§8.Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теорема Фейера.

Определение 1. Пусть задан числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$,

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \,,\ \sigma_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} a_n \,.$$

Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется методом средних арифметических к числу σ, если существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} a_n = \sigma \,.$$

Теорема 1. Если числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится к числу S,

$\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = S$, то он суммируется к числу S методом средних арифметических.

Доказательство приводить не будем.

Определение 2. Пусть $f: R \to R$ – 2π-периодическая функция, $f \in L(-\pi;\pi)$, a_0, a_n, b_n – коффициценты Эйлера-Фурье для нее:

$$S_0 = \frac{a_0}{2} \ ,$$

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

Функции

$$\sigma_1 = S_0 \ , \ \sigma_N = \frac{1}{N}(S_0 + \ldots + S_{N-1})$$

называются суммами Фейера функции *f*.

Теорема 2 (Интегральное представление сумм Фейера).

Пусть $f: R \to R$ – 2π-периодическая функция, $f \in L(-\pi;\pi)$.

Тогда для любого натурального N имеет место равенство:

$$\sigma_N(x_0) = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\left(\frac{\sin\frac{Nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt.$$

Доказательство. Используя интегральное представление частичных сумм ряда Фурье (теорема 2 §5), определение σ_N и тригонометрические формулы, получаем требуемое равенство. (Подробности опустим).

Теорема 3. Пусть $f: R \to R$ – 2π-периодическая функция, $f \in L(-\pi;\pi)$, $x_0 \in (-\pi;\pi)$.

Пусть так же в точке x_0 существуют конечные пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$.

Тогда ряд Фурье для функции f в точке x_0 суммируется методом средних арифметических к $f_0 = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство приводить не будем, оно аналогично доказательству следующей теоремы.

Замечание. Сравнивая теорему 3 с признаком Дини поточечной сходимости, можно отметить, что теорема 3 применима для более широкого класса функций f.

Теорема 4 (теорема Фейера).

Пусть $f : R \to R$ – 2π-периодическая функция, $f \in L(-\pi;\pi)$, f непрерывна на $[a; b]$.

Тогда последовательность сумм Фейера сходится к функции f равномерно на $[a; b]$, то есть

$$\sigma_N \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} f .$$

Доказательство приведем на лекции.

§9. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами

Теорема (Вейерштрасс)

Пусть $g:[a;b]\to R$ –непрерывна. Тогда существует последовательность многочленов $\left\{P_k\right\}_{k\in N}$ такая, что

$$P_k \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} g, k\to\infty .$$

Доказательство приведем на лекции.