Возрастание и убывание функций

Функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$, если

$$\forall\, x_1,\ x_2 \in (a;b)\ :\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)\ \ (f(x_1) > f(x_2)).$$

> **Теорема.** *Если $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает на $(a;b)$. Обратно, если $f(x)$ возрастает на $(a;b)$, то $f'(x) \geq 0$ на $(a;b)$.*

Аналогично

> **Теорема.** *Если $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает на $(a;b)$. Обратно, если $f(x)$ убывает на $(a;b)$, то $f'(x) \leq 0$ на $(a;b)$.*

Пример 1. Исследовать функцию $y = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 8$ на возрастание и убывание.

Р е ш е н и е. Производная функции равна $y' = 6x^2 - 8x + 2$.

Функция $6x^2 - 8x + 2$ определяет параболу, пересекающую ось абсцисс в точках $x = \frac{1}{3}$ и $x = 1$, ветви которой направлены вверх, следовательно,

$$f'(x) > 0 \text{ при } x \in \left(-\infty;\ \tfrac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty) \text{ и } f'(x) < 0 \text{ при } x \in \left(\tfrac{1}{3};\ 1\right).$$

Значит, на интервалах $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$ и $(1; +\infty)$ функция возрастает, на интервале $\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$ функция убывает.

Выберите среди предложенных интервалы монотонного возрастания функции

$$y = (x^2 - 3)e^{5-x}$$

- [ ] таких интервалов, среди предложенных, нет
- [ ] $(-3; -2)$
- [x] $(0; 1)$
- [x] $(2; 3)$

Выберите среди предложенных интервалы монотонного возрастания функции

$$y = \ln \frac{x-3}{x+2}$$

- [ ] таких интервалов, среди предложенных, нет
- [ ] $(2; 3)$
- [ ] $(-1; 0)$
- [x] $(-4; -3)$

Выберите, среди предложенных, интервалы монотонного убывания функции

$$y = \frac{e^{2x+1}}{2x-1}$$

- [ ] $(-1, 1)$
- [x] $(-4; -3)$
- [ ] таких интервалов, среди предложенных, нет
- [ ] $(3, 4)$

Выберите, среди предложенных, интервалы монотонного убывания функции
$$y = e^{\sqrt[3]{x^2-3x}}$$

- [x] $(-2;-1)$
- [ ] $(2;3)$
- [ ] таких интервалов, среди предложенных, нет
- [x] $(0;1)$

Точки экстремума

Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \; (f(x) > f(x_0)).$$

Точки максимума и минимума называются точками *экстремума* функции.

> **Теорема** (необходимое условие экстремума). *Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.*

Обратное утверждение неверно, т.е. если $f'(x_0) = 0$, то это не значит, что x_0 – точка экстремума.

Непрерывная функция может иметь экстремум только в точках, где производная функции равна нулю, такие точки называются *стационарными*, или не существует - такие точки называются *подозрительными* на экстремум.

> **Теорема** (достаточное условие экстремума). *Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, стационарной или подозрительной на экстремум, и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума функции; если с плюса на минус, то x_0 – точка максимума.*

> **Теорема** (достаточное условие экстремума). *Если непрерывная функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0, и $f''(x_0) > 0 \;\; (f''(x_0) < 0)$, то x_0 – точка минимума (максимума) функции.*

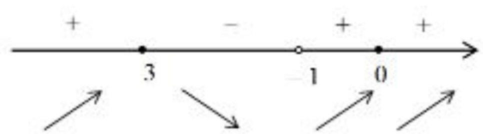
Пример нахождения экстремумов

Пример 2. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ на наличие точек экстремума.

Р е ш е н и е. Область определения функции $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

Производная функции $y' = \left(\frac{x^3}{(x+1)^2}\right)' = \frac{3x^2(x+1)^2 - 2(x+1)x^3}{(x+1)^4} = \frac{x^2(3+x)}{(x+1)^3}$.

$y'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = -3$, производная не существует в точке $x = -1$. Отметим точки на числовой прямой и выясним знак производной на интервалах между этими точками.



Точки, в которых функция непрерывна, а производная меняет знак, являются точками экстремума по достаточному условию, таким образом:

$x = -3$ – точка максимума функции,

$x = 0$ не является точкой экстремума,

$x = -1$ не является точкой экстремума, так как функция не является непрерывной в этой точке.

Пример 3. Исследовать функцию $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ на экстремум.

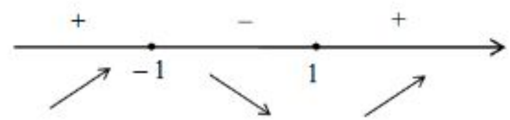
Р е ш е н и е. Область определения функции $D(y)=\mathbf{R}$.

Найдем производную функции и стационарные точки:

$$y'=\frac{\left((x-1)^2\right)'(x^2+1)-(x^2+1)'(x-1)^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x-1)(x^2+1)-2x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2},$$

$$y'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-1=0 \Leftrightarrow \quad x=-1 \text{ или } x=1.$$

Исследуем знаки производной методом интервалов. Знаменатель производной всегда положителен, в числителе – квадратичная функция, определяющая параболу с ветвями, направленными вверх, пересекающую ось Ox в точках $x=-1$ и $x=1$.



По достаточному условию экстремума в точке $x=-1$ функция имеет локальный максимум, а в точке $x=1$ – локальный минимум.

Пример 4. Исследовать функцию $y=x+\ln(\cos x)$ на экстремум.

Р е ш е н и е. Область определения функции

$$D(y)=\{x\in\mathbf{R}|\ \cos x>0\}=\left\{x\in\mathbf{R}|\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k\right\}.$$

Находим производную функции и стационарные точки, лежащие в области определения:

$$y'=1-\frac{\sin x}{\cos x}=1-\operatorname{tg} x,$$

$$y'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-\operatorname{tg} x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}+\pi k.$$

Так как стационарных точек много, то исследуем их на экстремум с помощью второй производной

$$y''=-\frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)=-\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)}=-2<0 \ \ \forall \ \ k\in\mathbf{Z},$$

следовательно, точки $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ являются точками максимума функции.

Найти экстремумы функции $y = \frac{(4-x)^3}{9(2-x)}$.

- [ ] x=2 - точка локального максимума
- [ ] x=-1 - точка локального минимума
- [ ] x=4 - точка локального максимума
- [x] x=1 - точка локального минимума

Найти экстремумы функции $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

- [ ] x=1 - точка локального максимума
- [ ] x=0 - точка локального максимума
- [ ] x=2 - точка локального максимума
- [ ] x=2 - точка локального минимума
- [ ] x=0 - точка локального минимума
- [x] x=1 - точка локального минимума

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Будем говорить, что график функции $y = f(x)$ имеет на $(a; b)$ *выпуклость, направленную вверх* (*вниз*), если он расположен не выше (не ниже) любой касательной к графику функции на $(a; b)$.

> **Теорема** (достаточное условие направления выпуклости). *Пусть функция* $y = f(x)$ *дважды дифференцируема на интервале* $(a; b)$, *тогда, если* $f''(x) < 0$ *для любого* $x \in (a; b)$, *то график функции имеет на* $(a; b)$ *выпуклость вверх, а если* $f''(x) > 0$, *то – выпуклость вниз.*

Точка $M(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба* графика функции $y = f(x)$, если функция непрерывна в точке x_0 и существует такая окрестность этой точки, в пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные направления выпуклости.

> **Теорема** (необходимое условие точки перегиба). *Пусть график функции* $y = f(x)$ *имеет перегиб в точке* $M(x_0, f(x_0))$, *и пусть функция* $y = f(x)$ *имеет в точке* x_0 *непрерывную вторую производную. Тогда* $f''(x)$ *в точке* x_0 *обращается в нуль, т. е.* $f''(x_0) = 0$.

Точки, в которых $f''(x_0) = 0$ и точки, в которых функция непрерывна, а ее вторая производная не существует, называются *подозрительными на перегиб.*

> **Теорема** (достаточное условие точки перегиба). *Пусть функция* $y = f(x)$ *имеет вторую производную в некоторой окрестности точки* x_0. *Тогда, если в пределах указанной окрестности* $f''(x)$ *имеет разные знаки слева и справа от точки* x_0, *то график* $y = f(x)$ *имеет перегиб в точке* $M(x_0, f(x_0))$.

Примеры исследования функции на направление выпуклости графика

Пример 4. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = (1 - 2x)\,e^{2x-1}$.

Р е ш е н и е. Функция определена и непрерывна на всем множестве действительных чисел.

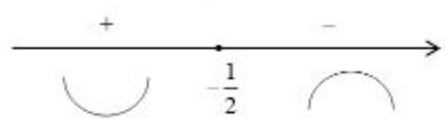
Найдем вторую производную функции и критические точки:

$$y' = \left((1-2x)\,e^{2x-1}\right)' = -2e^{2x-1} + 2\,(1-2x)\,e^{2x-1} = -4xe^{2x-1},$$

$$y'' = \left(-4xe^{2x-1}\right)' = -4e^{2x-1} - 8xe^{2x-1} = -4\,(1+2x)\,e^{2x-1},$$

$$y''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2}.$$

Исследуем знаки второй производной на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$:



Таким образом, на интервале $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ график имеет выпуклость вниз, на интервале $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ – выпуклость вверх.

Пример 5. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = \frac{e^x}{x}$.

Р е ш е н и е. Область определения функции $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

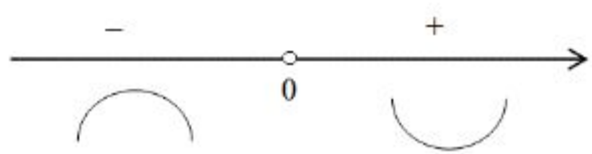
Найдем вторую производную функции и критические точки:

$$y' = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = e^x\left(\frac{x-1}{x^2}\right),$$

$$y'' = \left(e^x\left(\frac{x-1}{x^2}\right)\right)' = e^x\left(\frac{x^2-2x+2}{x^3}\right),$$

так как $x^2 - 2x + 2 \neq 0 \ \forall\, x \in \mathbf{R}$, то $y''(x) \neq 0$.

Вторая производная не определена в точке $x = 0$, исследуем знаки второй производной на действительной оси.



На интервале $(-\infty; 0)$ график функции выпуклый вверх, а на интервале $(0; +\infty)$ – выпуклый вниз, точка с абсциссой $x = 0$ не является точкой перегиба, так как функция не определена в точке $x = 0$.

Выберите (среди предложенных) интервалы, на которых график функции $y = f(x)$ является выпуклой вверх кривой.

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

- $(-5; -3)$
- таких интервалов среди предложенных нет
- $(-1; 1)$
- $(3; 5)$

Выберите (среди предложенных) интервалы, на которых график функции $y = f(x)$ является выпуклой вверх кривой

$$y = 3x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 30x^2.$$

- [x] $(-4; -2)$
- [x] $(-1; 1)$
- [ ] таких интервалов среди предложенных нет
- [ ] $(2; 4)$

Выберите (среди предложенных) интервалы, на которых график функции $y = f(x)$ является выпуклой вниз кривой

$$y = \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

- $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$
- таких интервалов среди предложенных нет

Выберите (среди предложенных) интервалы, на которых график функции $y = f(x)$ является выпуклой вниз кривой

$$y = x \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{2}{9}x^2.$$

- $(1;2)$
- $(3;4)$
- таких интервалов среди предложенных нет
- $(-1;0)$

Выберите (среди предложенных) абсциссы точек перегиба графика заданной функции

$$y = x\ e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- [ ] -3
- [ ] таких точек, среди предложенных, нет
- [x] 0
- [x] $\sqrt{3}$

Выберите (среди предложенных) абсциссы точек перегиба графика заданной функции

$$y = x^3 \ln x^2.$$

- [x] $-e^{-\frac{5}{6}}$
- [x] $e^{-\frac{5}{6}}$
- [ ] таких точек, среди предложенных, нет
- [ ] 0