ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

Работу выполнили студенты 101 группы:
Лебедева Анна, Богданович Диана, Чмель Кристина, Желубовский Владислав

Функция 1

$$y = \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$$

1)Область определения функции.

- ▣ $D(y)$: $\sqrt{4-x^2} \geq 0$ => $x \in (-2;2)$

2)Чётность и нечётность.

-
- $y(-x)=\frac{4}{\sqrt{4-(-x)^2}}=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}=y(x)$ => функция четная

3)Точки пересечения с осями.

- А) с осью Ох, y=0

$\frac{4}{\sqrt{4-x^2}} = 0$ – корней нет => с осью Ох нет пересечения (в данной точке функция не определена).

- Б) с осью Оу, x=0

$\frac{4}{\sqrt{4-0}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2$, т. е. точка А(0;2).

4)Исследование функций на непрерывность. Асимптоты.

- А) $y(0-0) = y(0+0) = +\infty$ => функция имеет бесконечный разрыв.
- Б) Вертикальные асимптоты: прямые x= -2 и x=+2, т. к. $\lim_{x\to -2+0} y(x) = \lim_{x\to -2} \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} = [\frac{4}{0}] = +\infty$

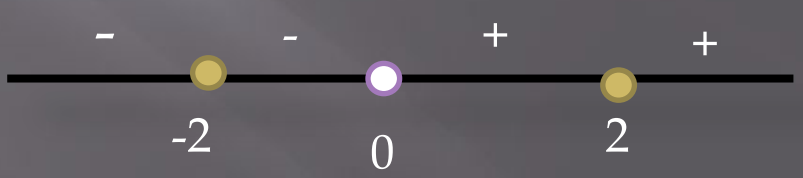
$$\lim_{x\to 2+0} y(x) = \lim_{x\to 2} \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} = [\frac{4}{0}] = +\infty$$

5)Промежутки монотонности и точки экстремума.

-
- $y'=\left(\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\right)' = \frac{-4\left(\frac{1}{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}} * (-2x)\right)}{4-x^2} = \frac{4x*(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{4-x^2} =$

$$= \frac{4x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

Найдем точки, в которых первая производная равна нулю или $\neg\exists$: $y' \neq 0\ \forall x$ и $D(y)$;



$y'\ \neg\exists$ при $x_1=2$ или $x_2=-2$

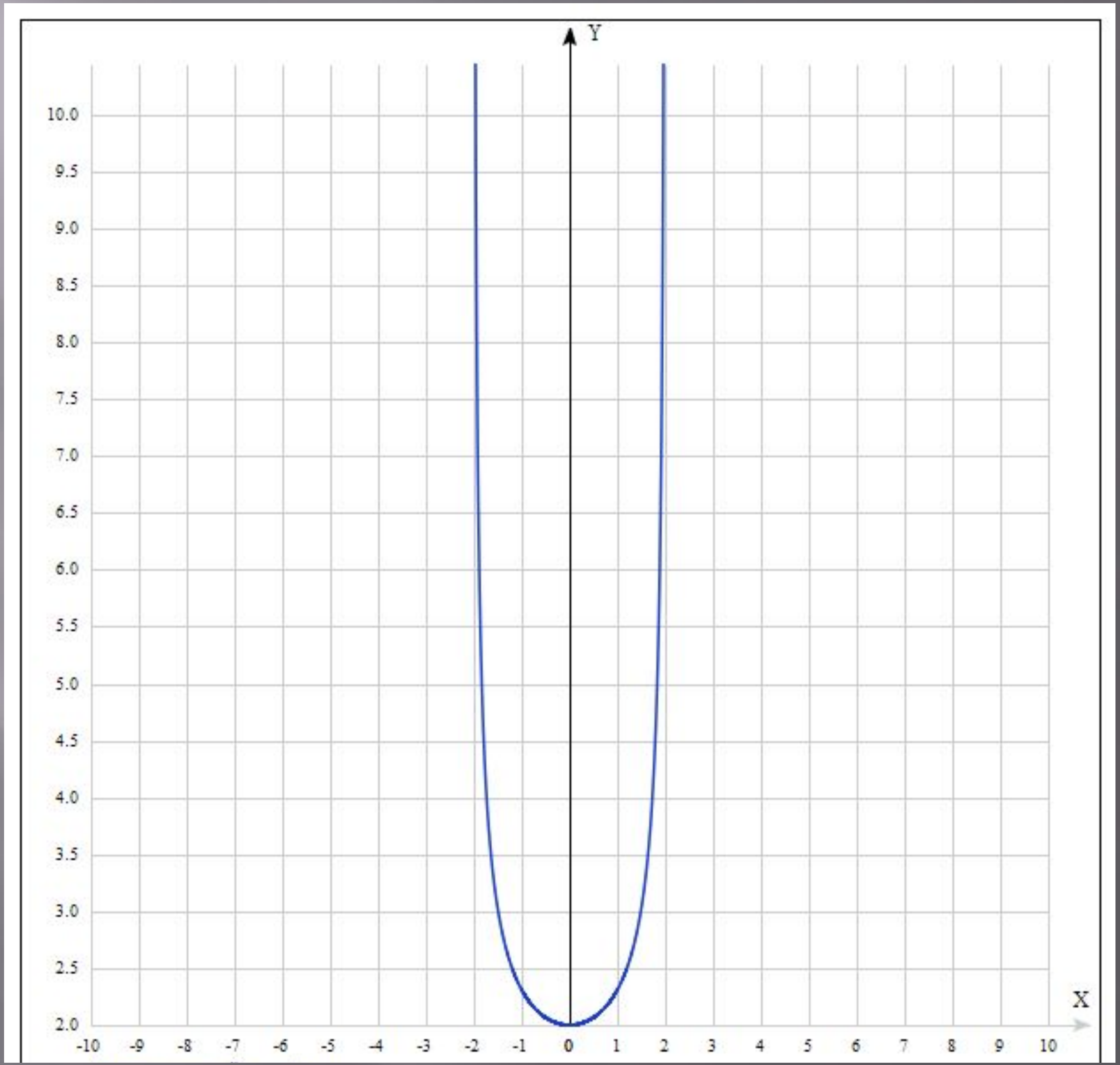
Т. о. точка 0 – точка минимума.

6) Промежутки выпуклости вверх (вниз), точки перегиба.

- $y''=\frac{(8x-2)\sqrt{4-x^2}}{(4-x^2)^4}$, $y''=0 \Rightarrow (8x-2)\sqrt{4-x^2}=0 \Rightarrow$ $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=2$, $x_3=-2$
- $y''\neq 0 \Rightarrow x_1=2$, $x_2=-2$
- Таким образом $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=2$, $x_3=-2$ – критические точки 2-го рода.

x	**(-∞; -2)**			**(2;+∞;)**
y''(x)	-	-	+	+
y(x)	∩	∩	∪	∪

7)График функции



Функция 2

$y = x*\mathrm{arctg}x$

1)Область определения функции

- $D(y)$: $x \in (-\infty;+\infty)$

2)Чётность и нечётность.

- y(-x)= $(-x) * arctg(-x) = (-x) * (-arctgx) = x * arctgx = y(x) =>$

функция четная

3)Точки пересечения с осями.

- А) с осью Ох, у=0

x ∗ arctgx= 0 => x=0 или arctgx=0 => x=0 , т.е. точка А(0;0);

- Б) с осью Оу, х=0

0*arctg0 = 0, т. е. та же точка А(0;0).

4)Исследование функций на непрерывность. Асимптоты.

- А) y(0 – 0) = y(0 + 0) = +∞ => функция имеет бесконечный разрыв.
- Б) Горизонтальные асимптоты: не существует, т. к.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x * \operatorname{arctg} x) = \infty$, значит, горизонтальной асимптоты слева не существует

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x * \operatorname{arctg} x) = \infty$, значит, горизонтальной асимптоты справа не существует

- В) Наклонные асимптоты: посчитаем предел функции

x * arctgx, делённой на x при x→+∞ и x→-∞

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x * \operatorname{arctg} x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\operatorname{arctg} x) = -\frac{\pi}{2}$, значит, уравнение горизонтальной асимптоты слева: $y = -\frac{\pi x}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x * \operatorname{arctg} x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{2}$, значит, уравнение горизонтальной асимптоты справа: $y = \frac{\pi x}{2}$

5)Промежутки монотонности и точки экстремума.

- $y' = (x * \operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + x * \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$

Найдем точки, в которых первая производная равна нулю или $\neg\exists$: $y'=0$ при $x=0$

y' $\neg\exists$ при $x_1=1$ или $x_2= -1$

Т. о. функция возрастает на промежутке $(0;+\propto)$ и убывает на промежутке $(-\propto;0)$ => $x=0$ – точка минимума

$f(0)= 0$

6) Промежутки выпуклости вверх (вниз), точки перегиба.

- $y''=\frac{2}{(1+x^2)^2}$, $y''\neq 0$ =>критических точек не существует

7) График функции.