

## §8. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теорема Фейера.

**Определение 1.** Пусть задан числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ,

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n, \quad \sigma_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N a_n.$$

Будем говорить, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  суммируется методом средних арифметических к числу  $\sigma$ , если существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N a_n = \sigma.$$

**Теорема 1.** Если числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  сходится к числу  $S$ ,

$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = S$ , то он суммируется к числу  $S$  методом средних арифметических.

Доказательство приводить не будем.

**Определение 2.** Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  —  $2\pi$ -периодическая функция,  $f \in L(-\pi; \pi)$ ,  $a_0, a_n, b_n$  — коэффициенты Эйлера-Фурье для нее:

$$S_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Функции

$$\sigma_1 = S_0, \quad \sigma_N = \frac{1}{N} (S_0 + \dots + S_{N-1})$$

называются суммами Фейера функции  $f$ .

**Теорема 2** (Интегральное представление сумм Фейера).

Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  —  $2\pi$ -периодическая функция,  
 $f \in L(-\pi; \pi)$ .

Тогда для любого натурального  $N$  имеет место равенство:

$$\sigma_N(x_0) = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \left( \frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt.$$

**Доказательство.** Используя интегральное представление частичных сумм ряда Фурье (теорема 2 §5), определение  $\sigma_N$  и тригонометрические формулы, получаем требуемое равенство. (Подробности опустим).

**Теорема 3.** Пусть  $f : R \rightarrow R$  —  $2\pi$ -периодическая функция,  $f \in L(-\pi; \pi)$ ,  $x_0 \in (-\pi; \pi)$ .

Пусть так же в точке  $x_0$  существуют конечные пределы  $f(x_0 + 0)$  и  $f(x_0 - 0)$ .

Тогда ряд Фурье для функции  $f$  в точке  $x_0$  суммируется методом средних арифметических к  $f_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ .

**Доказательство** приводить не будем, оно аналогично доказательству следующей теоремы.

**Замечание.** Сравнивая теорему 3 с признаком Дини поточечной сходимости, можно отметить, что теорема 3 применима для более широкого класса функций  $f$ .

## Теорема 4 (теорема Фейера).

Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  —  $2\pi$ -периодическая функция,  
 $f \in L(-\pi; \pi)$ ,  $f$  непрерывна на  $[a; b]$ .

Тогда последовательность сумм Фейера сходится к функции  $f$  равномерно на  $[a; b]$ , то есть

$$\sigma_N \xrightarrow{[a;b]} f .$$

**Доказательство** приведем на лекции.

## §9. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами

### Теорема (Вейерштрасс)

Пусть  $g : [a; b] \rightarrow R$  – непрерывна. Тогда существует последовательность многочленов  $\{P_k\}_{k \in N}$  такая, что

$$P_k \xrightarrow{[a;b]} g, k \rightarrow \infty .$$

**Доказательство** приведем на лекции.