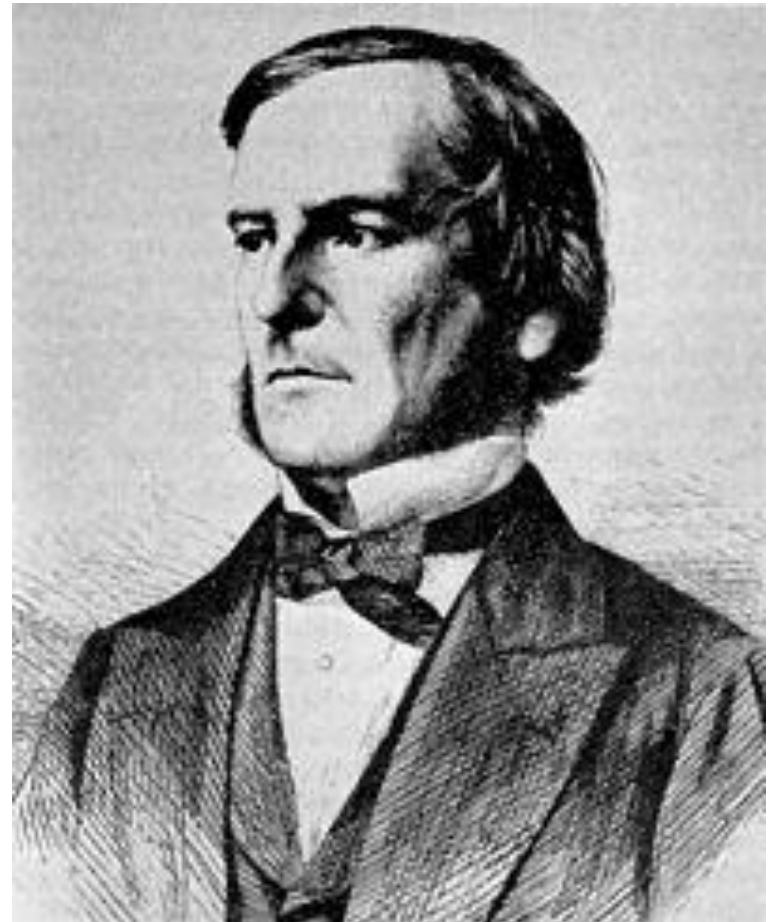


Логические основы ЭЦВМ

Джордж Буль

1815 - 1864

«Имеется глубокая аналогия между символическим методом алгебры и символическим методом представления логических форм ... В такой символике высказывания могут быть сведены к форме уравнений»



Алгебра высказываний (Алгебра логики, Булева алгебра)

Высказывания представляются
логическими переменными,
которые могут иметь всего два
значения:

истина true (1)

ложь false (0)

Простые высказывания

- Волга впадает в Каспийское море $a=1$
- Амур впадает в Каспийское море $a=0$
- Возможно осложнение заболевания
 $a=\{0,1\}$

Сложные высказывания

- Волга впадает в Каспийское море и Амур впадает в Каспийское море
- Волга впадает в Каспийское море или Амур впадает в Каспийское море

Отношение – список ИСТИННЫХ выражений (фактов), касающихся некоторого признака группы объектов

- Иван – мужчина
- Мария – женщина
- Ирина – женщина
- Петр – мужчина
- Василий – мужчина
-

Отношение **Пол**
для группы
пациентов

(Соответствующее
поле в записях
компьютерной
базы данных)

Предикат – логическая функция, определенная над отношением

- Предикат имеет значение **Истина**, если его аргумент принадлежит отношению, в противном случае – значение **Ложь**
- Пример: предикат $a(x - \text{мужчина}) = 1$, если $x - \text{Иван}$; $= 0$, если $x - \text{Мария}$

Базовые операции алгебры логики (задаются таблицами истинности)

Логическое ИЛИ

(дизъюнкция \vee , |, OR)

a	b	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Логическое И

(конъюнкция \wedge , &, AND)

a	b	a*b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

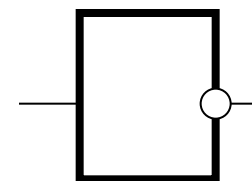
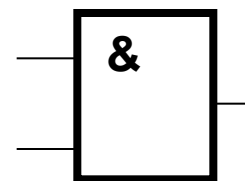
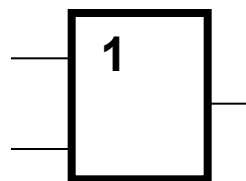
Логическое НЕ

(инверсия \neg , NOT)

a	\bar{a}
0	1
1	0

убывание
приоритета

Логические элементы:



ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

- Операции с константами: $a + 0 = a$ $a + 1 = 1$ $a * 0 = 0$ $a * 1 = a$
- Закон исключенного третьего: $a + \underline{a} = 1$
- Закон непротиворечия: $a * \underline{a} = 0$
- Законы идемпотенции: $a + a = a$ $a * a = a$
- Закон двойного отрицания: $\underline{\underline{a}} = a$
- Законы де Моргана: $\underline{a + b} = \underline{a} * \underline{b}$ $\underline{a * b} = \underline{a} + \underline{b}$
- Закон поглощения: $a + a * b = a$
- Закон склеивания: $a * b + a * \underline{b} = a$

Сын: МОЖНО МНЕ ПОЙТИ В КИНО
или купить мороженое?

Мама: нет

$$\overline{a + b} = \overline{a} * \overline{b}$$

Нельзя пойти в кино и
нельзя купить мороженое


Порядок выполнения операций можно изменять с помощью скобок:

Переместительный закон: $a + b = b + a$

Сочетательный закон: $a + (b + c) = (a + b) + c$

Дистрибутивный закон: $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

$$a + b * c \neq (a + b) * c \quad \overline{a + b} = \overline{(a + b)}$$



**Любая сколь угодно сложная
логическая функция,
заданная своей таблицей
истинности,
может быть представлена
логическим выражением в
совершенной дизъюнктивной
нормальной форме (СДНФ)**

Пример: таблица истинности одноразрядного сумматора

Входы

Выходы

a	b	p	S	P
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Построение СДНФ:

для всех строк с единичными значениями выходной функции выписывается логическая сумма (дизъюнкция) из логических произведений (конъюнкций) всех входных переменных, при этом входная переменная пишется с инверсией, если ее значение в соответствующей строке равно нулю

$$S = \bar{a}\bar{b}p + \bar{a}b\bar{p} + a\bar{b}\bar{p} + abp$$

$$P = \bar{a}bp + a\bar{b}p + ab\bar{p} + abp = ab + ap + bp$$

Логическая операция «Импликация»: $a \rightarrow b$


Если
заболевание
– тяжелое, то
возможны
осложнения

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	1	1
1	0	0


$$a \rightarrow b = \bar{a} + b$$

Импликация над предикатами называется **продукционным правилом**

- Пример: **Если** (x – мужчина) **И** (x – имеет детей), **то** (x – отец)
- Система продукционных правил лежит в основе компьютерной **базы знаний**




Тестовые задания по теме лекции



Результат логической операции
ДИЗЪЮНКЦИЯ (логическое ИЛИ) от двух
переменных равен ИСТИНА, если

- |1. Значение хотя бы одной из переменных
равно ИСТИНА
- |2. Значение обоих переменных равно
ИСТИНА
- |3. Значение только одной из переменных
равно ЛОЖЬ
- |4. Значение обоих переменных равно
ЛОЖЬ



Результат логической операции
КОНЪЮНКЦИЯ (логическое И) от двух
переменных равен ИСТИНА, если

|1. Значение хотя бы одной из
переменных равно ИСТИНА

|2. Значение обоих переменных равно
ИСТИНА

|3. Значение только одной из переменных
равно ЛОЖЬ

|4. Значение обоих переменных равно
ЛОЖЬ

Результат логической операции
ДИЗЪЮНКЦИЯ с ИНВЕРСИЕЙ
(логическое ИЛИ-НЕ) от двух переменных
равен ИСТИНА, если

|1. Значение хотя бы одной из
переменных равно ИСТИНА


|2. Значение обоих переменных равно
ИСТИНА

|3. Значение только одной из переменных
равно ЛОЖЬ

|4. Значение обоих переменных равно
ЛОЖЬ

Результат логической операции
КОНЪЮНКЦИЯ с ИНВЕРСИЕЙ
(логическое И-НЕ) от двух переменных
равен ИСТИНА, если

- |1. Значение только одной из переменных
равно ИСТИНА
- |2. Значение обоих переменных равно
ИСТИНА
- |3. Значение хотя бы одной из переменных
равно ЛОЖЬ
- |4. Значение обоих переменных равно
ЛОЖЬ




В результате поиска в базе
данных пациентов по условию
ВОЗРАСТ больше 30 лет И
ВОЗРАСТ меньше 20 лет
будут отображены

|1. Одна запись

|2. Ни одной записи

|3. Все записи



В результате поиска в базе
данных пациентов по условию
ВОЗРАСТ больше 30 лет ИЛИ
ВОЗРАСТ меньше 40 лет
будут отобраны

|1. Одна запись

|2. Ни одной записи

|3. Все записи

В приведенных ниже

логических равенствах

(знак дизъюнкции +, знак конъюнкции *)


неверным является

| 1. $a + 1 = 1$

| 2. $a + a = a$

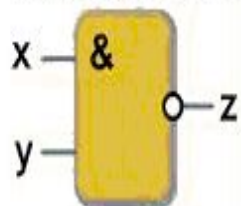
| 3. $a * 1 = 1$

| 4. $a + a * b = a$



**Тестовые задания
с единого портала
интернет-тестирования
в сфере образования**

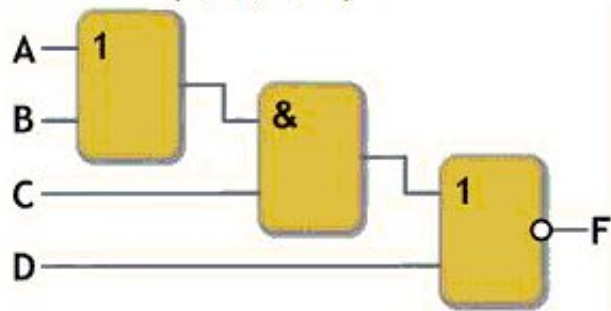
На рисунке представлено условное графическое изображение логической схемы. Связь между выходом z и входами x и y для данной логической схемы записывается в виде ...



- $Z = X \& Y$
- $Z = X \vee Y$
- $Z = \overline{X \& Y}$
- $Z = \overline{X \vee Y}$

Правильный ответ 3

На входе логической схемы при $F=1$ возможна следующая комбинация сигналов $(A, B, C, D) \dots$



(1 1 0 0)

(1 1 1 0)

(0 1 1 0)

(1 0 1 0)

Правильный ответ 1

Логическому выражению $\overline{(\bar{A} \& B)} \vee \bar{C}$ равносильно выражение ...

$\bar{A} \vee B \vee \bar{C}$

$\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}$

$A \vee B \vee \bar{C}$

$A \vee \bar{B} \vee \bar{C}$

**По формуле де Моргана для выражения в скобках
правильный ответ 4**

Логическая функция $F = \bar{A} \& B \vee \overline{(A \& B)}$ принимает значение *Ложь* (0) при

...

$A = 0, B = 0$

$A = 1, B = 0$

$A = 1, B = 1$

$A = 0, B = 1$

Правильный ответ 3

Для того чтобы логическое выражение

$$(X \& \neg X) ? (Y \& \neg Y)$$

было тождественно истинным, вместо знака ? в нем ...

- можно поставить как знак дизъюнкции ($\dot{\cup}$), так и знак конъюнкции ($\&$)
- можно поставить знак дизъюнкции ($\dot{\cup}$), но не знак конъюнкции ($\&$)
- нельзя поставить ни знак дизъюнкции ($\dot{\cup}$), ни знак конъюнкции ($\&$)
- нельзя поставить знак дизъюнкции ($\dot{\cup}$), но можно поставить знак конъюнкции ($\&$)

Правильный ответ 3