

## Возрастание и убывание функций

Функция  $f(x)$  возрастает (убывает) на интервале  $(a; b)$ , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

**Теорема.** Если  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a; b)$  и  $f'(x) > 0$ , то  $f(x)$  возрастает на  $(a; b)$ . Обратно, если  $f(x)$  возрастает на  $(a; b)$ , то  $f'(x) \geq 0$  на  $(a; b)$ .

Аналогично

**Теорема.** Если  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a; b)$  и  $f'(x) < 0$ , то  $f(x)$  убывает на  $(a; b)$ . Обратно, если  $f(x)$  убывает на  $(a; b)$ , то  $f'(x) \leq 0$  на  $(a; b)$ .

**Пример 1.** Исследовать функцию  $y = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 8$  на возрастание и убывание.

---

**Решение.** Производная функции равна  $y' = 6x^2 - 8x + 2$ .

Функция  $6x^2 - 8x + 2$  определяет параболу, пересекающую ось абсцисс в точках  $x = \frac{1}{3}$  и  $x = 1$ , ветви которой направлены вверх, следовательно,

$$f'(x) > 0 \text{ при } x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (1; +\infty) \text{ и } f'(x) < 0 \text{ при } x \in (\frac{1}{3}; 1).$$

Значит, на интервалах  $(-\infty; \frac{1}{3})$  и  $(1; +\infty)$  функция возрастает, на интервале  $(\frac{1}{3}; 1)$  функция убывает.

Выберите среди предложенных интервалы монотонного возрастания функции

$$y = (x^2 - 3)e^{5-x}$$

- таких интервалов, среди предложенных, нет
- $(-3; -2)$
- $(0; 1)$
- $(2; 3)$

Выберите среди предложенных интервалы монотонного возрастания функции

$$y = \ln \frac{x-3}{x+2}$$

- таких интервалов, среди предложенных, нет
- (2; 3)
- (-1; 0)
- (-4; -3)

Выберите, среди предложенных, интервалы монотонного убывания функции

$$y = \frac{e^{2x+1}}{2x-1}$$

- $(-1, 1)$
- $(-4; -3)$
- таких интервалов, среди предложенных, нет
- $(3, 4)$

Выберите, среди предложенных, интервалы монотонного убывания функции

$$y = e^{\sqrt[3]{x^2 - 3x}}$$

- $(-2; -1)$
- $(2; 3)$
- таких интервалов, среди предложенных, нет
- $(0; 1)$

## Точки экстремума

Точка  $x_0$  называется *точкой максимума (минимума)* функции  $y = f(x)$ , если существует такая окрестность точки  $x_0$ , что для всех  $x \neq x_0$  из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума* функции.

**Теорема** (необходимое условие экстремума). *Если дифференцируемая функция  $y = f(x)$  имеет экстремум в точке  $x_0$ , то ее производная в этой точке равна нулю:  $f'(x_0) = 0$ .*

Обратное утверждение неверно, т.е. если  $f'(x_0) = 0$ , то это не значит, что  $x_0$  – точка экстремума.

Непрерывная функция может иметь экстремум только в точках, где производная функции равна нулю, такие точки называются *стационарными*, или не существует - такие точки называются *подозрительными* на экстремум.

**Теорема** (достаточное условие экстремума). *Если непрерывная функция  $y = f(x)$  дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x_0$ , стационарной или подозрительной на экстремум, и при переходе через нее (слева направо) производная  $f'(x)$  меняет знак с минуса на плюс, то  $x_0$  – точка минимума функции; если с плюса на минус, то  $x_0$  – точка максимума.*

**Теорема** (достаточное условие экстремума). *Если непрерывная функция  $y = f(x)$  дважды дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки  $x_0$ , и  $f''(x_0) > 0$  ( $f''(x_0) < 0$ ), то  $x_0$  – точка минимума (максимума) функции.*

## Пример нахождения экстремумов

**Пример 2.** Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$  на наличие точек экстремума.

**Решение.** Область определения функции  $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ .

Производная функции  $y' = \left( \frac{x^3}{(x+1)^2} \right)' = \frac{3x^2(x+1)^2 - 2(x+1)x^3}{(x+1)^4} = \frac{x^2(3+x)}{(x+1)^3}$ .

$y'(x) = 0$  при  $x = 0$  и  $x = -3$ , производная не существует в точке  $x = -1$ . Отметим точки на числовой прямой и выясним знак производной на интервалах между этими точками.



Точки, в которых функция непрерывна, а производная меняет знак, являются точками экстремума по достаточному условию, таким образом:

$x = -3$  – точка максимума функции,

$x = 0$  не является точкой экстремума,

$x = -1$  не является точкой экстремума, так как функция не является непрерывной в этой точке.



**Пример 3.** Исследовать функцию  $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$  на экстремум.

**Решение.** Область определения функции  $D(y) = \mathbf{R}$ .

Найдем производную функции и стационарные точки:

$$y' = \frac{((x-1)^2)'(x^2+1) - (x^2+1)'(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x-1)(x^2+1) - 2x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2},$$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ или } x = 1.$$

Исследуем знаки производной методом интервалов. Знаменатель производной всегда положителен, в числителе – квадратичная функция, определяющая параболу с ветвями, направленными вверх, пересекающую ось  $Ox$  в точках  $x = -1$  и  $x = 1$ .



По достаточному условию экстремума в точке  $x = -1$  функция имеет локальный максимум, а в точке  $x = 1$  – локальный минимум.

**Пример 4.** Исследовать функцию  $y = x + \ln(\cos x)$  на экстремум.

**Решение.** Область определения функции

$$D(y) = \{x \in \mathbf{R} \mid \cos x > 0\} = \{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k\}.$$

Находим производную функции и стационарные точки, лежащие в области определения:

$$y' = 1 - \frac{\sin x}{\cos x} = 1 - \operatorname{tg} x,$$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

Так как стационарных точек много, то исследуем их на экстремум с помощью второй производной

$$y'' = -\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)} = -2 < 0 \quad \forall k \in \mathbf{Z},$$

следовательно, точки  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$  являются точками максимума функции.



Найти экстремумы функции  $y = \frac{(4-x)^3}{9(2-x)}$ .

- $x=2$  - точка локального максимума
- $x=-1$  - точка локального минимума
- $x=4$  - точка локального максимума
- $x=1$  - точка локального минимума

Найти экстремумы функции  $y = 1 + \sqrt[3]{(x - 1)^2}$

- $x=1$  - точка локального максимума
- $x=0$  - точка локального максимума
- $x=2$  - точка локального максимума
- $x=2$  - точка локального минимума
- $x=0$  - точка локального минимума
- $x=1$  - точка локального минимума

## Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Будем говорить, что график функции  $y = f(x)$  имеет на  $(a; b)$  выпуклость, направленную вверх (вниз), если он расположен не выше (не ниже) любой касательной к графику функции на  $(a; b)$ .

**Теорема** (достаточное условие направления выпуклости). Пусть функция  $y = f(x)$  дважды дифференцируема на интервале  $(a; b)$ , тогда, если  $f''(x) < 0$  для любого  $x \in (a; b)$ , то график функции имеет на  $(a; b)$  выпуклость вверх, а если  $f''(x) > 0$ , то – выпуклость вниз.

Точка  $M(x_0, f(x_0))$  называется *точкой перегиба* графика функции  $y = f(x)$ , если функция непрерывна в точке  $x_0$  и существует такая окрестность этой точки, в пределах которой график функции  $y = f(x)$  слева и справа от точки  $x_0$  имеет разные направления выпуклости.

**Теорема** (необходимое условие точки перегиба). Пусть график функции  $y = f(x)$  имеет перегиб в точке  $M(x_0, f(x_0))$ , и пусть функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  непрерывную вторую производную. Тогда  $f''(x)$  в точке  $x_0$  обращается в нуль, т. е.  $f''(x_0) = 0$ .

Точки, в которых  $f''(x_0) = 0$  и точки, в которых функция непрерывна, а ее вторая производная не существует, называются *подозрительными на перегиб*.

**Теорема** (достаточное условие точки перегиба). Пусть функция  $y = f(x)$  имеет вторую производную в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Тогда, если в пределах указанной окрестности  $f''(x)$  имеет разные знаки слева и справа от точки  $x_0$ , то график  $y = f(x)$  имеет перегиб в точке  $M(x_0, f(x_0))$ .

## Примеры исследования функции на направление выпуклости графика

**Пример 4.** Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции  $y = (1 - 2x)e^{2x-1}$ .

**Решение.** Функция определена и непрерывна на всем множестве действительных чисел.

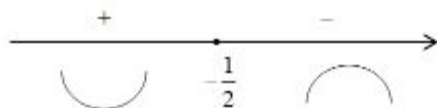
Найдем вторую производную функции и критические точки:

$$y' = ((1 - 2x)e^{2x-1})' = -2e^{2x-1} + 2(1 - 2x)e^{2x-1} = -4xe^{2x-1},$$

$$y'' = (-4xe^{2x-1})' = -4e^{2x-1} - 8xe^{2x-1} = -4(1 + 2x)e^{2x-1},$$

$$y''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Исследуем знаки второй производной на интервалах  $(-\infty; -\frac{1}{2})$  и  $(-\frac{1}{2}; +\infty)$ :



Таким образом, на интервале  $(-\infty; -\frac{1}{2})$  график имеет выпуклость вниз, на интервале  $(-\frac{1}{2}; +\infty)$  – выпуклость вверх.

**Пример 5.** Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции  $y = \frac{e^x}{x}$ .

**Решение.** Область определения функции  $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

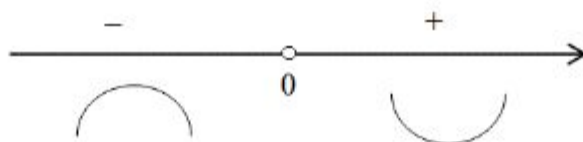
Найдем вторую производную функции и критические точки:

$$y' = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = e^x \left(\frac{x-1}{x^2}\right),$$

$$y'' = \left(e^x \left(\frac{x-1}{x^2}\right)\right)' = e^x \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}\right),$$

так как  $x^2 - 2x + 2 \neq 0 \forall x \in \mathbf{R}$ , то  $y''(x) \neq 0$ .

Вторая производная не определена в точке  $x = 0$ , исследуем знаки второй производной на действительной оси.



На интервале  $(-\infty; 0)$  график функции выпуклый вверх, а на интервале  $(0; +\infty)$  – выпуклый вниз, точка с абсциссой  $x = 0$  не является точкой перегиба, так как функция не определена в точке  $x = 0$ .

---

Выберите (среди предложенных) интервалы, на которых график функции  $y = f(x)$  является выпуклой вверх кривой.

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

- $(-5; -3)$
- таких интервалов среди предложенных нет
- $(-1; 1)$
- $(3; 5)$

Выберите (среди предложенных) интервалы, на которых график функции  $y = f(x)$  является выпуклой вверх кривой

$$y = 3x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 30x^2.$$

- $(-4; -2)$
- $(-1; 1)$
- таких интервалов среди предложенных нет
- $(2; 4)$



Выберите (среди предложенных) интервалы, на которых график функции  $y = f(x)$  является выпуклой вниз кривой

$$y = \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

- $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$
- таких интервалов среди предложенных нет

Выберите (среди предложенных) интервалы, на которых график функции  $y = f(x)$  является выпуклой вниз кривой

$$y = x \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{2}{9}x^2.$$

- (1; 2)
- (3; 4)
- таких интервалов среди предложенных нет
- (-1; 0)

Выберите (среди предложенных) абсциссы точек перегиба графика заданной функции

$$y = x e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- $-3$
- таких точек, среди предложенных, нет
- $0$
- $\sqrt{3}$

Выберите (среди предложенных) абсциссы точек перегиба графика заданной функции

$$y = x^3 \ln x^2.$$

$-e^{-\frac{5}{6}}$

$e^{-\frac{5}{6}}$

таких точек, среди предложенных, нет

0