

ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

Работу выполнили студенты 101 группы:
Лебедева Анна, Богданович Диана, Чмель
Кристина, Желубовский Владислав

Функция 1



$$y = \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$$

1) Область определения функции.

$$\square \square D(y): \sqrt{4 - x^2} \geq 0 \Rightarrow x \in (-2; 2)$$

2) Чётность и нечётность.

$$\square \quad \square \quad y(-x) = \frac{4}{\sqrt{4 - (-x)^2}} = \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}} = y(x) \Rightarrow$$

функция четная

3) Точки пересечения с осями.

▣ А) с осью Ox , $y=0$

$\frac{4}{\sqrt{4-x^2}} = 0$ – корней нет \Rightarrow с осью Ox нет пересечения (в данной точке функция не определена).

▣ Б) с осью Oy , $x=0$

$$\frac{4}{\sqrt{4-0}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2, \text{ т. е. точка } A(0;2).$$

4) Исследование функций на непрерывность. Асимптоты.

▣ А) $y(0 - 0) = y(0 + 0) = +\infty \Rightarrow$ функция имеет бесконечный разрыв.

▣ Б) Вертикальные асимптоты: прямые $x = -2$ и $x = +2$, т. к. $\lim_{x \rightarrow -2+0} y(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\frac{4}{0} \right] = +\infty$

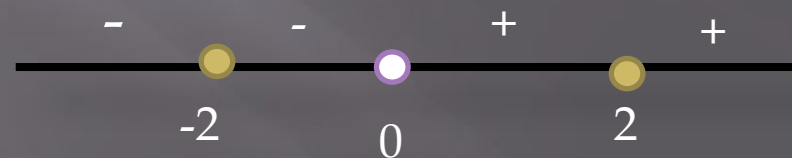
$$\lim_{x \rightarrow 2+0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\frac{4}{0} \right] = +\infty$$

5) Промежутки монотонности и точки экстремума.

$$\begin{aligned} \square \quad y' &= \left(\frac{4}{\sqrt{4-x^2}} \right)' = \frac{-4 \left(\frac{1}{2} (4-x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' * (-2x)}{4-x^2} = \frac{4x * (4-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{4-x^2} = \\ &= \frac{4x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

Найдем точки, в которых первая производная равна нулю или $\neg \exists: y' \neq 0 \quad \forall x$ и $D(y)$;

$y' \neg \exists$ при $x_1 = 2$ или $x_2 = -2$



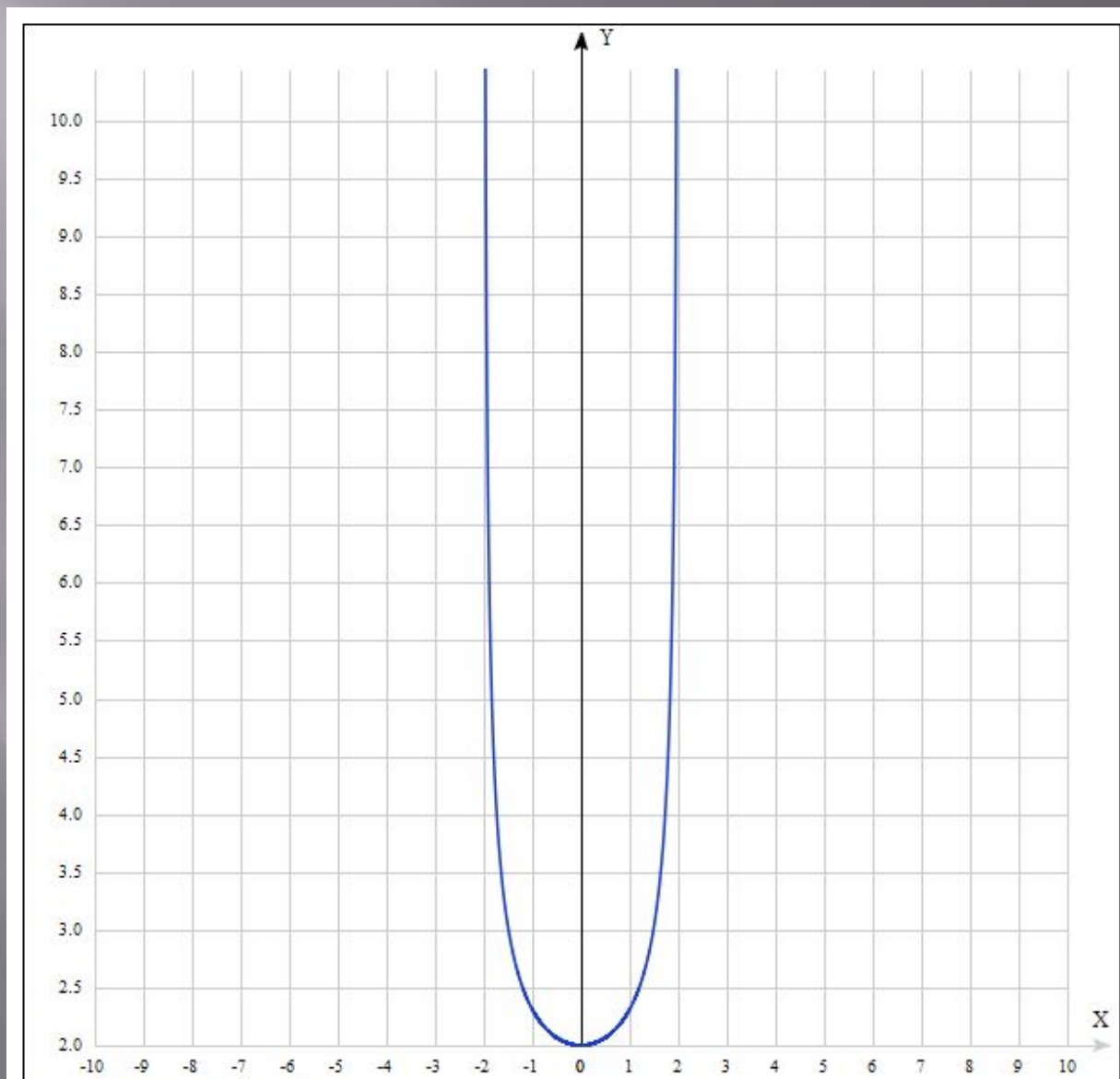
Т. о. точка 0 – точка минимума.

6) Промежутки выпуклости вверх (вниз), точки перегиба.

- $y'' = \frac{(8x-2)\sqrt{4-x^2}}{(4-x^2)^4}$, $y''=0 \Rightarrow (8x-2)\sqrt{4-x^2}=0 \Rightarrow$
□ $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 2, x_3 = -2$
- $y'' \neq 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$
- Таким образом $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 2, x_3 = -2$ – критические точки 2-го рода.

x	$(-\infty; -2)$			$(2; +\infty)$
$y''(x)$	-	-	+	+
$y(x)$	\cap	\cap	\cup	\cup

7) График функции



Функция 2

$$y = x * \operatorname{arctg} x$$

1) Область определения функции

- ▣ $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$

2) Чётность и нечётность.

$$\square y(-x) = (-x) * \operatorname{arctg}(-x) = (-x) * (-\operatorname{arctg}x) = x * \operatorname{arctg}x = y(x) \Rightarrow$$

функция чётная

3) Точки пересечения с осями.

▣ А) с осью Ox , $y=0$

$x * \operatorname{arctg}x = 0 \Rightarrow x=0$ или $\operatorname{arctg}x=0 \Rightarrow x=0$,
т.е. точка $A(0;0)$;

▣ Б) с осью Oy , $x=0$

$0 * \operatorname{arctg}0 = 0$, т. е. та же точка $A(0;0)$.

4) Исследование функций на непрерывность. Асимптоты.

▣ А) $y(0 - 0) = y(0 + 0) = +\infty \Rightarrow$ функция имеет бесконечный разрыв.

▣ Б) Горизонтальные асимптоты: не существует, т. к.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x * \operatorname{arctg} x) = \infty$, значит, горизонтальной асимптоты слева не существует

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x * \operatorname{arctg} x) = \infty$, значит, горизонтальной асимптоты справа не существует

▣ В) Наклонные асимптоты: посчитаем предел функции $x * \operatorname{arctg} x$, делённой на x при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x * \operatorname{arctg} x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg} x) = -\frac{\pi}{2}$, значит, уравнение горизонтальной асимптоты слева: $y = -\frac{\pi x}{2}$

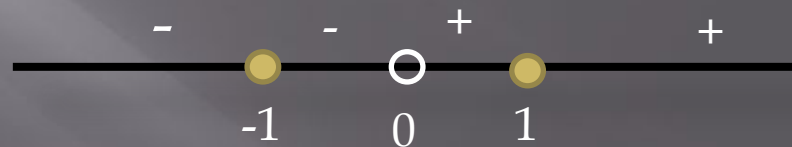
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x * \operatorname{arctg} x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{2}$, значит, уравнение горизонтальной асимптоты справа: $y = \frac{\pi x}{2}$

5) Промежутки монотонности и точки экстремума.

$$\square y' = (x * \operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + x * \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$$

Найдем точки, в которых первая производная равна нулю или $\neg \exists$: $y' = 0$ при $x = 0$

$y' \neg \exists$ при $x_1 = 1$ или $x_2 = -1$



Т. о. функция возрастает на промежутке $(0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0) \Rightarrow x = 0$ – точка минимума

$$f(0) = 0$$

6) Промежутки выпуклости вверх (вниз), точки перегиба.

□ $y'' = \frac{2}{(1+x^2)^2}$, $y'' \neq 0 \Rightarrow$ критических точек не существует

7) График функции.

