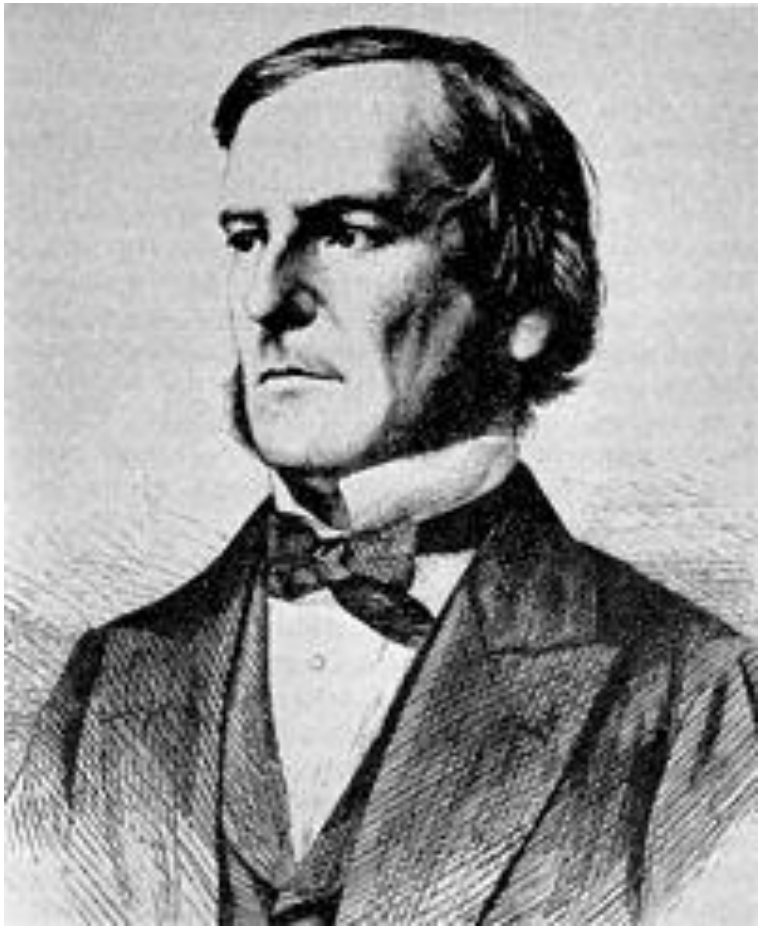
# Логические основы ЭЦВМ

# Джордж Буль
# 1815 -1864

«Имеется глубокая аналогия между символическим методом алгебры и символическим методом представления логических форм …
В такой символике высказывания могут быть сведены к форме уравнений»



# Алгебра высказываний (Алгебра логики, Булева алгебра)

Высказывания представляются логическими переменными, которые могут иметь всего два значения:

истина true (1)

ложь false (0)

# Простые высказывания

- Волга впадает в Каспийское море **a=1**
- Амур впадает в Каспийское море **a=0**
- Возможно осложнение заболевания **a={0,1}**

# Сложные высказывания

- Волга впадает в Каспийское море и Амур впадает в Каспийское море
- Волга впадает в Каспийское море или Амур впадает в Каспийское море

**Отношение** – список истинных выражений (фактов), касающихся некоторого признака группы объектов

- Иван – мужчина
- Мария – женщина
- Ирина – женщина
- Петр – мужчина
- Василий – мужчина
- ……

**Отношение Пол для группы пациентов**

**(Соответствующее поле в записях компьютерной базы данных)**

**Предикат** – логическая функция, определенная над отношением

- Предикат имеет значение **Истина**, если его аргумент принадлежит отношению, в противном случае – значение **Ложь**
- Пример: предикат **a( x – мужчина )** = 1, если **x** – Иван; = 0, если **x** – Мария

# Базовые операции алгебры логики (задаются таблицами истинности)

## Логическое ИЛИ

(дизъюнкция V, |, OR)

| a | b | a+b |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

## Логическое И

(конъюнкция $\wedge$,&, AND)

| a | b | a*b |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

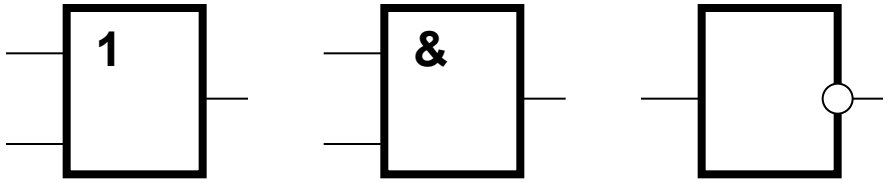
## Логическое НЕ

(инверсия ¬, NOT)

| a | $\bar{a}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

убывание приоритета

**Логические элементы:**



# ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

- **Операции с константами:** $a + 0 = a \quad a + 1 = 1 \quad a * 0 = 0 \quad a * 1 = a$
- **Закон исключенного третьего:** $a + \bar{a} = 1$
- **Закон непротиворечия:** $a * \bar{a} = 0$
- **Законы идемпотенции:** $a + a = a \quad a * a = a$
- **Закон двойного отрицания:** $\bar{\bar{a}} = a$
- **Законы де Моргана:** $\overline{a + b} = \bar{a} * \bar{b} \qquad \overline{a * b} = \bar{a} + \bar{b}$
- **Закон поглощения:** $a + a * b = a$
- **Закон склеивания:** $a * b + a * \bar{b} = a$

**Сын:** можно мне пойти в кино **или** купить мороженое?

**Мама:** нет

$$\overline{a + b} = \overline{a} * \overline{b}$$

Нельзя пойти в кино **и** нельзя купить мороженое

Порядок выполнения операций можно изменять с помощью скобок:

Переместительный закон: $a + b = b + a$

Сочетательный закон: $a+(b+c)=(a+b)+c$

Дистрибутивныйзакон: $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$

$a + b*c \neq (a + b)*c$ $\overline{a + b} = \overline{(a + b)}$

**Любая сколь угодно сложная логическая функция, заданная своей таблицей истинности, может быть представлена логическим выражением в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ)**

## Пример: таблица истинности одноразрядного сумматора

| Входы | | | Выходы | |
|---|---|---|---|---|
| a | b | p | S | P |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Построение СДНФ:**

**для всех строк с единичными значениями выходной функции выписывается логическая сумма (дизъюнкция) из логических произведений (конъюнкций) всех входных переменных, при этом входная переменная пишется с инверсией, если ее значение в соответствующей строке равно нулю**

$$S = \bar{a}\bar{b}p + \bar{a}b\bar{p} + a\bar{b}\bar{p} + abp$$

$$P = \bar{a}bp + a\bar{b}p + ab\bar{p} + abp =$$
$$= ab + ap + bp$$

# Логическая операция «Импликация»: a -> b

**Если заболевание – тяжелое, то возможны осложнения**

| a | b | a->b |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |

$$a \rightarrow b = \bar{a} + b$$

# Импликация над предикатами называется **продукционным правилом**

- Пример: **Если** ( **x** – мужчина ) **И** ( **x** – имеет детей ), **то** ( **x** – отец )
- Система продукционных правил лежит в основе компьютерной **базы знаний**

# Тестовые задания по теме лекции

Результат логической операции ДИЗЪЮНКЦИЯ (логическое ИЛИ) от двух переменных равен ИСТИНА, если

|1. Значение хотя бы одной из переменных равно ИСТИНА

|2. Значение обоих переменных равно ИСТИНА

|3. Значение только одной из переменных равно ЛОЖЬ

|4. Значение обоих переменных равно ЛОЖЬ

Результат логической операции КОНЪЮНКЦИЯ (логическое И) от двух переменных равен ИСТИНА, если

|1. Значение хотя бы одной из переменных равно ИСТИНА

|2. Значение обоих переменных равно ИСТИНА

|3. Значение только одной из переменных равно ЛОЖЬ

|4. Значение обоих переменных равно ЛОЖЬ

Результат логической операции ДИЗЪЮНКЦИЯ с ИНВЕРСИЕЙ (логическое ИЛИ-НЕ) от двух переменных равен ИСТИНА, если

|1. Значение хотя бы одной из переменных равно ИСТИНА

|2. Значение обоих переменных равно ИСТИНА

|3. Значение только одной из переменных равно ЛОЖЬ

|4. Значение обоих переменных равно ЛОЖЬ

Результат логической операции КОНЪЮНКЦИЯ с ИНВЕРСИЕЙ (логическое И-НЕ) от двух переменных равен ИСТИНА, если

|1. Значение только одной  из переменных равно ИСТИНА

|2. Значение обоих переменных равно ИСТИНА

|3. Значение хотя бы одной из переменных равно ЛОЖЬ

|4. Значение обоих переменных равно ЛОЖЬ

В результате поиска в базе данных пациентов по условию ВОЗРАСТ больше 30 лет И ВОЗРАСТ меньше 20 лет будут отобраны

|1. Одна запись

|2. Ни одной записи

|3. Все записи

В результате поиска в базе данных пациентов по условию ВОЗРАСТ больше 30 лет ИЛИ ВОЗРАСТ меньше 40 лет будут отобраны

|1. Одна запись

|2. Ни одной записи

|3. Все записи

В приведенных ниже логических равенствах (знак дизъюнкции +, знак конъюнкции *) неверным является

|1. a + 1 = 1

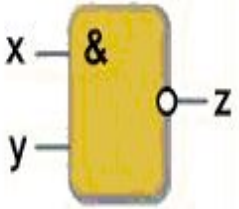
|2. a + a = a

|3. a * 1 = 1

|4. a + a * b = a

# Тестовые задания с единого портала интернет-тестирования в сфере образования

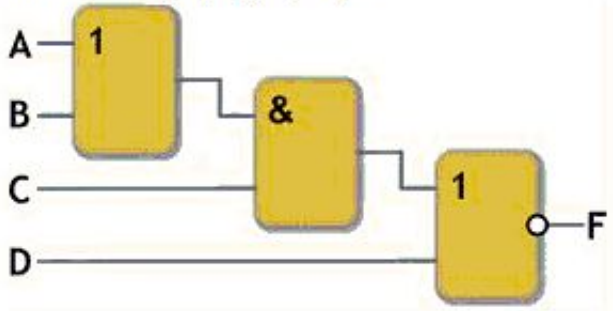
На рисунке представлено условное графическое изображение логической схемы. Связь между выходом z и входами x и y для данной логической схемы записывается в виде …




- $Z = X \,\&\, Y$
- $Z = X \vee Y$
- $Z = \overline{X \,\&\, Y}$
- $Z = \overline{X \vee Y}$

**Правильный ответ 3**

На входе логической схемы при $F=1$ возможна следующая комбинация сигналов $(A, B, C, D)$ …




- (1 1 0 0)
- (1 1 1 0)
- (0 1 1 0)
- (1 0 1 0)

**Правильный ответ 1**

Логическому выражению $\overline{(\overline{A}\,\&\,B)}\vee\overline{C}$ равносильно выражение …

- $\overline{A}\vee B\vee\overline{C}$
- $\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}$
- $A\vee B\vee\overline{C}$
- $A\vee\overline{B}\vee\overline{C}$

**По формуле де Моргана для выражения в скобках правильный ответ 4**

Логическая функция $F = \overline{A} \,\&\, B \vee \overline{(A \,\&\, B)}$ принимает значение *Ложь* (0) при

...

- $A = 0, B = 0$
- $A = 1, B = 0$
- $A = 1, B = 1$
- $A = 0, B = 1$

**Правильный ответ 3**

Для того чтобы логическое выражение

$(X \& \neg X) ? (Y \& \neg Y)$

было тождественно истинным, вместо знака ? в нем ...

- можно поставить как знак дизъюнкции (Ú), так и знак конъюнкции (&)
- можно поставить знак дизъюнкции (Ú), но не знак конъюнкции (&)
- ✓ нельзя поставить ни знак дизъюнкции (Ú), ни знак конъюнкции (&)
- нельзя поставить знак дизъюнкции (Ú), но можно поставить знак конъюнкции (&)

**Правильный ответ 3**