Лекция 16

Термодинамика излучения. Начала молекулярно-кинетической теории.

Термодинамика излучения

- Излучение находится в центре внимания физики.
- Квантовая теория излучения представляет излучение как поток фотонов – элементарных частиц.
- Свойства фотонов
- 1 . Скорость фотонов равна скорости света.
- 2. Энергия фотона $E = h\nu$.
- h =6.626 · 10^{-34} Дж · с – постоянная Планка,
- ν - частота излучения.

Термодинамика излучения

- Одним из видов излучения является излучение нагретых тел.
- «Нагретое тело» имеет любую температуру, кроме 0 *K*.
- Электромагнитное излучение, находящееся в равновесии с окружающими телами, называется тепловым, или равновесным.

Термодинамика излучения

- Так как это излучение не выходит наружу, оно называется излучением абсолютно черного тела.
- Равновесное излучение в полости можно рассматривать как термодинамическую систему, обладающую
- температурой (температура стенок), объемом (объем полости)
- давлением
- Излучение можно рассматривать как фотонный газ.

Термодинамика излучения

- Обозначим через *u* плотность энергии излучения, т.е. количество такой энергии в единице объема пространства.
  - $u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda.$
- $u_\nu d\nu$ и $u_\lambda d\lambda$ - объемная плотность энергии излучения, приходящейся на интервал частот $\nu, \nu + d\nu$ или интервал длин волн $\lambda, \lambda + d\lambda$

Термодинамика излучения

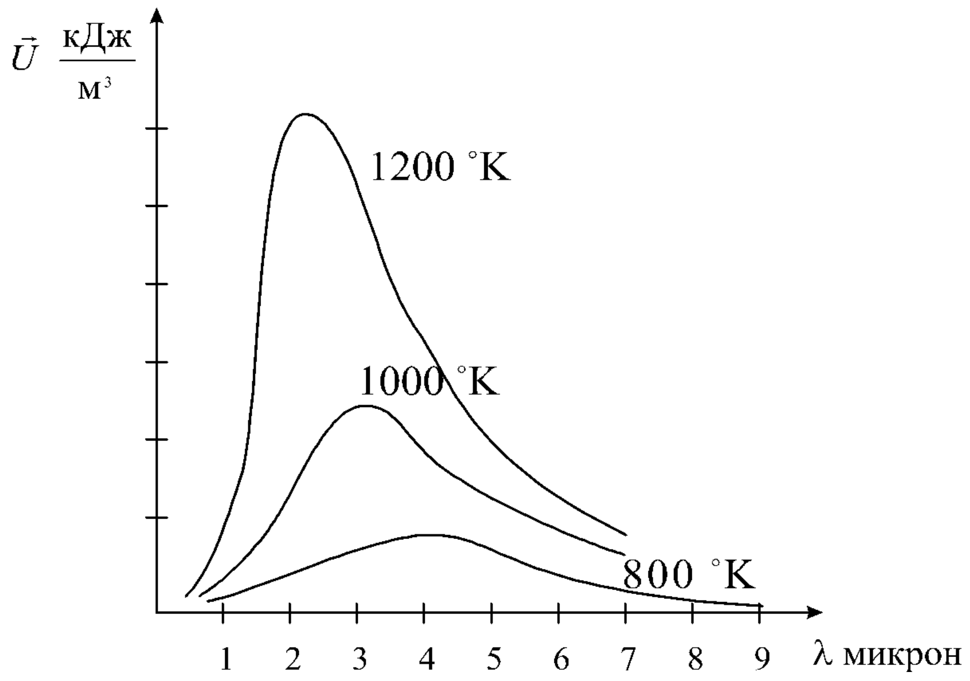
- Функции u_ν и u_λ зависят только от частоты ν (или длины волны λ) и от температуры излучения T, но не зависят от формы и материала стенок полости.

- Формулы Планка.

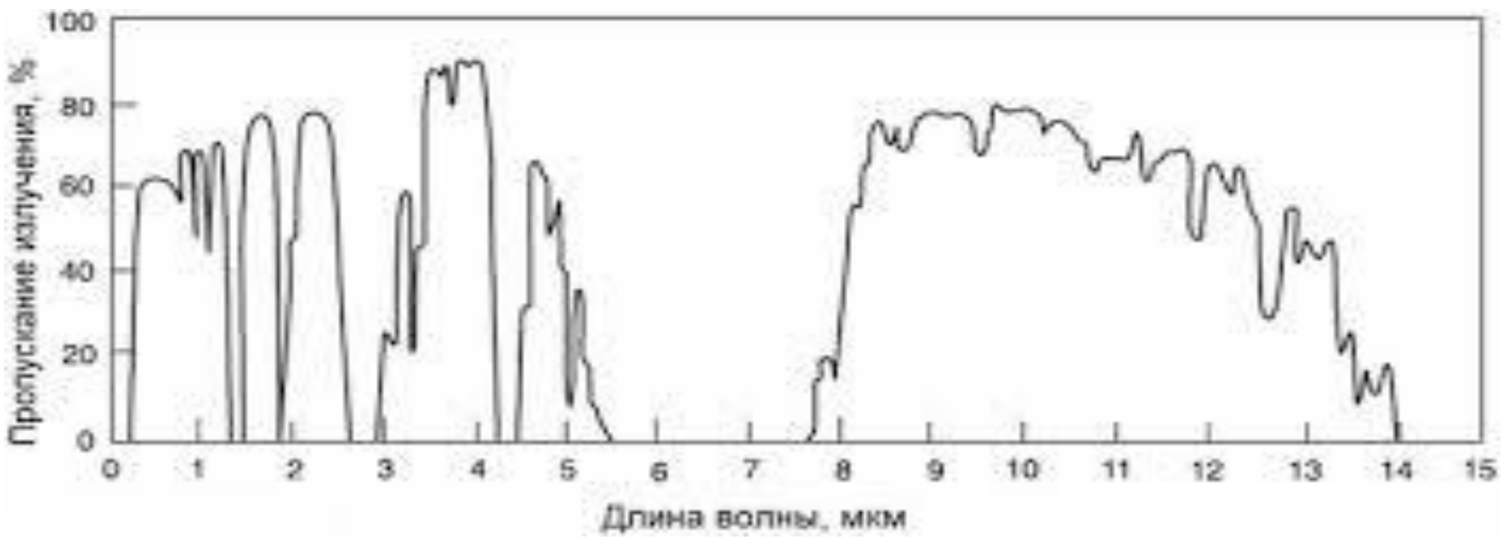
- $u_\nu = \dfrac{8\pi h\nu^3}{c^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)}$
- $u_\lambda = \dfrac{8\pi hc}{\lambda^5}\dfrac{1}{\left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1\right)}$

Термодинамика излучения

- Зависимость спектральной плотности излучения от длины волны.
  - $\lambda_m = {}^{b}/_{T}$
  - $b = const = 2898$ мкм·К
  - Для солнца
  - $\lambda_m = 0{,}48$ мкм
  - Для человека
  - $\lambda_m \approx 9$ мкм



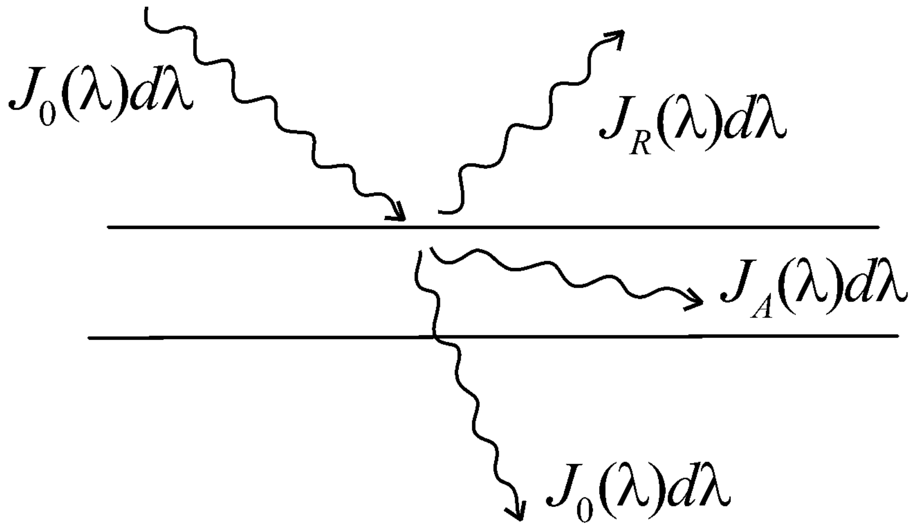
Термодинамика излучения



- Прозрачность атмосферы

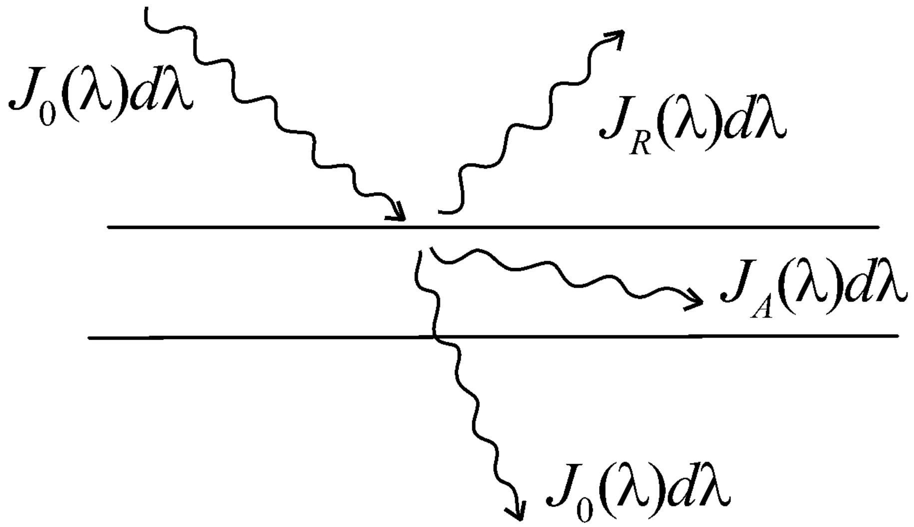
Взаимодействие излучения с веществом

- На пластинку падает поток излучения
- Энергия, переносимая этим потоком, называется его интенсивностью *J*.
  - $J = \int_0^\infty J(\lambda)d\lambda.$
- Величина $J(\lambda)d\lambda$ имеют смысл интенсивности излучения, приходящейся на интервал длин волн $\lambda, \lambda + d\lambda$.



Взаимодействие излучения с веществом

- $J_0(\lambda)d\lambda$ интенсивность излучения в диапазоне волн $\lambda, \lambda + d\lambda$, падающего на пластинку из некоторого материала.
- Часть излучения $J_R(\lambda)d\lambda$ отразится от поверхности,
- часть $J_D(\lambda)d\lambda$ пройдёт сквозь пластинку,
- часть $J_A(\lambda)d\lambda$ поглотится в пластинке



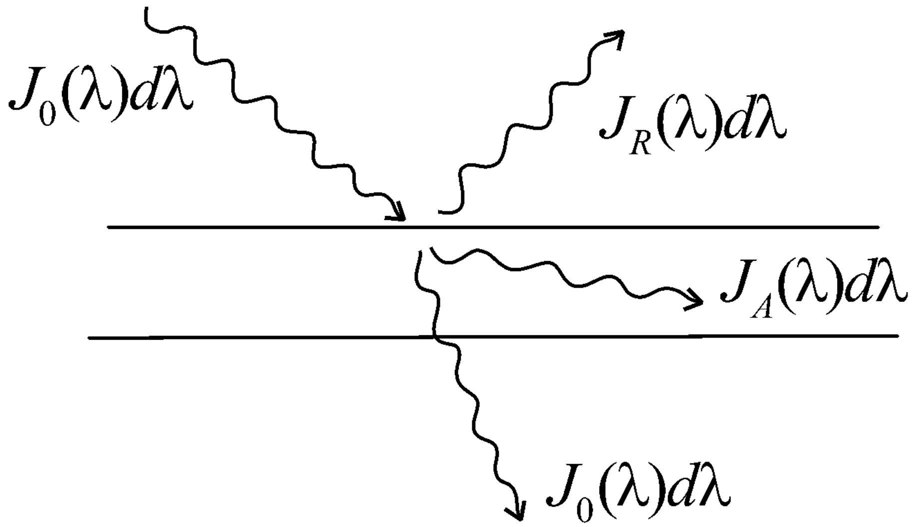
Взаимодействие излучения с веществом

- Сумма этих слагаемых будет равна интенсивности падающего потока света.

- $J_0(\lambda)d\lambda = J_R(\lambda)d\lambda + J_D(\lambda)d\lambda + J_A(\lambda)d\lambda.$

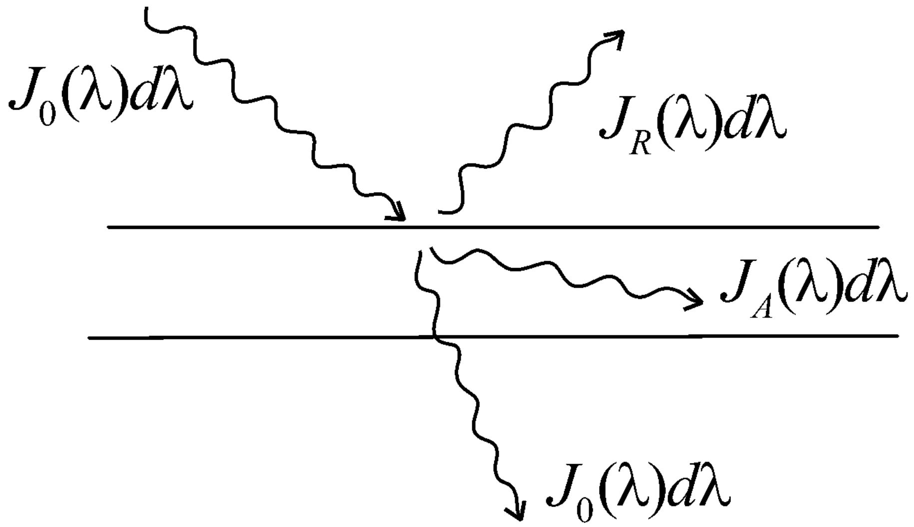
- Поделив на $J_0(\lambda)d\lambda$ получим

- $\frac{J_R(\lambda)}{J_0(\lambda)} + \frac{J_D(\lambda)}{J_0(\lambda)} + \frac{J_A(\lambda)}{J_0(\lambda)} = 1.$



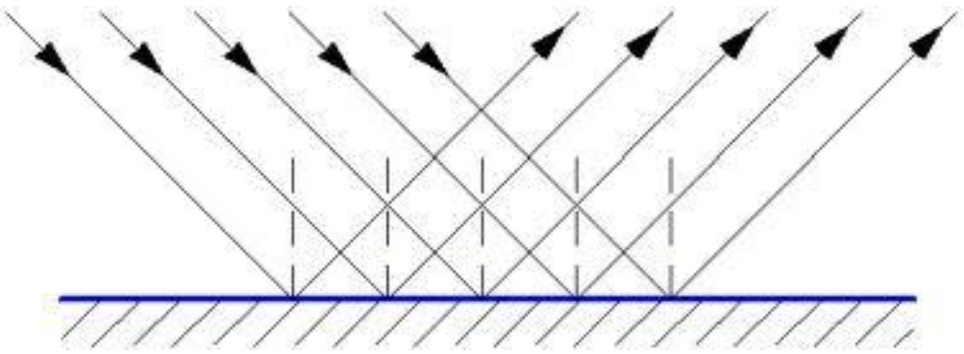
Взаимодействие излучения с веществом

- Величину $R(\lambda) = \frac{J_R}{J_0}$ называют отражательной способностью вещества. Величина $D(\lambda) = \frac{J_D}{J_0}$ называется прозрачностью,
- величина $A(\lambda) = \frac{J_A}{J_0}$ – поглощательной способностью.
- Их сумма равна единице



Взаимодействие излучения с веществом

- Если $R(\lambda) = 1,$
- то $D(\lambda) = A(\lambda) = 0,$
- все падающее на тело излучение
- зеркально отражается от него

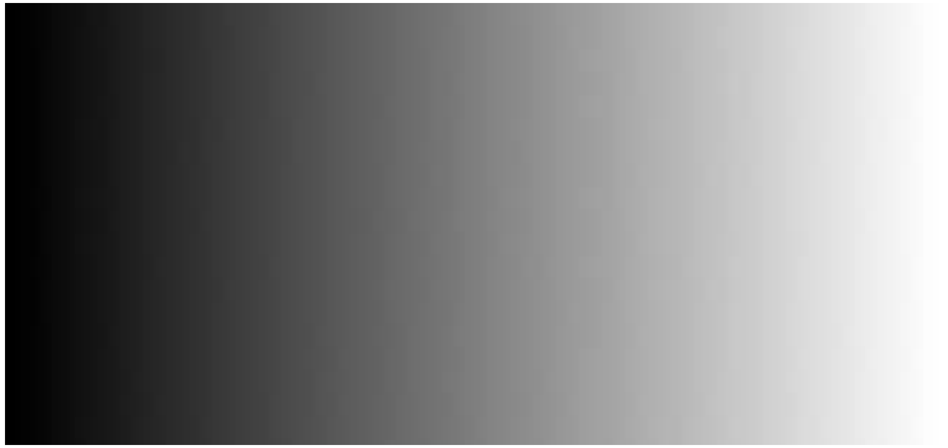


Взаимодействие излучения с веществом

- Если $A(\lambda) = 1$, то все упавшее на тело излучение поглощается им. Такое тело называется *абсолютно черным телом.*

Взаимодействие излучения с веществом

- Серым телом называют тело, которое поглощает только часть падающего излучения.
- Мы будем обозначать его поглощательную способность $A_{\text{С}}$.
- Естественно что, $A_{\text{С}} < 1$.
- Поглощательную способность абсолютно черного тела мы будем обозначать $A_{\text{ч}} = 1$.



Взаимодействие излучения с веществом

- Излучательные способности
  - Серого тела ε_C
  - Черного тела $\varepsilon_Ч$
- Величина $\varepsilon(\lambda)d\lambda$ – равна интенсивности излучения тела в диапазоне $\lambda, \lambda + d\lambda$.

Взаимодействие излучения с веществом

- Поместим в полость, стенки которой имеют температуру T, серое и черное тела.
- При равновесии $T_{\text{ч}} = T_C = T_{\text{излучения}} = T_{\text{стенок}}$, а количество поглощаемой каждым телом энергии равно количеству излучаемой.
- Плотность энергии излучения при равновесии везде будет одинакова
- На единицу поверхности падает одинаковый поток излучения $J_0(\lambda)d\lambda$.

Взаимодействие излучения с веществом

- При равновесии поток поглощенной энергии должен быть равен потоку энергии излучения
- Для черного тела
  - $A_Ч J_0(\lambda)d\lambda = \varepsilon_Ч d\lambda$ и
- Для серого тела
  - $A_С J_0(\lambda)d\lambda = \varepsilon_С d\lambda.$
- Поделив последнее выражение на предыдущее, получим
  - $\frac{A_С}{A_Ч} = \frac{\varepsilon_С}{\varepsilon_Ч}.$
- Поскольку $A_Ч = 1$, то
  - $\frac{\varepsilon_С}{A_С} = \varepsilon_Ч.$

Взаимодействие излучения с веществом

-
- Закон Кирхгофа
- *Отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от природы тела, а зависит от излучательной способности абсолютно черного тела, являющейся функцией частоты и температуры*

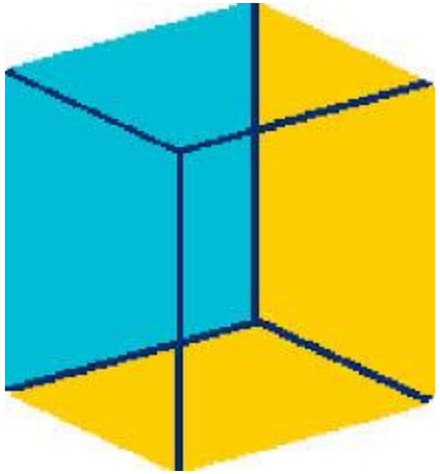
- $\frac{\varepsilon_{С}}{A_{С}} = \varepsilon_{Ч}.$

Закон Стефана-Больцмана

- Фотон поглощается стенкой.
- Он передает стенке импульс, равный E/c, где E – энергия фотона.
- По принципу детального равновесия стенка должна испустить такой же фотон в том же направлении.
- При этом она получит импульс отдачи также равный E/c.
- Суммарный импульс, получаемый стенкой в результате взаимодействия с фотонным газом равен 2 E/c.

Закон Стефана-Больцмана

- Концентрация фотонов равна *n*.
- В сторону стенки в каждый момент времени летит 1/6 часть фотонов.
- До площадки *S* на стенке в единицу времени долетит объем *cS*, содержащий *nc*S фотонов.
- Импульс, полученный площадкой *S*, а значит действующая на нее сила *F* равна
- $F = \frac{2EncS}{6c} = \frac{1}{3}EnS = \frac{1}{3}uS,$



Закон Стефана-Больцмана

- u – плотность энергии фотонного газа (излучения).
- Давление фотонного газа P
  - $P = \frac{1}{3}u.$
- Внутренняя энергия фотонного газа U, заключенного в полость объемом V равна
-
  - $U = uV.$

Закон Стефана-Больцмана

- Воспользуемся формулой из Лекции 13, выражающую связь между внутренней энергией термодинамической системы и давлением
  - $$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P.$$
- Для фотонного газа
  - $$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = u$$
  - $$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{3}\frac{du}{dT}$$

Закон Стефана-Больцмана

- Получаем дифференциальное уравнение
- $u = \frac{1}{3}\frac{dU}{dT}T - \frac{1}{3}u,$
- или
- $4u = T\frac{du}{dT}.$
- Его решением является выражение
-
- $lnu = 4lnT + const.$

Закон Стефана-Больцмана

- $$u = \sigma T^4.$$
-

- Закон Стефана-Больцмана:
- *Плотность энергии излучения пропорциональна четвертой степени температуры*.
- Коэффициент пропорциональности $\sigma = 7{,}64 \cdot 10^{-16}\,\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3\text{К}}$ определен экспериментально.

Закон Стефана-Больцмана

- Можно также показать, что плотность потока излучения абсолютно черного тела определяется формулой
  - $j = \frac{1}{4}\sigma T^4.$
- Такая сильная зависимость от температуры приводит к тому, что в обычных условиях при температурах выше 400-500 ^{0}C теплообмен осуществляется за счет излучения.
- Например, Солнце, имея температуру 6000 ^{0}K, излучает огромную энергию, так что на орбите Земли поток этого излучения составляет около 1600 вт/м^2.
- Если считать Солнце и Землю абсолютно черными телами, для равновесной температуры Земли мы получим температуру около 0 ^{0}C

Начала молекулярно-кинетической теории

- Экспериментальный материал термодинамику обобщает и систематизирует молекулярно-кинетическая теория.
- Теория поддерживает атомистическое мировоззрение,
- Теория связывает воедино механику и термодинамику
- Теория рассматривает обширный класс явлений, который невозможно ни объяснить, ни описать другими способами

Начала молекулярно-кинетической теории

- Мы будем опираться на модель идеального газа – простейшую из известных молекулярных моделей.
- Уравнение состояния идеального газа
  - $PV = \frac{M}{\mu} RT.$
- Идеальный газ – это газ хаотически движущихся материальных точек.
- «Точки» не имеют размера и единственным видом их взаимодействия друг с другом и со стенками является обмен импульсами.

Начала молекулярно-кинетической теории

- Молекулярно-кинетическая теория опирается на законы механики – в первую очередь на законы сохранения энергии и импульса.
- В основе ее математического аппарата лежит теория вероятностей.

Элементы теории вероятностей

- Событиями будем называть явления, которые в результате некоторого опыта могут произойти или не произойти.
- Если в данном опыте событие обязательно происходит, его называют достоверным, если оно не может произойти, его называют невозможным.

Элементы теории вероятностей

- Вероятностью события это отношение опытов, в котором это событие произошло к общему количеству опытов.
- Подбросим вращающуюся монетку.
- Равновозможных случая два или выпадение «орла» или «решки», и событие выпадения «орла» одно из равновозможных. Соответственно вероятность выпадения «орла» равна 1/2.
- Таким образом вероятность выпадения «орла» дважды подряд, равна ¼, а вероятность выпадения хотя бы одного «орла» при двух бросаниях будет равна 3/4.

Элементы теории вероятностей

- Пусть в коробке находится 35 красных, 40 зелёных и 25 белых шаров, всего их 100
- Вероятность вынуть красный шар равна 35/100,
- белый шар 1/4,
- зелёный 4/10.
- Лишь при достаточно большом числе испытаний получаемые результаты будут стремиться к указанным выше.

Элементы теории вероятностей

- Суммой событий *А* и *Б*, мы назовем событие состоящее в появлении или *А* или *Б* и обозначим *А + Б*. Соответствующая вероятность будет *Р(А + Б) = Р(А) + Р(Б)*
- Вероятность вытащить при первой попытке цветной шар будет $\frac{35}{100} + \frac{4}{10} = 0{,}75.$
- Произведением событий *А* и *Б* назовем событие, состоящее в появлении и А и Б.
- Если события независимы, т.е. вероятность появления *Б* не зависит от появления *А* то соответствующая вероятность будет обозначаться *Р(АБ) = Р(А)·Р(Б)*.

Элементы теории вероятностей

- Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно, какое именно.
- Случайные величины бывают дискретными. Примером может служить число попаданий в мишень неподготовленным стрелком при десяти выстрелах.
- Примером непрерывной случайной величины может служить расстояние от центра мишени при выстрелах.

Элементы теории вероятностей

- Тот факт, что в результате опыта случайная величина приняла некоторое значение есть событие, которое может характеризоваться вероятностью *P*.
- Это – вероятность возможных значений дискретной случайной величины (для краткости говоря «вероятность величины *X*).
- Сумма вероятностей всех значений дискретной случайной величины равна 1.

Элементы теории вероятностей

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,05	0,1	0,13	0,15	0,17	0,15	0,1	0,07	0,04	0,02

- Законом распределения (или просто – распределением) случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.
- Законом распределения дискретной случай величины называется таблица, в которой перечислены значения случайной величины и соответствующие им вероятности.

Элементы теории вероятностей

- Тот факт, что в результате проведения опытов непрерывная случайная величина приняла значения, лежащие в интервале [*x*, *x*+*dx*] есть событие, характеризуемое элементом вероятности *dW*. Это – вероятность того, что возможные значения случайной величины окажутся в этом интервале.

Элементы теории вероятностей

- Плотностью вероятности случайной величины *X* называется функция *f(x)*, такая, что $dW = f(x)dx$.
- Физики называют эту функцию функцией распределения.
  - $\int f(x)dx = 1$

в случае, когда интегрирование ведется по всей области возможных значений *X*.

Средние значения случайной величины

- Вычисление средних по большому числу молекул значений различных величин: скорости, энергии и т.д. является одной из задач молекулярно-кинетической теории.
- Эта задача решается методами теории вероятностей.
- Средние значения мы будем обозначать скобками - <*X*>.

Средние значения случайной величины

- Предположим, что вы сделали 100 выстрелов по мишени и решили подсчитать среднее значение своих результатов.
- Вы можете сделать это просто путем вычисления среднего арифметического
-
- $\langle X \rangle = \dfrac{3+5+8+10+\cdots+7}{100}.$
-

Средние значения случайной величины

- Другой способ вычисления среднего, использующий умножение.
- Предположим, что в единицу вы попали 5 раз, в двойку – 10, в тройку – 13, …., в десятку 2 раза попали.
- Тогда ту же среднюю величину $<X>$ вы будете считать иначе
- $\langle X \rangle = \frac{1\cdot 5+2\cdot 10+3\cdot 13+\cdots 10\cdot 2}{100} = 1\cdot\frac{5}{100} + 2\cdot\frac{10}{100} + \cdots 10\cdot\frac{2}{100}.$

Средние значения случайной величины

- Обратим внимание на то, что дроби в этой сумме как раз и представляют собой вероятности каждой из этих величин.
- В итоге мы можем записать формулу для вычисления среднего значения дискретной случайной величины
  - $\langle X \rangle = \sum_i x_i p_i,$
- Здесь x_i – возможные значения случайной величины, p_i –соответствующие им вероятности.
- Суммирование ведется по всем возможным значениям случайной величины.

Средние значения случайной величины

- Среднее значение непрерывной случайной величины можно вычислить аналогичным образом, заменив суммирование интегрированием
-
- $\langle X \rangle = \int x dW(x) = \int x f(x) dx,$
-
- где интеграл берется по всей области возможных значений случайной величины.

Идеальный газ с молекулярно-кинетической точки зрения

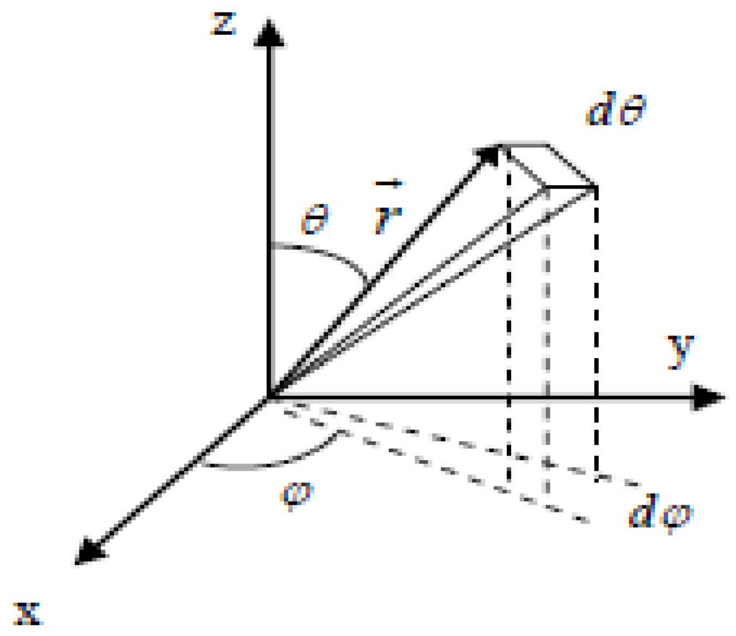
- С точки зрения молекулярной теории идеальный газ – это теоретическая модель газа, в которой пренебрегается взаимодействием между молекулами (за исключением взаимодействий в краткие моменты столкновений).
- В воздухе, например, среднее расстояние между молекулами примерно в 10^3 больше их размера, поэтому очевидно, что при рассмотрении многих явлений взаимодействием молекул можно пренебречь.

Идеальный газ с молекулярно-кинетической точки зрения

- Молекулы идеального газа находятся в основном в состоянии равномерного и прямолинейного движения.
- Все направления движения в отсутствие внешнего поля равновероятны.
- Движение имеет хаотический характер, так как после каждого столкновения скорости и направления движения существенным образом меняются.

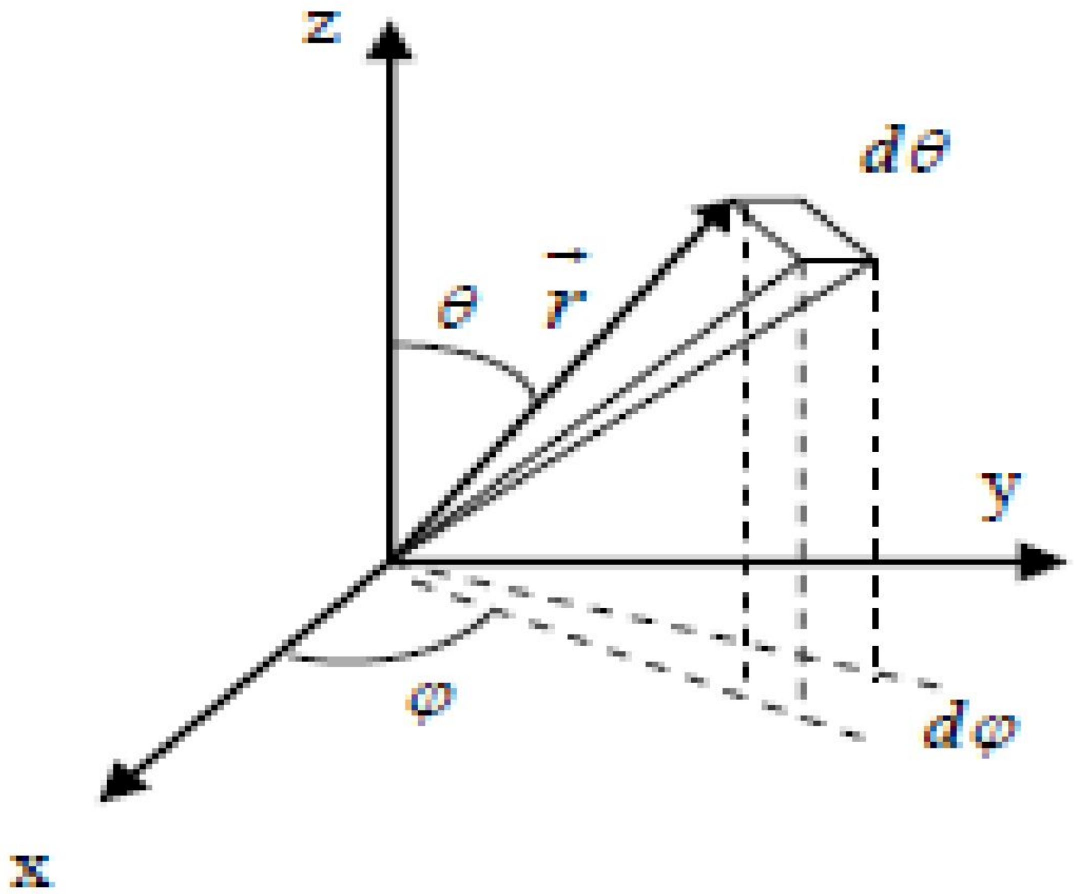
Направления движения молекул

- Выберем некоторое направление, характеризуемое углами θ и ϕ сферической системы координат
- Нас интересует доля молекул, движущихся именно в этом направлении
- Можно говорить только о вероятности иметь направление в малых интервалах углов от θ до $\theta + d\theta$ и от υ до $\upsilon + d\upsilon$. Эти углы задают в пространстве 4 направления



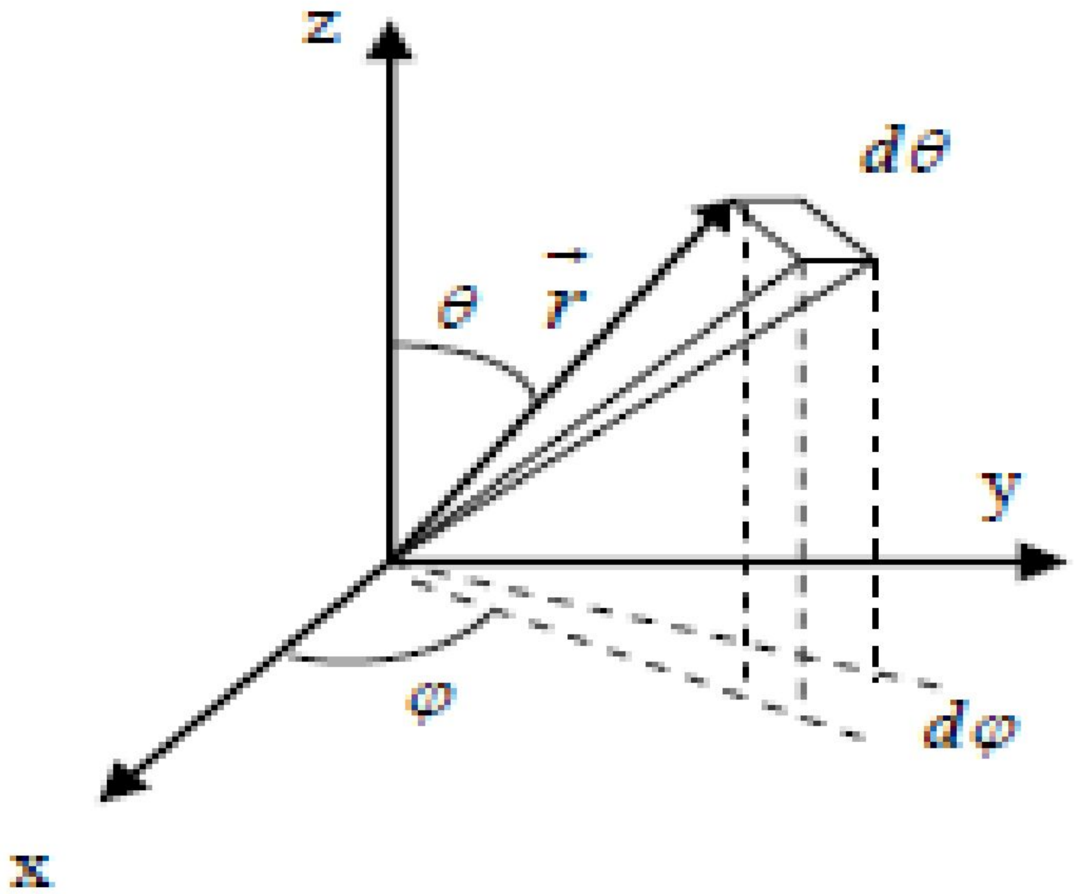
Направления движения молекул

- На единичной сфере задаваемые этими направлениями линии задают вершины криволинейного четырехугольника малой площади
- $dS = \sin\theta \, d\theta \, d\phi = d\Omega$,
- где $d\Omega$ – элемент так называемого телесного угла.



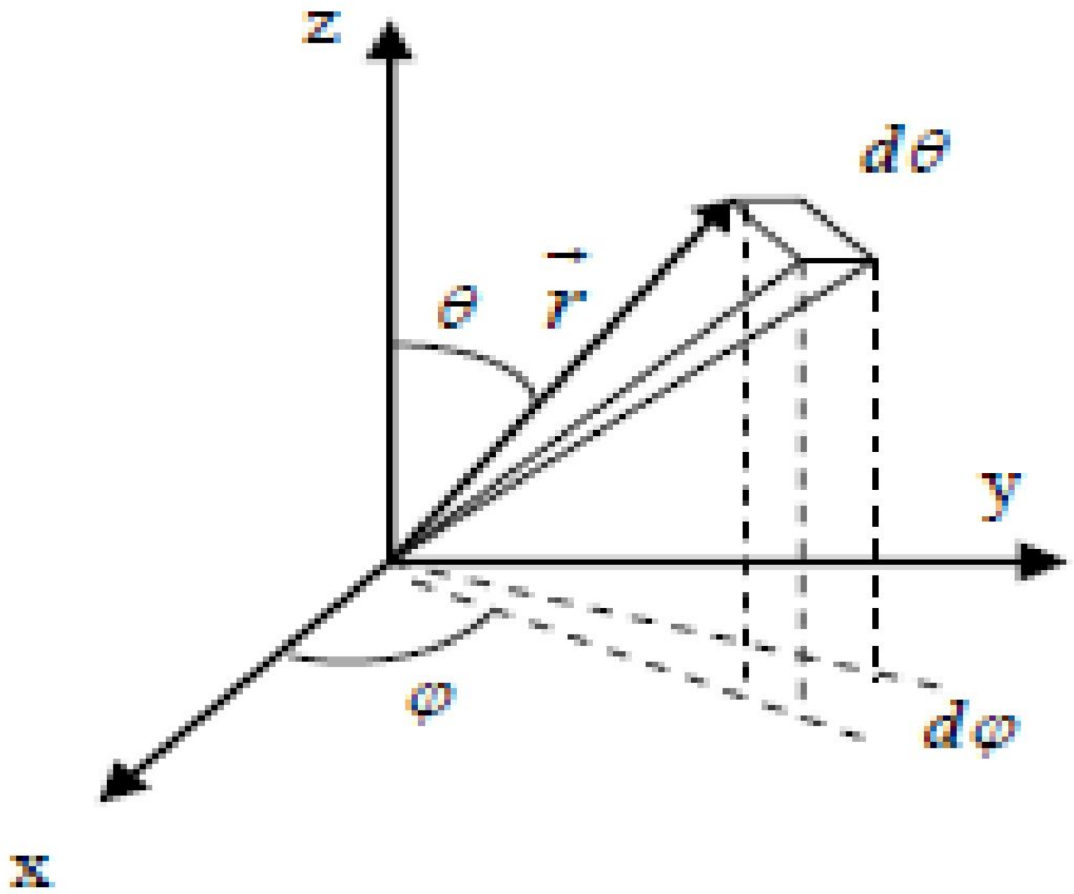
Направления движения молекул

- Вероятность попадания единичного вектора, направленного вдоль движения молекулы, именно в данный элемент поверхности есть отношение этой площади к полной площади поверхности единичной сферы (равной 4π):
-
- $dW(\theta, \varphi) = \frac{dS}{4\pi} = \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi}$.



Направления движения молекул

- При аксиальной симметрии от угла φ ничего не зависит. Вероятность тогда можно проинтегрировать по углам φ и получить $dW(\theta) = \frac{\sin\theta d\theta}{2}$. При полном же интегрировании по всей единичной сфере суммарная вероятность иметь все возможные направления равна единице:
-
- $\int dW(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 1$
  .
-



Вероятность значения скорости

- Абсолютная величина скорости меняется от нуля до бесконечности.
- Будем говорить о вероятности $dW(v)$ иметь модуль скорости в интервале от v до $v + dv$. Суммарная вероятность иметь всевозможные скорости, как и вероятность двигаться по всем направлениям, равна единице
-

$$\int_0^{\infty} dW(v) = 1$$

Среднее значение скорости

- Среднее значение модуля скорости выражается формулой
-
- $\langle v \rangle = \int_0^\infty v dW(v).$
-
- Найти среднее значение квадрата скорости можно аналогичным способом
-
- $\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 dW(v).$

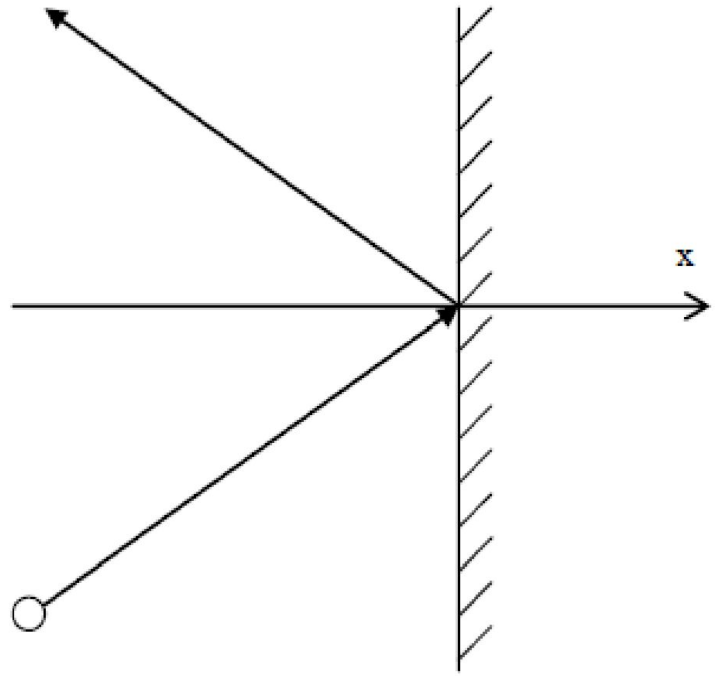
Среднее значение скорости

- Вероятность $dW(v_x)$ иметь скорость v_x вдоль направления x, о Вероятност $dW(v_y)$ иметь скорость v_y вдоль направления y, о Вероятности $dW(v_z)$ иметь скорость v_z вдоль направления z.
- Эти проекции скоростей могут быть как положительными, так и отрицательными, и меняются в бесконечных пределах
- Например, среднеквадратичная скорость $\langle v_x^2 \rangle$дается выражением
-

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_0^\infty v_x^2 dW(v_x).$$

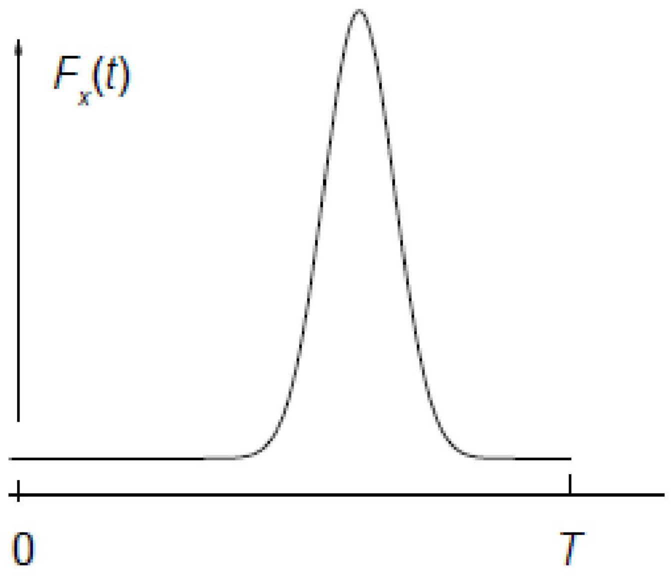
Давление идеального газа

- Давление в сосуде с газом создается ударами молекул о его стенку.
- Будем считать удары абсолютно упругими.
- Сначала рассмотрим удар одной молекулы.
- Ось, перпендикулярную стенке, обозначим за *x*.



Давление идеального газа

- При соударении стенка со стороны молекулы испытывает зависящую от времени силу в направлении оси *x*,
  - *Fx(t)*,
- которая изменяется от нуля до некоторой максимальной величины в момент наиболее сильного контакта со стенкой и спадает опять до нуля после столкновения



Давление идеального газа

- Выберем некоторый интервал времени T, который существенно превышает длительность столкновения и рассчитаем среднюю действующую в интервале от 0 до T силу. Эта средняя сила определяется интегралом
-
  - $$\langle F_x \rangle = \frac{\int_0^T F_x(t)dt}{T}$$
- Записав второй закон Ньютона в виде
  - $$\vec{F}(t)dt = d\vec{p}(t),$$
- можно выразить $\langle F_x \rangle$ следующим образом
-
- $$\langle F_x \rangle = \frac{\int_0^T F_x(t)dt}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T dp_x = \frac{1}{T}\big(p_x(\text{до удара}) - p_x(\text{после удара})\big) = 2\frac{mv_x}{T}.$$
-

Давление идеального газа

- Выберем теперь на стенке сосуда некоторую площадку *S* и учтем, что в единицу времени о площадку ударяется много молекул. Найдем суммарный импульс, который получает стенка
-
- $$\langle F_x \rangle = \frac{2m}{T} \sum_i v_{ix}.$$
- Значения компонент скоростей
- Целесообразно разбить молекулы на группы, обладающие близкими значениями проекций скорости v_x.
- Такие молекулы передают стенке одинаковый импульс.
-

Давление идеального газа

- Из всех молекул, налетающих за время *T* на площадь *S*, выберем только те, которые имеют скорость в интервале от *v*x до *v*x.+ *dv*x.
- Число таких молекул обозначим за *dN*(*vx, T, S*).
- Так как молекулы данной группы подлетают к стенке из примыкающего к ней объема величины $v_x TS$, то для *dN*(*vx, T, S*)
-

$$dN(v_x, T, S) = v_x TSdW(v_x)$$

Давление идеального газа

- Разбиение на группы позволяет рассматривать v_x как
  - $\langle F_x \rangle = \frac{2m}{T} STn \int_0^\infty v_x^2 dW(v_x).$
-
- Интеграл в этом выражении есть не что иное, как $\langle v_x^2 \rangle$.
- Поскольку только половина молекул в объеме летит в сторону стенки, то следует принять $n = n/2$. В итоге получаем
-
  - $\langle F_x \rangle = mSn \langle v_x^2 \rangle.$

Давление идеального газа

- Из теоремы Пифагора следует

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$

Из условия равной вероятности всех направлений получаем

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

то

$$P = \frac{2n}{3} \frac{\langle m v^2 \rangle}{2}.$$

Таким образом, мы установили, что давление пропорционально средней кинетической энергии молекул.

Температура

- Вопрос о связи температуры средней энергии молекул газа мы обсуждали в лекции 12.
- «Если два тела с разной температурой привести в контакт, то рано или поздно их температуры станут равными.
- Ровно то же самое произойдет со средней двух систем хаотически движущихся частиц, если так или иначе позволить им обмениваться энергией: средние энергии будут выравниваться.
- Это наблюдение позволило высказать гипотезу о том, что температура пропорциональна средней кинетической энергии молекул.»

Температура

- .Для одноатомного газа установлено следующее соотношение
-
- $$\frac{3}{2}kT = \frac{m\langle v^2\rangle}{2}.$$
- Средние кинетические энергии движения вдоль декартовых осей равны
-

$$\frac{m\langle v_x^2\rangle}{2} = \frac{m\langle v_y^2\rangle}{2} = \frac{m\langle v_z^2\rangle}{2} = \frac{kT}{2}$$

Уравнение идеального газа

-

  - $P = nkT$

-

- Это уравнение идеального газа, которое мы теперь получили не как обобщение экспериментальных данных, а в результате расчета, основанного на молекулярно-кинетической модели.

До следующей лекции