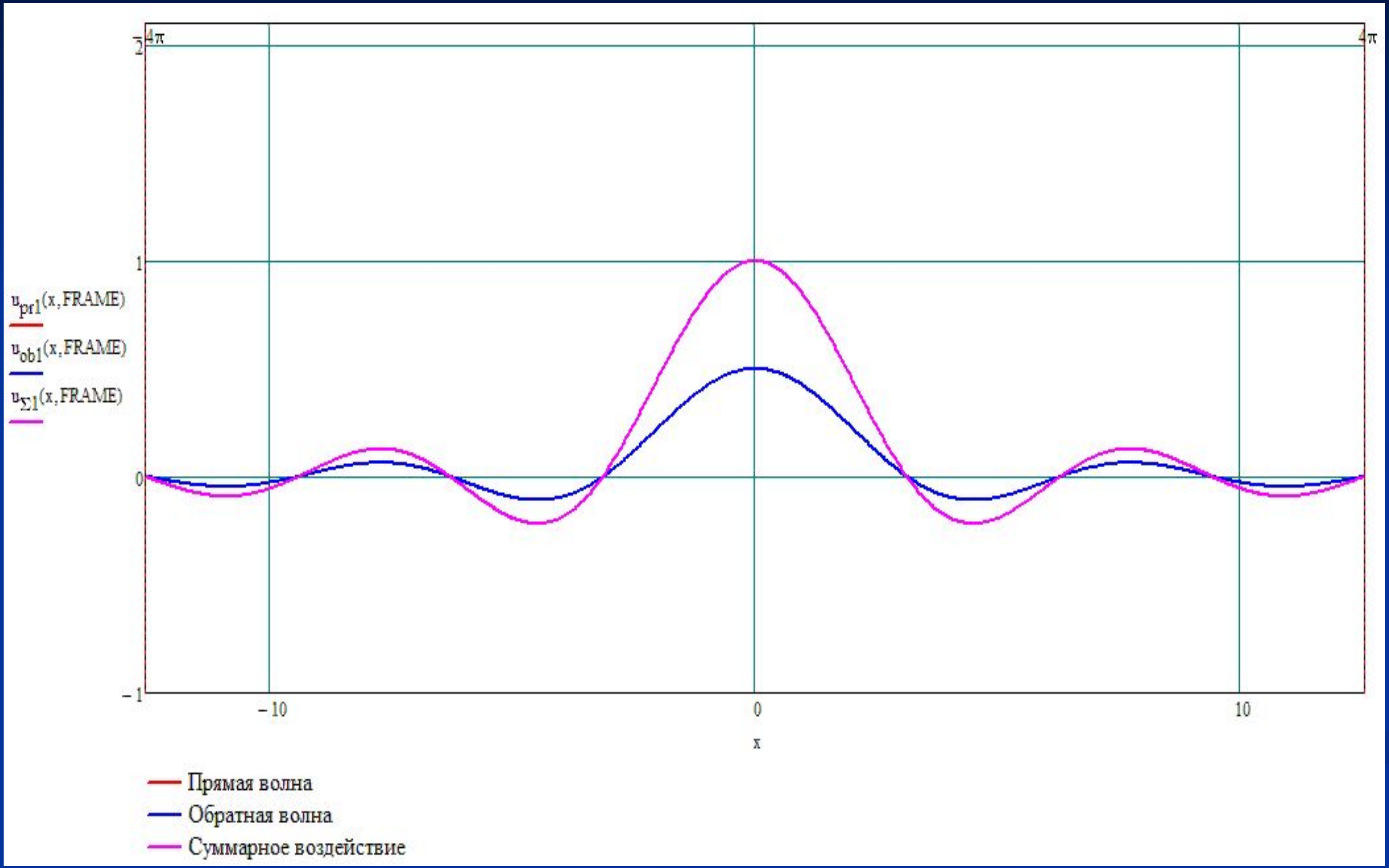
$$=\frac{1}{2(x^2-t^2)}\left[2x\sin x\cos t-2t\cos x\sin t\right]=$$

$$=\frac{x\sin x\cos t-t\cos x\sin t}{x^2-t^2}$$

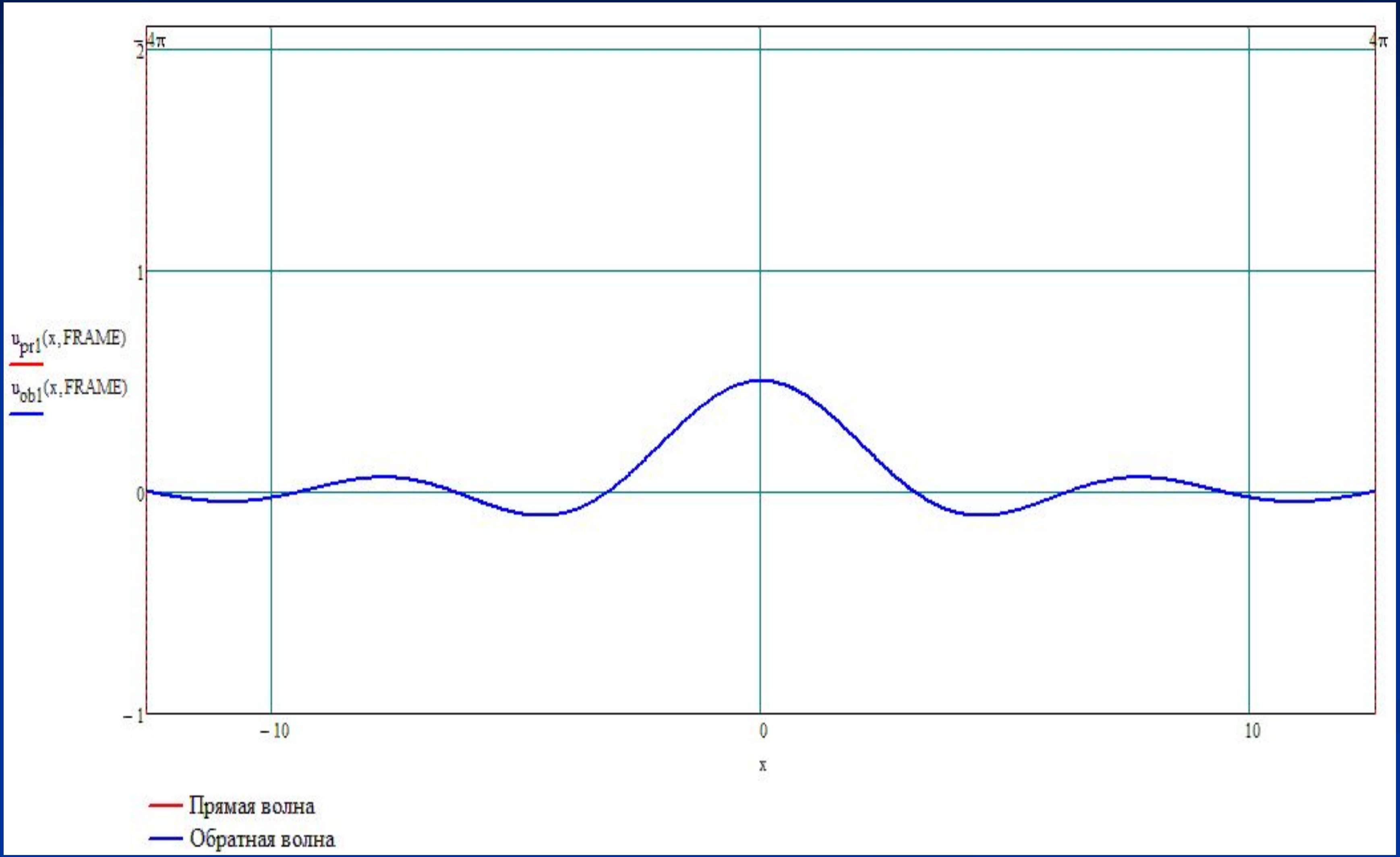
Решением уравнения является семейство кривых



Анимация движения прямой и обратной волн, их суммарное воздействие



Анимация движения прямой и обратной волн



Анимация колебания струны