

# 5. УСТОЙЧИВОСТЬ САУ

# Устойчивость САУ

**Устойчивостью называют свойство САУ**

возвращаться к последующему установившемуся состоянию после приложения возмущающего воздействия, которое вывело её из состояния равновесия.

Системы АУ, обладающие указанным свойством, называют **устойчивыми**. Системы, в которых не восстанавливается равновесный режим, а при отклонениях от него регулируемая величина начинает неограниченно возрастать или совершать колебания с возрастающей амплитудой, называют **неустойчивыми**.

Обеспечение устойчивости является **необходимым условием работоспособности**.

Поэтому исследование САУ на устойчивость представляет собой одну из основных задач в ТН.

Различают два вида устойчивости: устойчивость в «малом» и устойчивость в «большом».

- САУ называют **устойчивой в «малом»**, если устойчивость проявляется в результате бесконечно малых изменений возмущающего воздействия. В том случае, когда система сохраняет устойчивое состояние при достаточно больших, конечных по величине изменениях возмущающего воздействия, то САУ называют **устойчивой в «большом»**.
- Для линейных систем регулирования требования устойчивости в «малом» является необходимым и достаточным условием устойчивости в «большом». Для нелинейной системы устойчивость в «малом» в общем случае не означает, что она устойчива в «большом».

Причиной неустойчивости замкнутых САУ является наличие в них элементов, способных запасать энергию. В **электрических цепях** такими аккумуляторами являются **индуктивности и ёмкости**. В **механических** системах ту же роль играют **движущиеся массы**, обладающие **механической инерцией**.

В **электромеханических системах**, системах **электропривода** такими накопителями энергии являются как **индуктивности и ёмкости**, так и **движущиеся массы**.

В замкнутых САУ часть энергии с выхода передаётся на вход системы. Если бы передача энергии совершалась без задержки времени, что реально невыполнимо, то, по-видимому, проблемы обеспечения устойчивости не было бы.

Применение **безынерционных аппаратов** – **вентильных преобразователей**, **полупроводниковых и вентильных усилителей** и так

## 5.1 Устойчивость

**Линейное звено является устойчивым, если после окончания внешнего воздействия его состояние с течением времени возвратится к исходному.**

Единичный импульс может быть рассмотрен как кратковременное воздействие. В таком случае об устойчивости линейного звена можно судить по значению  $x_{\text{ВЫХ}}(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ :

звено устойчиво, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\hat{U}\hat{O}}(t) = 0;$$

звено неустойчиво, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\hat{U}\hat{O}}(t) = \infty;$$

звено нейтрально, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\hat{U}\hat{O}}(t) \neq \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \infty \end{array} \right\}.$$

Если  $x_{\text{ВЫХ}}(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  является **периодической** функцией времени, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\text{ВЫХ}}(t + t_1) = x_{\text{ВЫХ}}(t_1) = x_{\text{ВЫХ}}(t_1 + T)$$

где  $T$  – период колебаний, то звено называется **консервативным**.

Каждому **вещественному** значению  $p_i$  соответствует слагаемое вида

$$x_{\text{АУО}}(t) = c_i \cdot e^{p_i t},$$

где  $c_i$  – постоянная интегрирования.

*Комплексной паре корней* характеристического уравнения

$$p_i = \alpha_i + j\omega_i; \quad p_{i+1} = \alpha_i - j\omega_i.$$

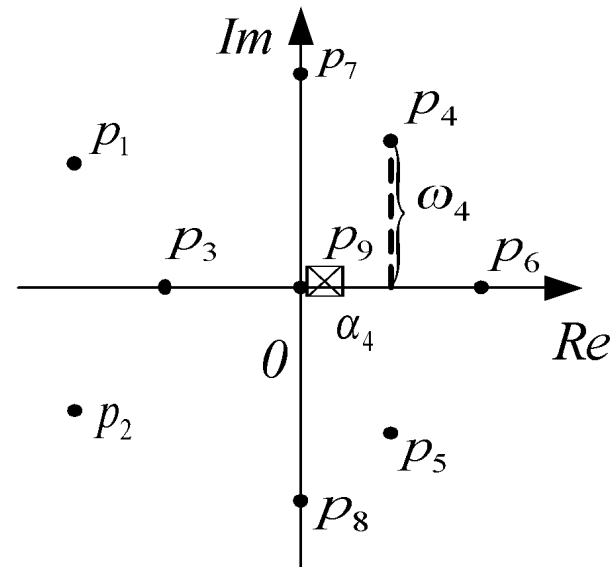
соответствует слагаемое  
вида

$$\begin{aligned} x_{k\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(t) &= x_{i\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(t) + x_{i+1\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(t) = \\ &= \tilde{n}_i \cdot e^{(\alpha_i + j\omega_i) \cdot t} + c_{i+1} \cdot e^{(\alpha_i - j\omega_i) \cdot t} = \\ &= A \cdot e^{\alpha_i \cdot t} \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_i). \end{aligned}$$

Следует различать три случая расположения корней, когда вещественная часть корня:

- 1) отрицательна ( $\alpha_i < 0$ );
- 2) положительна ( $\alpha_i > 0$ );
- 3) равна нулю ( $\alpha_i = 0$ ).

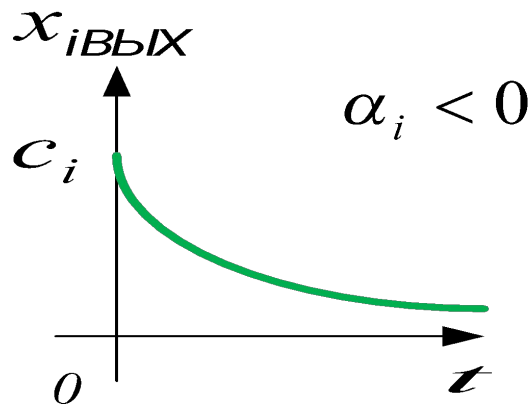
В первом случае корень лежит в **левой полуплоскости** корней, т.е. **левее мнимой оси** (см.  $p_1, p_2, p_3$ ), во втором случае – в **правой полуплоскости**, т.е. **правее мнимой оси** (см.  $p_4, p_5, p_6$ ); в третьем случае (см.  $p_7, p_8, p_9$ ) – **на мнимой оси**.



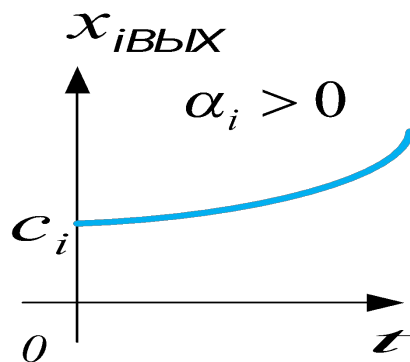


На рисунке для каждого случая расположения корней показаны графики при вещественном корне (а, б, в) и при паре сопряжённых комплексных корней (г, д, е).

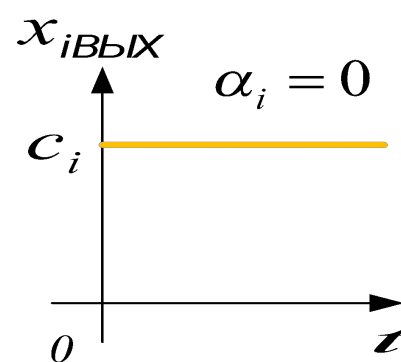
а)



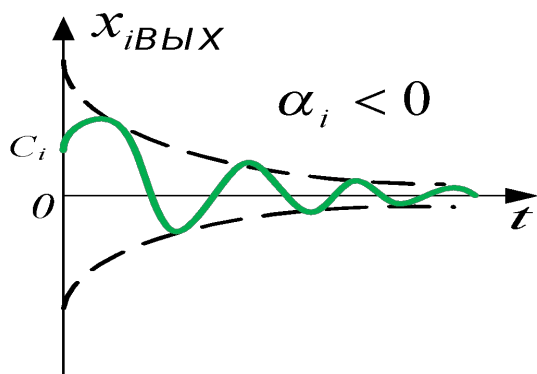
б)



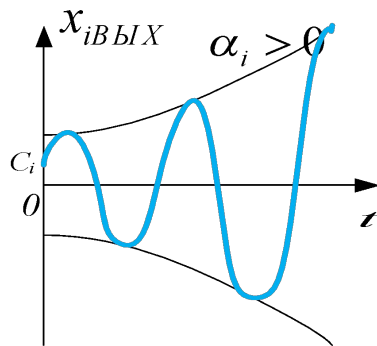
в)



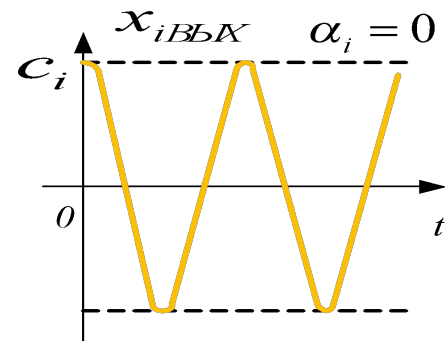
г)



д)



е)



**Необходимым и достаточным условием устойчивости линейного звена является отрицательное значение вещественной части всех корней характеристического уравнения  $W(p)$ , т.е. все корни характеристического уравнения должны лежать в **левой полуплоскости  $p$** .**

## 5.2 Критерии устойчивости

**Критерии устойчивости** – это правило, позволяющее без непосредственного определения корней характеристического уравнения САУ определять их расположение на комплексной плоскости корней.

Такая задача впервые была поставлена Максвеллом в 1868 г. и решена Гауссом в 1873 году. Позднее, в 1895 году по просьбе словацкого профессора Стодолы, занимающегося исследованием процесса регулирования турбины, швейцарским математиком Гурвицем был найден алгебраический критерий устойчивости, который формулирует условия устойчивости в форме определителей (в матричной форме). Несмотря на то, что критерии Гаусса и Гурвица одинаковы по содержанию и отличаются лишь по форме, критерий Гурвица нашёл более широкое применение.

Различают два вида критериев:

- Алгебраические критерии (Гаусса, Гурвица).
- Частотные критерии (Михайлова, Найквиста).

## 5.3 Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Пусть дано характеристическое уравнение

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p^1 + a_0 = 0.$$

Теорема Гурвица гласит: **все корни уравнения будут иметь отрицательные действительные части тогда и только тогда, когда все диагональные определители главного определителя положительны.**

Главный определитель определяется следующим образом:

1. По главной диагонали в порядке возрастания индексов выписываются все коэффициенты от  $a_1$  до  $a_n$ .
2. Каждая из строк дополняется вправо коэффициентами с убывающими индексами, влево – с возрастающими.
3. На месте отсутствующих коэффициентов ставятся нули.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

Таким образом, условием устойчивости (отрицательности действительных частей корней) по критерию Гурвица являются:

1. Все коэффициенты характеристического уравнения должны быть положительны – необходимое условие.

2. Все диагональные определители должны быть положительны – достаточное условие, то есть:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_n = \Delta > 0.$$

Можно показать, что если выполнены все условия критерия Гурвица, кроме одного ( $\Delta_{n-1} = 0$ ), то характеристическое уравнение системы имеет пару сопряженных чисто мнимых корней. Если же выполнены все условия Гурвица, кроме  $a_0 = 0$ , то уравнение имеет один нулевой корень - это следует из непосредственного рассмотрения характеристического уравнения. И в одном, и в другом случаях система находится на границе устойчивости: в первом случае она называется границей **колебательной устойчивости**, а в другом – **апериодической устойчивости**.

## Рассмотрим примеры.

**Пример 5.1.** Установить, устойчива ли система, если характеристическое уравнение её имеет

ВИД:

а)  $p^4 + 2 \cdot p^2 + p + 1 = 0$  - так как коэффициент  $a_3 = 0$ , то  
 $a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0$  есть не выполнено необходимое  
условие, то система неустойчива.

б)  $p^4 + 3 \cdot p^3 + 2 \cdot p^2 + p + 1 = 0,$   
 $a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0$

$\Delta_1 = 1 > 0,$   $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 < 0$  - система не устойчива, так как  
не выполнено достаточное  
условие.



**Пример 5.2.** Определить, при каких  $k$  система будет устойчива:

$$p^4 + 3p^3 + 2p^2 + p + k = 0,$$

$$a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0$$

а)  $k > 0$ .

б) Вычисляем диагональные

определители

$$\Delta_1 = a_1 = 1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3k > 0; \quad k < \frac{2}{3};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - k \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 9k > 0; \quad k < \frac{5}{9};$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & k \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Delta_3 > 0; \quad k < \frac{5}{9}, \quad \text{итак, система устойчива при } 0 < k < \frac{5}{9}.$$

# Существенные недостатки критерия Гурвица:

- Критерий лишен наглядности, носит формальный характер и ничего не говорит о качестве устойчивости, то есть насколько далека система от границы устойчивости.
- Коэффициенты или параметры, характеризующие физические свойства звеньев системы, входят зачастую в столь сложных комбинациях, что практически трудно установить, какие именно параметры и каких звеньев следует изменить, чтобы обеспечить устойчивость САР.
- Необходимо иметь аналитические уравнения звеньев и всей системы, что не всегда удобно.

## 5.1 Частотные критерии устойчивости

Впервые были использованы частотные методы определения устойчивости Найквистом при исследовании электронных усилителей с отрицательной обратной связью. Для САУ впервые обосновал и обобщил частотные методы в 1938 году [А.В.Михайлов](#) (статья «Метод гармонического баланса в теории регулирования», «Автоматика и телемеханика» №3, 1938 год).

Пусть дано [характеристическое уравнение](#)

$$A^n(p) = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Если заменить в  $A^n(p)|_{p = j \cdot \omega}$ , то получится [характеристический вектор](#)

---

$$A^n(j \cdot \omega).$$

В основе критерия Михайлова лежит известный в теории функций комплексного переменного **принцип аргумента**.

Характеристический вектор может быть разложен на множители по теореме **Виетта**

$$\overline{A^n(j\omega)} = a_n \cdot (j\omega - p_1) \cdot (j\omega - p_2) \cdot \dots \cdot (j\omega - p_n) = a_n \cdot \prod_{v=1}^n \overline{(j \cdot \omega - p_v)}.$$

Найдём аргумент комплексного числа

$$\arg \overline{A^n(j \cdot \omega)} = \sum_{i=1}^n \arg \overline{(j \cdot \omega - p_i)}.$$

Изменение аргумента вектора  $\overline{A^n(j \cdot \omega)}$  при изменении

$$-\infty < \omega < +\infty \quad \Delta \arg \overline{A^n(j \cdot \omega)}_{-\infty < \omega < \infty} = \sum_{i=1}^n \Delta \arg \overline{(j \cdot \omega - p_i)}_{-\infty < \omega < \infty} \quad (5.17)$$

Согласно (5.17) для определения изменения аргумента необходимо подсчитать сумму изменений аргументов двучленов

$$\overline{(j \cdot \omega - p_i)} \\ -\infty < \omega < \infty$$

В основу частотных критериев исследования устойчивости САУ положено следующее: если расположить корень  $p_i$  характеристического уравнения в комплексной плоскости и рассматривать вектор  $\overline{j \cdot \omega - p_i}$

при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то каждый вектор повернется на угол «б)»

$$\Delta \overline{\arg(j \cdot \omega - p_i)} = -\pi, \\ -\infty < \omega < \infty$$

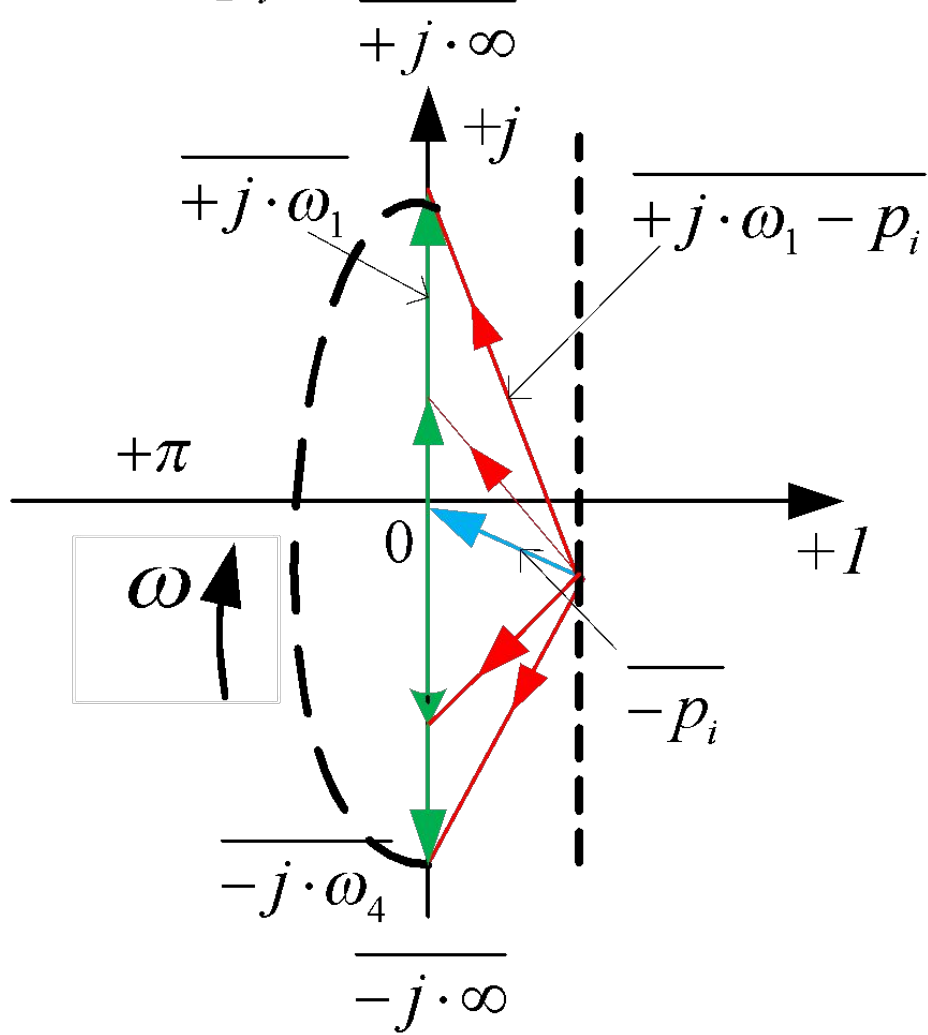
если корень  $p_i$  расположен в правой части комплексной полуплоскости;

и на угол «а)»

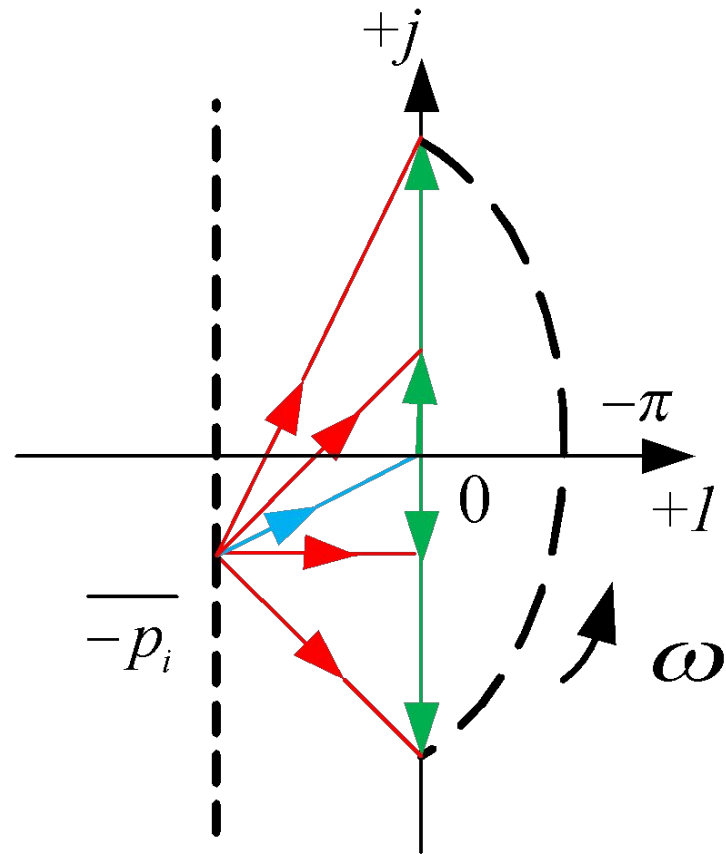
$$\Delta \overline{\arg(j \cdot \omega - p_i)} = +\pi, \\ -\infty < \omega < \infty$$

если корень  $p_i$  расположен в левой части комплексной полуплоскости.

a)  $\text{Re } p_i > 0$



b)  $\text{Re } p_i < 0$



Таким образом, если принять, что  $q$  корней характеристического уравнения  $n$ -порядка имеют положительную вещественную составляющую, а  $(n - q)$  – отрицательную, то характеристический вектор  $\overline{A^n}$  при изменении  $-\infty < \omega < +\infty$  получит приращение аргумента

$$\Delta \arg A^n(j \cdot \omega) = \pi \cdot (n - q) - \pi \cdot q = \pi \cdot (n - 2 \cdot q).$$

$$-\infty < \omega < +\infty$$

Для устойчивой системы при

$$-\infty < \omega < +\infty$$

изменении  $\Delta \arg A^n(j \cdot \omega) = \pi \cdot n.$

(1)

$$-\infty < \omega < +\infty$$

Выражения и представляют собой запись принципа аргумента для характеристического полинома  $A^n(p)$ .

## 5.2 Частотный критерий устойчивости Михайлова

Заменяем в полиноме  $A^n(p)$   $p$  на  $j \cdot \omega$ , тогда

$$\overline{A^n(j \cdot \omega)} = \overline{U(\omega) + j \cdot V(\omega)}$$

где  $U(\omega)$  – вещественная часть полинома  $\overline{A^n(j \cdot \omega)}$ ;

$V(\omega)$  – мнимая часть полинома  $\overline{A^n(j \cdot \omega)}$ .



На комплексной плоскости он может быть представлен в виде вектора.

При изменении  $\omega$   $-\infty$  до  $+\infty$  вектор  $\overline{A^n(j \cdot \omega)}$  своим концом опишет в комплексной плоскости кривую, которая называется годографом Михайлова или характеристикой кривой. Поскольку функция  $U(\omega)$  является чётной функцией  $\omega$ , а  $V(\omega)$  - нечётной то **годограф Михайлова симметричен относительно вещественной оси**. Поэтому нет необходимости рассматривать весь годограф Михайлова, а достаточно рассмотреть лишь одну его часть, которая вычерчивает вектор  $\overline{A^n(j \cdot \omega)}$  при изменении от 0 до  $\infty$ . Тогда из уравнения (1) следует, что для устойчивой системы приращение аргумента вектора  $\overline{A^n(j \cdot \omega)}$  при изменении  $0 < \omega < \infty$  должно быть

$$\Delta \arg \overline{A^n(j \cdot \omega)} = n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

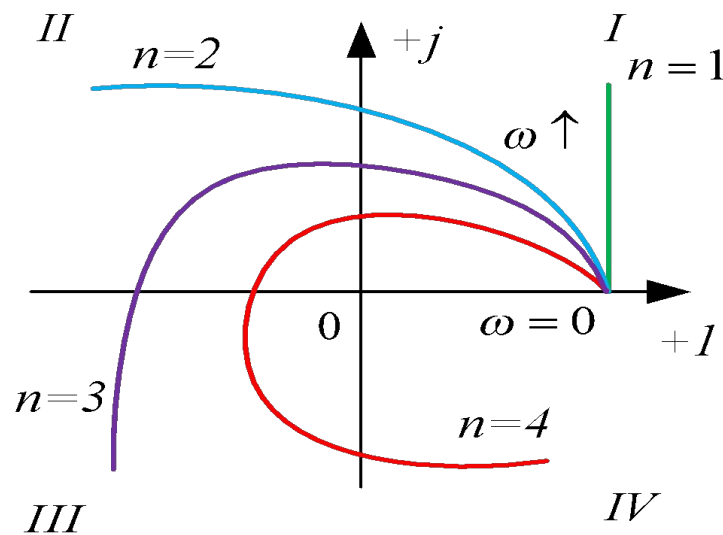
$$0 < \omega < \infty$$

Полученное выражение и есть частотный критерий устойчивости Михайлова в математической форме. Словами его можно выразить

так:

*САУ устойчива тогда и только тогда, когда характеристический вектор при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  последовательно обходит число квадрантов, равное порядку характеристического уравнения, нигде не обращаясь в нуль.*

Здесь показаны годографы Михайлова для устойчивых систем при различных значениях  $n$ . Все они начинаются при  $\omega = 0$  со значением  $a_0$  на положительной полуоси. Это означает, характеристические уравнения приведены к виду, при котором их коэффициенты положительны. Годографы уходят в бесконечность при  $\omega \rightarrow \infty$  и обходят соответствующее число квадрантов.



## Пример 1

Определить устойчивость системы,  
характеристическое уравнение которой

$$A^3(p) = p^3 + 2 \cdot p^2 + p + 1.$$

## Решение:

Заменим в уравнении  $p$  на  $j \cdot \omega$

$$A^3(j \cdot \omega) = (j \cdot \omega)^3 + 2 \cdot (j \cdot \omega)^2 + j \cdot \omega + 1 =$$

$$= -j \cdot \omega^3 - 2 \cdot \omega^2 + j \cdot \omega + 1 =$$

$$= (1 - 2 \cdot \omega^2) + j \cdot \omega \cdot (1 - \omega^2)$$

$$U(\omega) \qquad V(\omega)$$

Приравняем  $V(\omega)$  и  $U(\omega)$  к нулю, и найдём корни уравнений

$$U(\omega) = 1 - 2 \cdot \omega^2 = 0;$$

$$V(\omega) = \omega \cdot (1 - \omega^2) = 0;$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

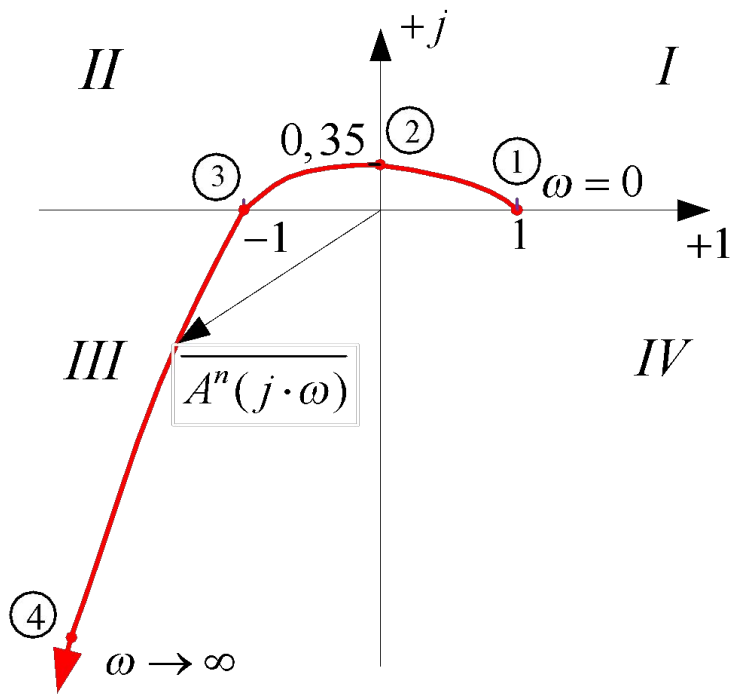
$$\omega_2 = 0;$$

$$\omega_3 = 1.$$

Составим таблицу:

$\omega$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\infty$
$U(\omega)$	1	0	-1	$-\infty$
$V(\omega)$	0	0,35	0	$-\infty$

Строим годограф Михайлова  $\overline{A(j \cdot \omega)}$ :



Вывод: система устойчива. Поскольку годограф Михайлова огибает три квадранта (по числу, равному порядку характеристического уравнения) в порядке возрастания  $I - II - III$

## Пример 2

Определить устойчивость системы,  
характеристическое уравнение которой

$$A^3(p) = p^3 + p^2 + p + 2.$$

## Решение:

Заменяем в уравнении  $p$  на  $j \cdot \omega$

$$A^3(j \cdot \omega) = (j \cdot \omega)^3 + (j \cdot \omega)^2 + j \cdot \omega + 2 =$$

$$= -j \cdot \omega^3 - \omega^2 + j \cdot \omega + 2 =$$

$$= (2 - \omega^2) + j \cdot \omega \cdot (1 - \omega^2)$$

$$U(\omega) \qquad V(\omega)$$

Приравняем  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  к нулю, и найдём корни уравнений

$$U(\omega) = 2 - \omega^2 = 0;$$

$$V(\omega) = \omega \cdot (1 - \omega^2) = 0;$$

$$\omega_1 = \sqrt{2}.$$

$$\omega_2 = 0;$$

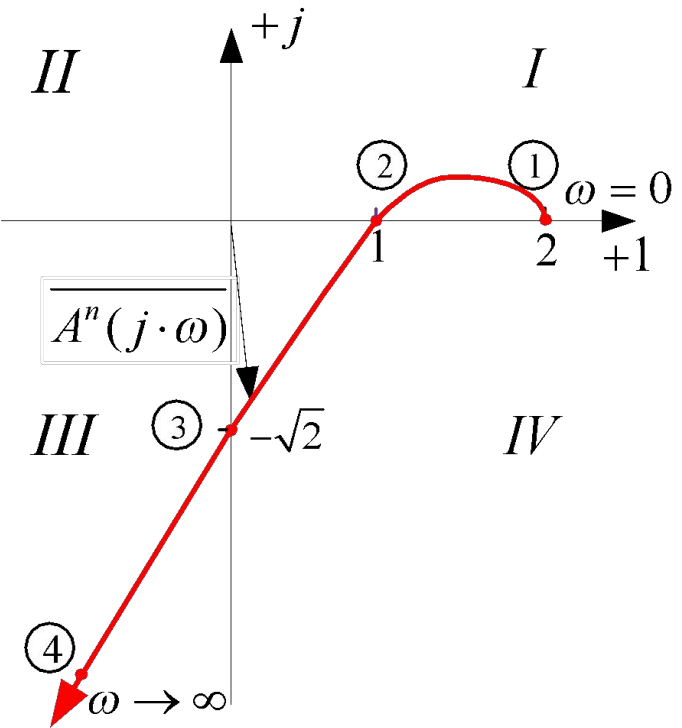
$$\omega_3 = 1.$$



Составим таблицу:

$\omega$	0	1	$\sqrt{2}$	$\infty$
$U(\omega)$	2	1	0	$-\infty$
$V(\omega)$	0	0	$-\sqrt{2}$	$-\infty$

Строим годограф Михайлова  $\overline{A(j \cdot \omega)}$ :



Вывод: система неустойчива. Поскольку годограф Михайлова огибает три квадранта (по числу, равному порядку характеристического уравнения), но не в порядке возрастания  $I - IV - III$

## Пример 3

Определить устойчивость системы,  
характеристическое уравнение которой

$$A^3(p) = p^3 + p^2 + p + 1.$$

## Решение:

Заменяем в уравнении  $p$  на  $j \cdot \omega$

$$\begin{aligned} A^3(j \cdot \omega) &= (j \cdot \omega)^3 + (j \cdot \omega)^2 + j \cdot \omega + 1 = \\ &= -j \cdot \omega^3 - \omega^2 + j \cdot \omega + 1 = \\ &= \underbrace{(1 - \omega^2)}_{U(\omega)} + j \cdot \omega \cdot \underbrace{(1 - \omega^2)}_{V(\omega)} \end{aligned}$$

Приравняем  $V(\omega)$  и  $U(\omega)$  к нулю, и найдём корни уравнений

$$U(\omega) = 1 - \omega^2 = 0; \quad V(\omega) = \omega \cdot (1 - \omega^2) = 0;$$

$$\omega_1 = 1.$$

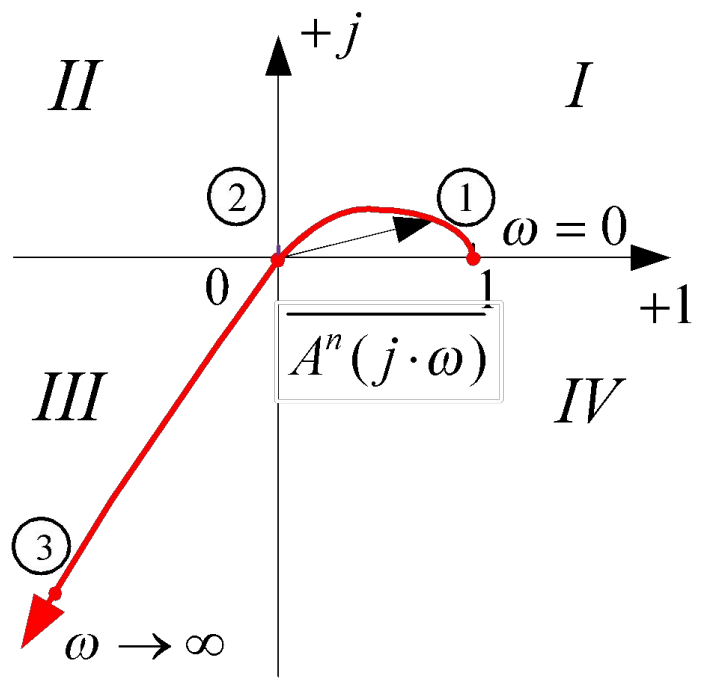
$$\omega_2 = 0;$$

$$\omega_3 = 1.$$

Составим таблицу:

$\omega$	0	1	$\infty$
$U(\omega)$	1	0	$-\infty$
$V(\omega)$	0	0	$-\infty$

Строим годограф Михайлова  $\overline{A(j \cdot \omega)}$ :

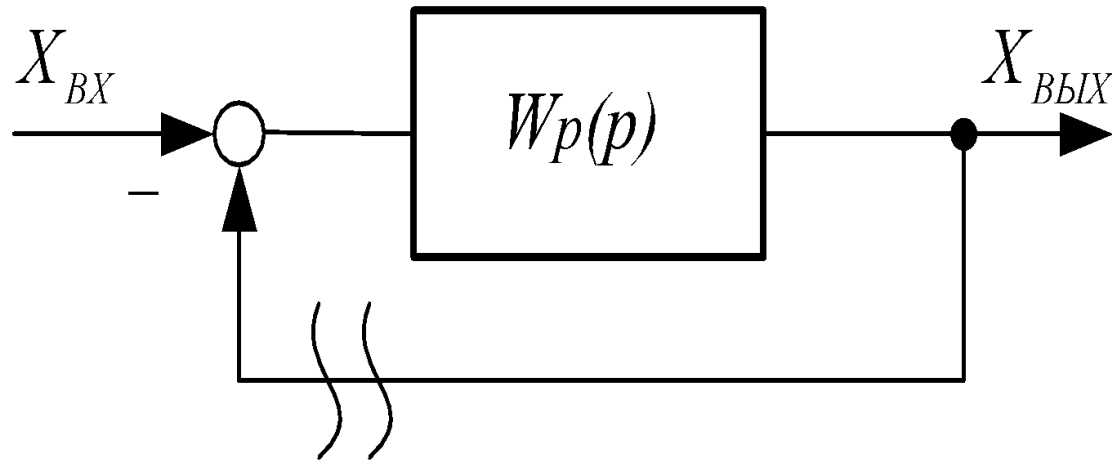


Вывод: система находится на грани устойчивости. Поскольку годограф Михайлова огибает два квадранта (по числу, не равному порядку характеристического уравнения), и проходит через нуль (I – III).

## 5.5 Частотный критерий устойчивости Найквиста

Для исследования устойчивости усилителей с обратной связью Найквист в 1932 г. предложил критерий устойчивости, основанный на анализе частотных характеристик системы. Для исследования устойчивости замкнутой системы управления, согласно этому критерию, необходимо знать амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой системы, которую можно получить аналитически, так и экспериментально. Последнее обстоятельство выгодно отличает рассматриваемый критерий устойчивости.

# Пусть дана система



В разомкнутом состоянии передаточная функция системы равна

$$W_P(p) = \frac{B^m(p)}{A^n(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}.$$

Передаточная функция замкнутой системы равна

$$W_{\zeta}(p) = \frac{W_P(p)}{1 + W_P(p)} = \frac{\frac{B^m}{A^n}}{1 + \frac{B^m}{A^n}} = \frac{B^m(p)}{A^n(p) + B^m} = \frac{B^m(p)}{C^n(p)}.$$

Так как  $n \geq m$ , то порядок полинома  $A^n(p)$  и полинома  $A^n(p) + B^m(p)$  одинаков.

Рассмотрим отдельно знаменатель

$$F(p) = 1 + W_P(p) = \frac{B^m(p) + A^n(p)}{A^n(p)} = \frac{C^n(p)}{A^n(p)},$$

где  $A^n(p) = 0$  - характеристическое уравнение разомкнутой системы;

$C^n(p) = 0$  - характеристическое уравнение замкнутой системы.

Т.е. характеристические уравнения разомкнутой и замкнутой систем связаны общим уравнением.

Для получения АФЧХ системы положим  $s = j \cdot \omega$

$$W_{\zeta}(j\omega) = \frac{W_P(j\omega)}{1 + W_P(j\omega)},$$

где  $W_{\zeta}(j \cdot \omega)$  - АФЧХ замкнутой САУ,

$W_P(j \cdot \omega)$  - АФЧХ разомкнутой САУ.

Рассмотрим три случая состояния разомкнутой системы: **устойчива**, **неустойчива** и **находится на грани устойчивости**.



# 1 случай - рассмотрим случай, когда разомкнутая система устойчива.

Если САУ в разомкнутом состоянии устойчива, то по критерию Михайлова

$$\Delta \arg \overline{A^n(j \cdot \omega)} = n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$0 \leq \omega < \infty$$

Если потребовать, чтобы система в замкнутом состоянии была устойчива, то должно удовлетворяться равенство

$$\Delta \arg \overline{A^n(j \cdot \omega) + B^m(j \cdot \omega)} = n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$0 \leq \omega < \infty$$

При этом из следует,

что

$$\Delta \arg \overline{1 + W_p(j\omega)} = \Delta \arg \frac{\overline{A^n(j\omega) + B^m(j\omega)}}{\overline{A^n(j\omega)}} = \Delta \arg \overline{A^n(j\omega) + B^m(j\omega)} - \Delta \arg \overline{A^n(j\omega)} =$$

$$0 \leq \omega < \infty$$

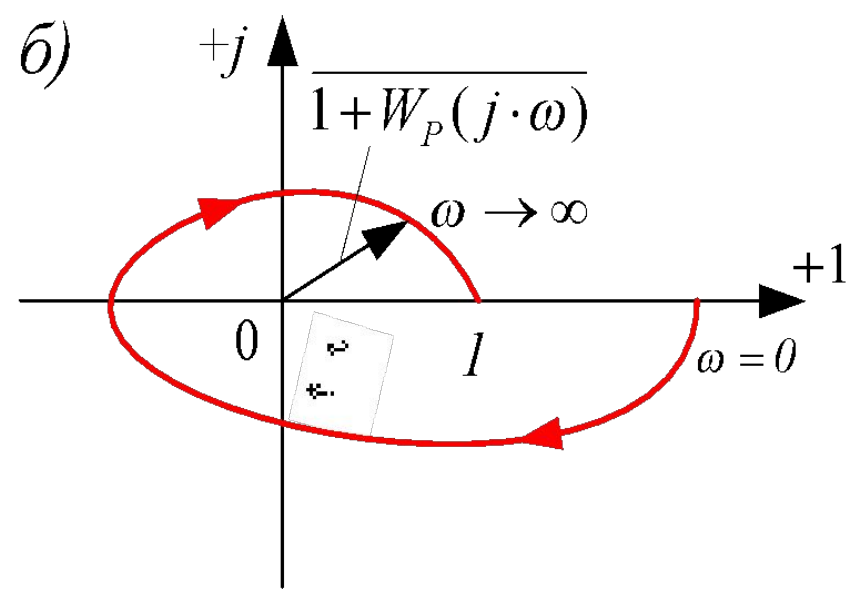
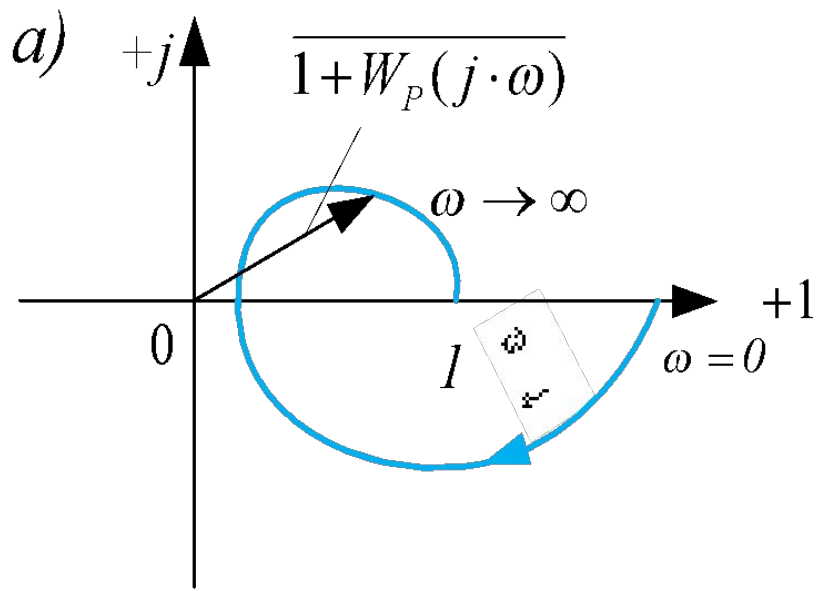
$$0 \leq \omega < \infty$$

$$0 \leq \omega < \infty$$

$$0 \leq \omega < \infty$$

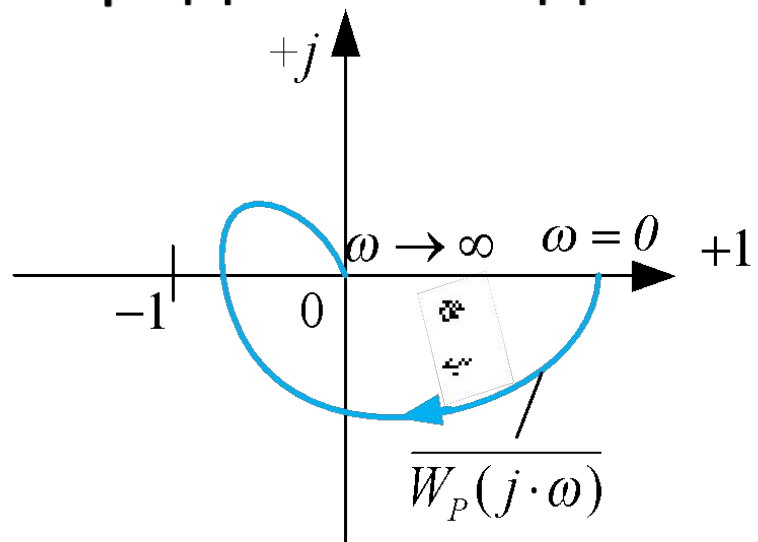
$$= n \frac{\pi}{2} - n \frac{\pi}{2} = 0.$$

Таким образом, система автоматического управления **устойчива**, если (и только если) изменение аргумента  $F(j \cdot \omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  равно 0, то есть устойчивое состояние означает, что годограф вектора  $\overline{1 + W_p(j \cdot \omega)}$  не огибает начало координат комплексной плоскости.

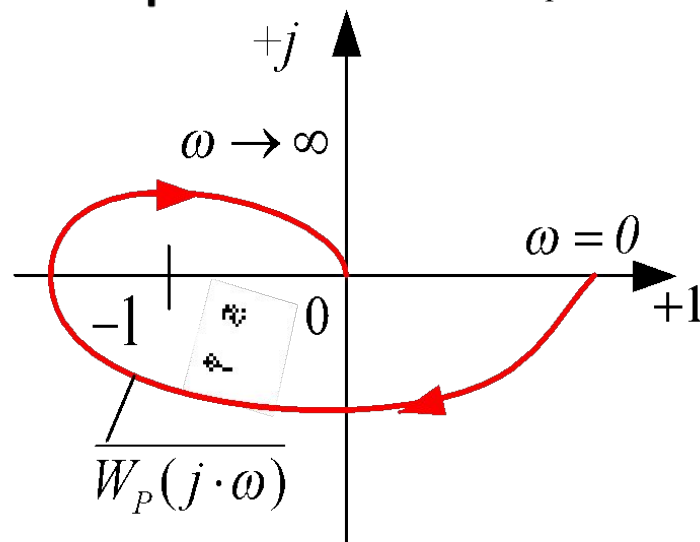


Годографы **устойчивой (а)** и **неустойчивой (б)** систем

Удобно рассматривать ту же кривую, но для вектора  $\overline{W_p(j\omega)}$  - поскольку годограф есть АФЧХ разомкнутой системы, для этого, очевидно, нужно перенести мнимую ось вправо на 1. Поскольку  $F(j \cdot \omega)$  отличается от  $\overline{W_p(j \cdot \omega)}$  на +1, то условие можно получить непосредственно для характеристики  $\overline{W_p(j \cdot \omega)}$



Устойчивая САУ



Неустойчивая

# Формулировка критерия Найквиста

*Если система управления устойчива в разомкнутом состоянии, то для устойчивости замкнутой системы автоматического управления необходимо и достаточно, чтобы при изменении  $0 \leq \omega < +\infty$  годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) системы в разомкнутом состоянии  $\overline{W_p(j \cdot \omega)}$  не охватывал точку с координатами  $(-1, j \cdot 0)$ .*

**2 случай** - система в разомкнутом состоянии **неустойчива**, то есть характеристическое уравнение  $A^n(p)$  имеет  $q$  корней, лежащих в правой полуплоскости комплексной плоскости корней.

Рассуждая аналогично устойчивой системе, по принципу приращения аргумента характеристического вектора  $A^n(j \cdot \omega)$  в данном случае для не устойчивой системы равно

$$\Delta \arg \overline{A^n(j \cdot \omega)} = \frac{\pi}{2}(n - 2 \cdot q);$$

$$0 < \omega < \infty$$

Для устойчивой замкнутой системы по-прежнему выполняется равенство

$$\Delta \arg \left[ \overline{A^n(j \cdot \omega) + B^m(j \cdot \omega)} \right] = \frac{\pi}{2} \cdot n.$$

$$0 \leq \omega < \infty$$

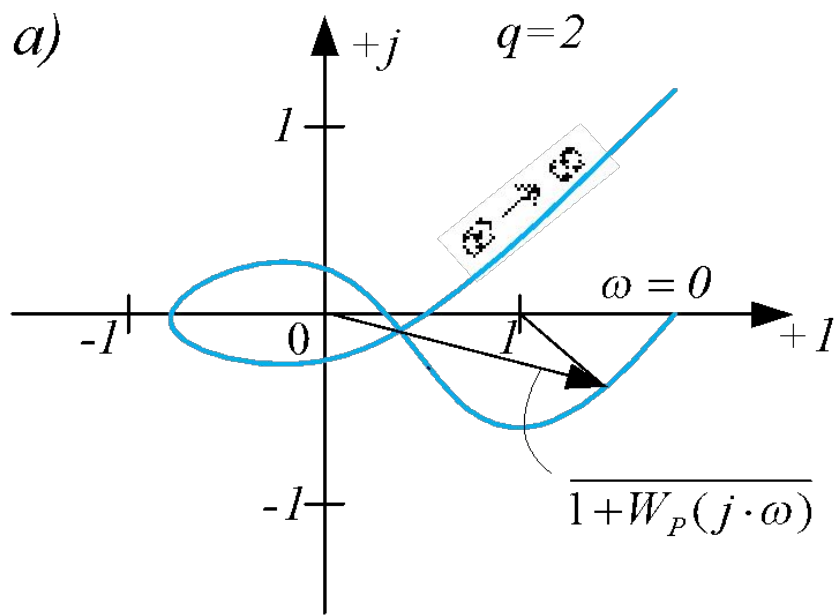
Таким образом, приращение аргумента равно

$$\Delta \arg \left[ \overline{1 + W_p(j\omega)} \right] = \Delta \arg \frac{\overline{B(j\omega) + A(j\omega)}}{\overline{A(j\omega)}} = \Delta \arg \overline{B(j\omega) + A(j\omega)} - \Delta \arg \overline{A(j\omega)} =$$

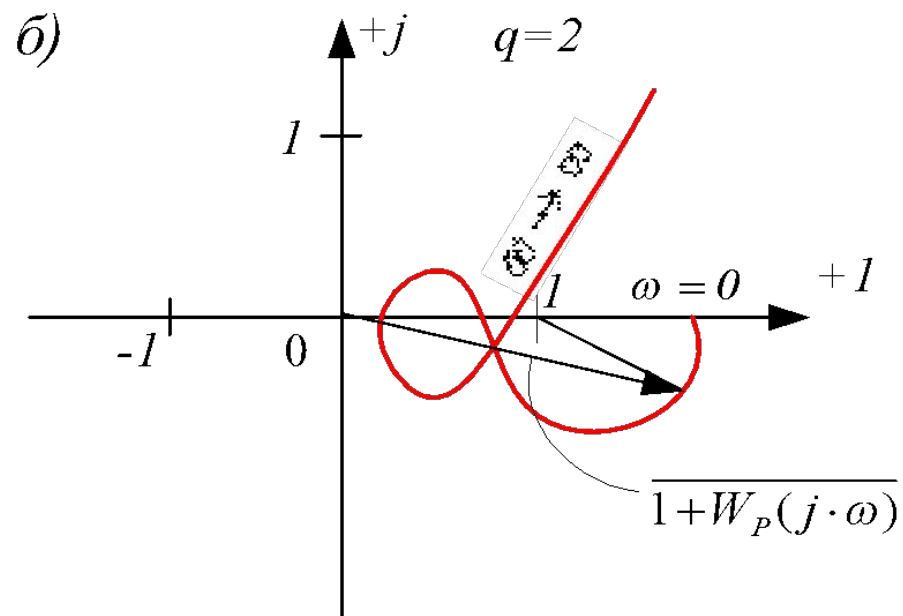
$$0 < \omega < \infty \qquad 0 < \omega < \infty \qquad 0 < \omega < \infty \qquad 0 < \omega < \infty$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot n - \frac{\pi}{2} \cdot (n - 2 \cdot q) = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot q = 2 \cdot \pi \cdot \frac{q}{2}.$$

То есть при неустойчивой системе в разомкнутом состоянии, имеющей  $q$  корней в правой полуплоскости, система в замкнутом состоянии будет устойчивой, если годограф вектора  $1 + W_p(j\omega)$  при изменении частоты от 0 до  $\infty$  огибает в положительном направлении начало координат  $\frac{q}{2}$  раз.

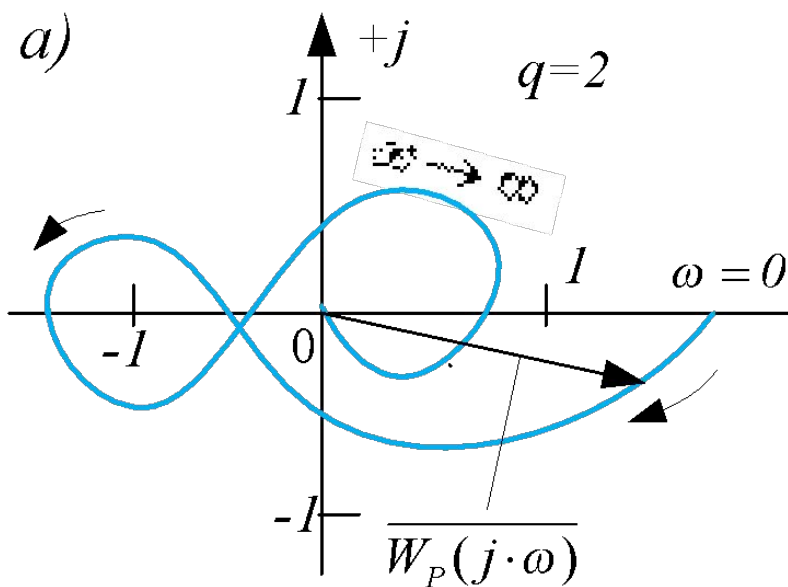


Устойчивая САУ

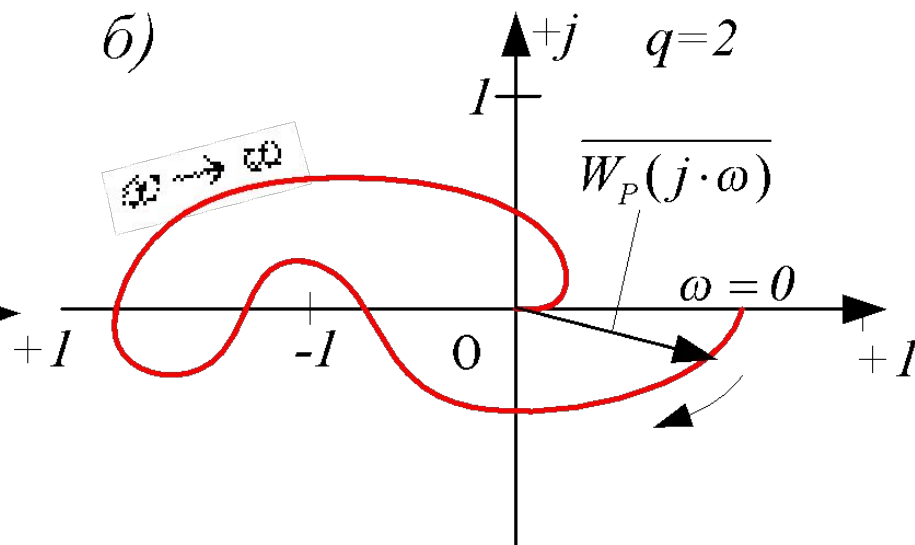


Неустойчивая САУ

Аналогично предыдущему: если перенести ось координат в точку  $(1, j \cdot 0)$ , то вместо годографа  $\overline{W_p(j \cdot \omega)}$  можно рассматривать лишь  $\overline{W_p(j \cdot \omega)}$ , то есть годограф АФЧХ в разомкнутом состоянии



Устойчивая САУ  
САУ



Неустойчивая



Тогда окончательная формулировка критерия Найквиста в этом случае имеет вид.

*Если реальная система в разомкнутом состоянии неустойчива и имеет  $q$  корней в правой полуплоскости, то в замкнутом состоянии система автоматического управления устойчива, если годограф АФЧХ системы в разомкнутом состоянии  $\frac{q}{2}$  раз охватывает в положительном направлении точку с координатами  $(-1, 0 \cdot j)$ .*

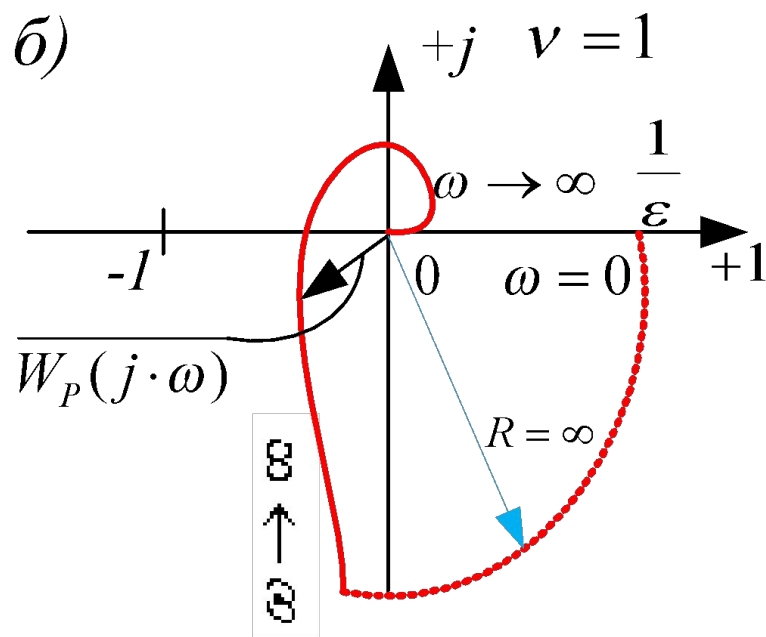
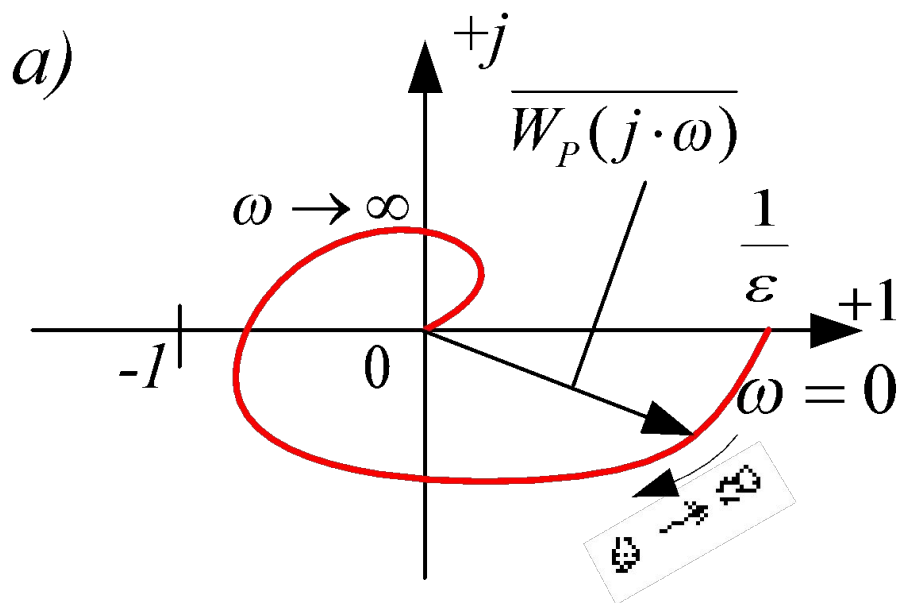
**3 случай** – система в разомкнутом состоянии находится на грани устойчивости. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

$$W_P(p) = \frac{B^m(p)}{p^v \cdot A_1^n(p)},$$

где  $v$  - число нулевых корней характеристического уравнения системы в разомкнутом состоянии;  
 $B^m(p), A_1^n(p)$  – полиномы от  $p$ , причём  $A_1(p)$  не имеет нулей в правой полуплоскости и на мнимой оси.

В случае, когда САУ в разомкнутом состоянии имеет  $V$  нулевых корней ( $V$  интегрирующих звеньев) анализ устойчивости замкнутой САУ можно вести аналогично случаю устойчивой САУ в разомкнутом состоянии. Для этого условно положим нулевые корни лежащими в левой (устойчивой) полуплоскости корней и численно равными  $\varepsilon$ . Тогда по критерию Найквиста, для устойчивых САУ в разомкнутом состоянии замкнутая САУ устойчива, если годограф ЛФЧХ САУ в разомкнутом состоянии не огибает точку с координатами  $(-1, 0 \cdot j)$  (рис. *a*).

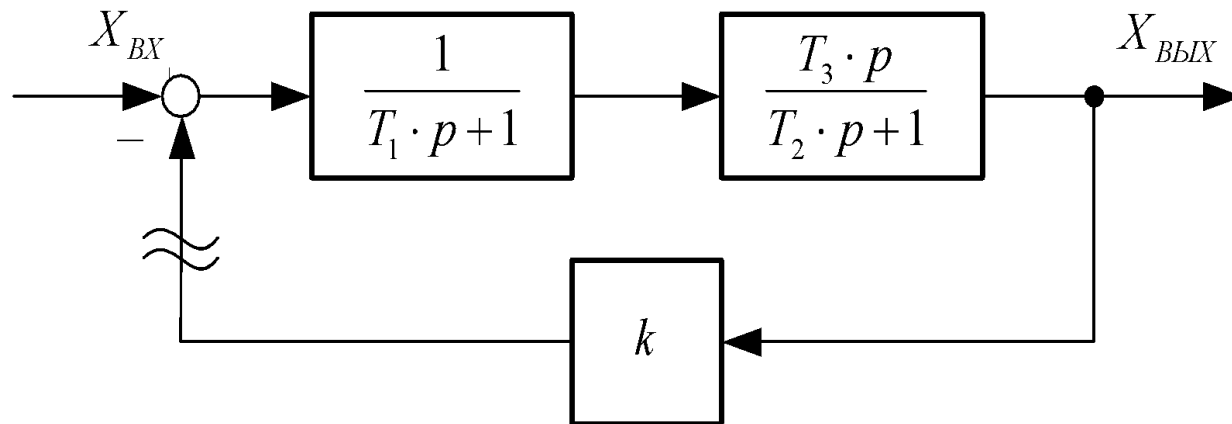
Устремим теперь  $\varepsilon \rightarrow 0$ , тогда реальная АФЧХ САУ в разомкнутом состоянии будет дополняться частью окружности бесконечно большого радиуса, начинающейся с положительной действительной полуоси



Таким образом, критерий Найквиста может быть сформулирован следующим образом:

*Если САУ в разомкнутом состоянии имеет  $\nu$  нулевых корней, то замкнутая САУ устойчива, если годограф АФЧХ в разомкнутом состоянии дополняется окружностью бесконечно большого радиуса, начинающейся с положительной полуоси и проходящей через  $\nu$  квадрантов, не огибает точку с координатами  $(-1, 0 \cdot j)$ .*

# Пример 1. Определить устойчивость следующей САУ



## Решени

Реально такой структурной схеме может соответствовать система Г-Д (генератор-двигатель) с отрицательной обратной связью по току.

Передаточная функция разомкнутой САУ равна

$$W_P(p) = \frac{k \cdot T_3 \cdot p}{(T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)}.$$

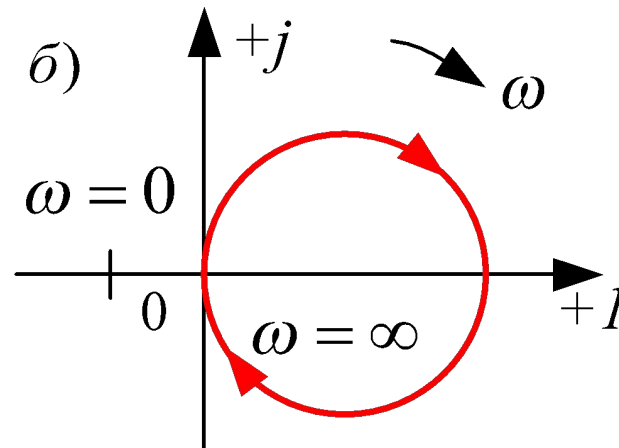
Получим АФЧХ, заменим  $p \rightarrow j \cdot \omega$

$$W_P(j \cdot \omega) = \frac{k \cdot T_3 \cdot j \cdot \omega}{(T_1 \cdot j \cdot \omega + 1) \cdot (T_2 \cdot j \cdot \omega + 1)} = A_P(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi_P};$$

$$A_P(\omega) = \frac{k \cdot T_3 \cdot \omega}{\sqrt{(\omega^2 \cdot T_1^2 + 1) \cdot (\omega^2 \cdot T_2^2 + 1)}};$$

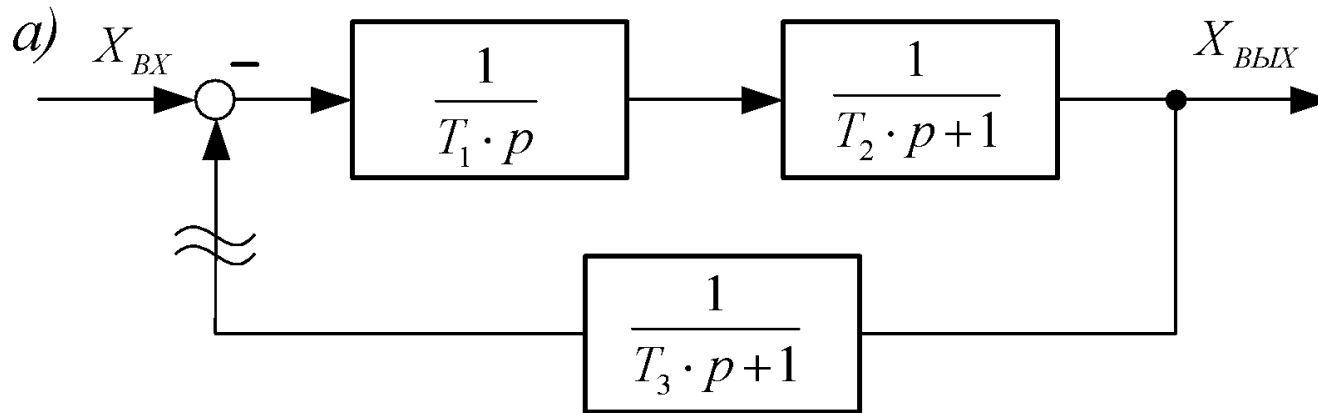
$$\varphi_P(\omega) = 90^\circ - \operatorname{arctg} T_1 \cdot \omega - \operatorname{arctg} T_2 \cdot \omega.$$

Не приводя построения годографа АФЧХ отметим, что  $\varphi_P(\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  изменяется от  $+90^\circ$  до  $-90^\circ$ . При любых значениях коэффициента  $k_{oc}$  АФЧХ разомкнутой системы не проходит через точку  $(-1, 0 \cdot j)$ , то есть такая система всегда устойчива (рис. б). Иначе говоря, система с общим порядком интегрируемости равным 1 всегда устойчива (система нулевого порядка тем более устойчива).





## Пример 2. Определить устойчивость САУ вида



$T_1 = 0,03$  сек;  $T_2 = 0,02$  сек;  $T_3 = 0,01$   
сек.

Так как система имеет интегральное звено, то она относится к разряду астатических САУ.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_P(p) = \frac{1}{T_1 \cdot p \cdot (T_2 \cdot p + 1) \cdot (T_3 \cdot p + 1)}.$$

Её АФЧХ получается, если  $p \rightarrow j \cdot \omega$

$$W_P(j \cdot \omega) = \frac{1}{T_1 \cdot j \cdot \omega \cdot (j \cdot \omega \cdot T_2 + 1) \cdot (j \cdot \omega \cdot T_3 + 1)} = A_p(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi_P};$$

$$A_p(\omega) = \frac{1}{T_1 \cdot \omega \cdot \sqrt{(\omega^2 \cdot T_2^2 + 1) \cdot (\omega^2 \cdot T_3^2 + 1)}};$$

$$\varphi_P = -90^\circ - \arctg \omega \cdot T_2 - \arctg \omega \cdot T_3.$$

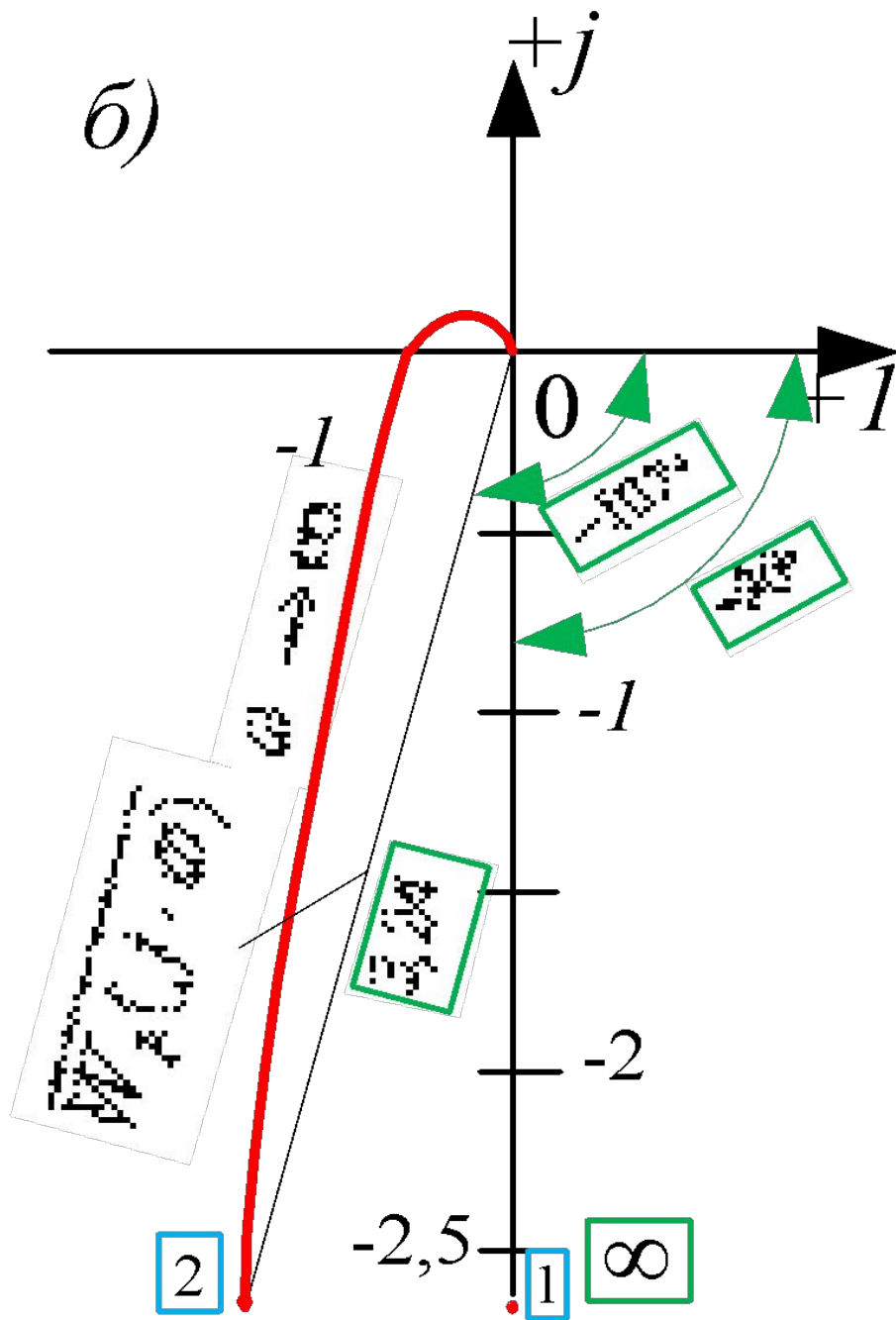
Годограф АФЧХ проходит от  $-90^\circ$  через  $-180^\circ$  до  $-270^\circ$  при изменении  $0 \leq \omega < +\infty$ , то есть по 3 и 2 квадранту комплексной плоскости. Система может быть устойчивой и неустойчивой. Для конкретности положим значения  $T$  (как записано). В этом случае

$$A_p(\omega) = \frac{1}{0,03 \cdot \omega \cdot \sqrt{(1 + 4 \cdot \omega^2 \cdot 10^{-4}) \cdot (1 + \omega^2 \cdot 10^{-4})}},$$

$$\varphi_p = -90^\circ - \operatorname{arctg} 0,02 \cdot \omega - \operatorname{arctg} 0,01 \cdot \omega.$$

Составим таблицу

	0	10	20	30	50	100	
		3,24	1,52	0,52	0,42	0,105	0
	$-90^\circ$	$-107^\circ$	$-123^\circ$	$-138^\circ$	$-162^\circ$	$-198^\circ$	$-270^\circ$



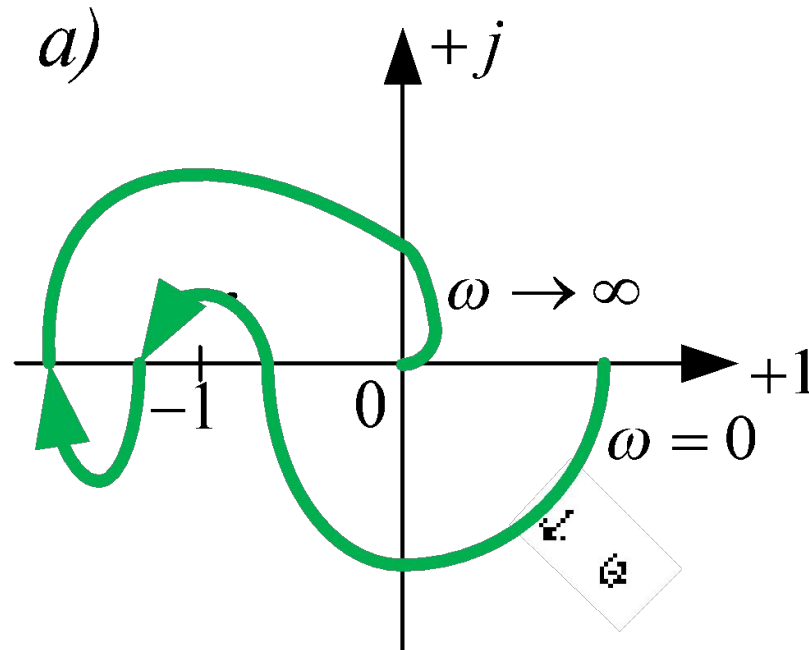
**Вывод:** годограф АФЧХ не охватывает точку  $(-1, 0 \cdot j)$ , поэтому САУ в замкнутом состоянии система устойчива.

## **Обобщенный критерий Найквиста (случаи 1-3). Правило перехода**

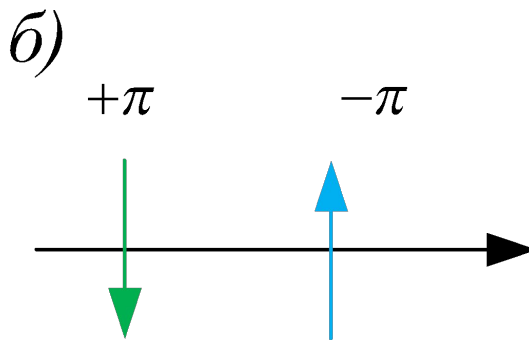
Критерий Найквиста в общем случае имеет формулировку применимую для всех рассмотренных выше случаев.

*Если имеется  $\nu$ -нулевых корней и  $q$  корней – в правой полуплоскости в разомкнутом состоянии, то в замкнутом состоянии система автоматического управления будет устойчива, если годограф АФЧХ в разомкнутом состоянии, дополненный дугой радиусом  $R = \infty$  начинающийся с действительной положительной полуоси в  $\frac{q}{2}$  раз охватывает точку  $[-1;0]$  в положительном направлении.*

Понятие «охват точки  $(-1, j \cdot 0)$ » ], используемое в приведённых выше формулировках, имеет некоторую неопределённость. Действительно, трудно сразу сказать, охватывает или не охватывает эту точку частотный годограф  $W_p(j \cdot \omega)$ , изображённый на рисунке *a*).



В сомнительных случаях можно прибегать к помощи формульных записей критерия Найквиста. Лучше, однако, дать критерию Найквиста иную формулировку, основанную на подсчёте числа переходов частотного годографа  $W_p(j \cdot \omega)$  через отрицательную действительную полуось от  $-1$  до  $-\omega$ . Будем считать такой переход положительным "+ $\pi$ ", если при возрастании  $\omega$  годограф переходит из верхней полуплоскости в нижнюю, и отрицательным "- $\pi$ ", если годограф переходит из нижней полуплоскости в верхнюю.



Общая формулировка критерия Найквиста охватывает все три рассмотренных выше случая.

*Для устойчивости САУ в замкнутом состоянии*

*необходимо и достаточно, чтобы на участке*

*$(-\infty - 1; j \cdot 0)$  разность сумм положительных*

*"  $+\pi$ " и отрицательных "  $-\pi$ " переходов*

*частотного годографа комплексного*

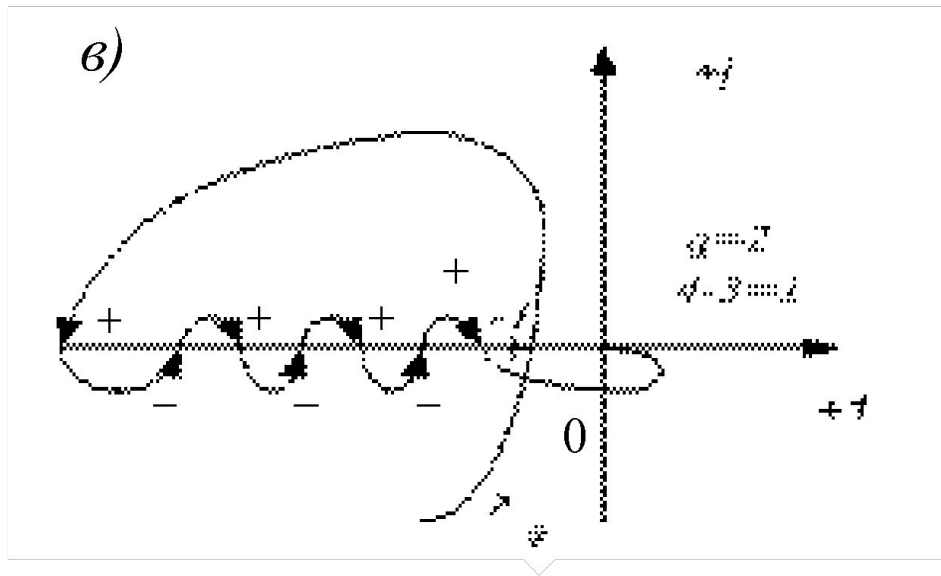
*коэффициента передачи разомкнутой системы*

*$W_p(j\omega)$  была равна  $\frac{q}{2}$ , то есть*

, где

$q$  – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.





На рисунке в) показан годограф  $W_p(j \cdot \omega)$  устойчивой замкнутой системы. Годограф имеет четыре положительных и три отрицательных перехода, следовательно, разность между числами переходов равна единице. Согласно приведённой формулировке критерия устойчивости рассматриваемая система устойчива в замкнутом состоянии.

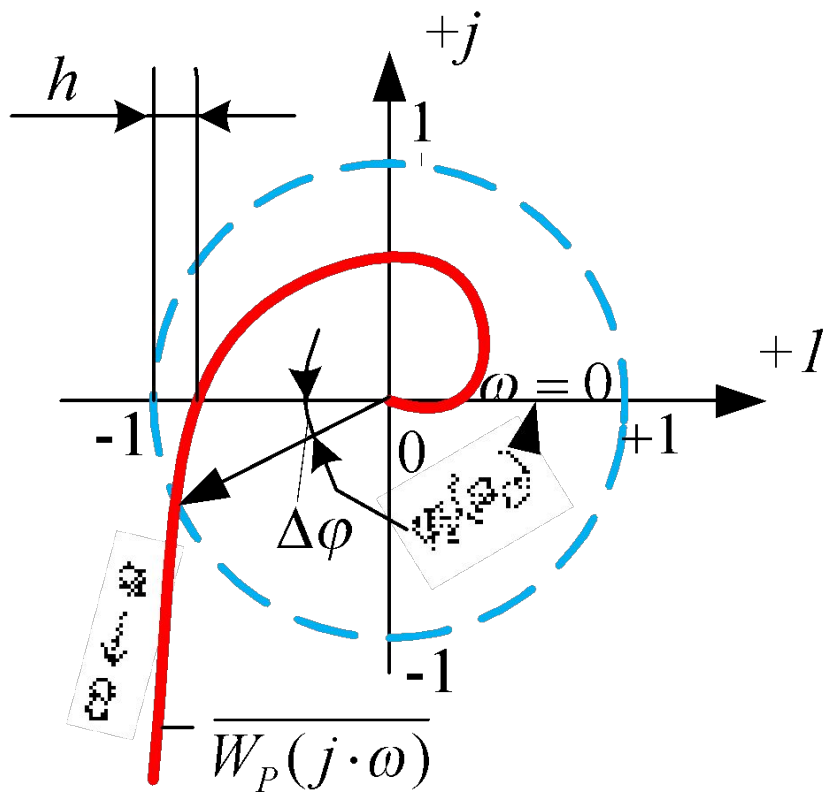
Недостаток критерия Найквиста тот, что приходится рисовать годограф ЛФЧХ.

## *Понятие о запасе устойчивости*

Устойчивость замкнутой системы автоматического управления зависит от расположения АФЧХ САУ в разомкнутом состоянии от точки  $(-1, j \cdot 0)$ . Чем ближе АФЧХ проходит к точке  $(-1, j \cdot 0)$ , тем система автоматического управления ближе к границе устойчивости.

Удаление АФЧХ САУ в разомкнутом состоянии от точки  $(-1, j \cdot 0)$  может быть охарактеризовано так называемыми запасами устойчивости по модулю и фазе.

Запасом устойчивости по фазе называют угол  $\Delta\varphi$ , образованный радиусом, проведённым через точку пересечения  $W_p(j \cdot \omega)$  с окружностью единичного радиуса и отрицательной действительной осью.



Эта величина показывает, на сколько нужно увеличить или уменьшить фазу системы, не изменяя ее амплитуду, чтобы устойчивая прежде система оказалась на границе устойчивости.

Частота, при которой  $\operatorname{mod} W_p(j \cdot \omega_c) = A_p(\omega_c) = 1$  называется **частотой среза** системы  $\omega_c$ .

Это та частота, при которой амплитуда колебаний сигнала обратной связи равна амплитуде колебаний входного сигнала. Запас устойчивости по фазе в значительной мере определяет качество переходного процесса в САУ. При проектировании САУ стремятся выбрать её параметры так, чтобы

$$|\Delta\varphi| = 180^\circ - |\varphi_p(\omega_c)|; \quad \Delta\varphi \geq (30 \dots 40)^\circ.$$

Запасом устойчивости по модулю (или по амплитуде) называется величина  $h$ , показывающая, на сколько необходимо увеличить или уменьшить величину передаточного коэффициента системы при неизменных значениях всех остальных параметров, чтобы устойчивая прежде система оказалась на грани устойчивости.

Чем выше запас устойчивости по модулю  $h$  и  $\Delta L = lgh$ , тем САУ более устойчива, и менее колебательна.

Чем меньше запас устойчивости по модулю  $\Delta L$ , тем система автоматического управления менее устойчива, а при  $\Delta L = 0$  система автоматического управления находится на грани устойчивости и в ней вероятны возникновения колебаний.

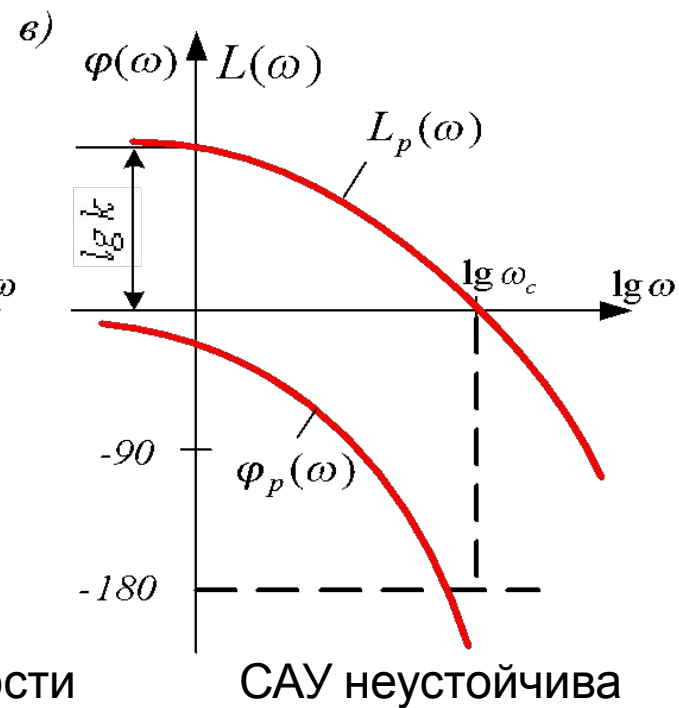
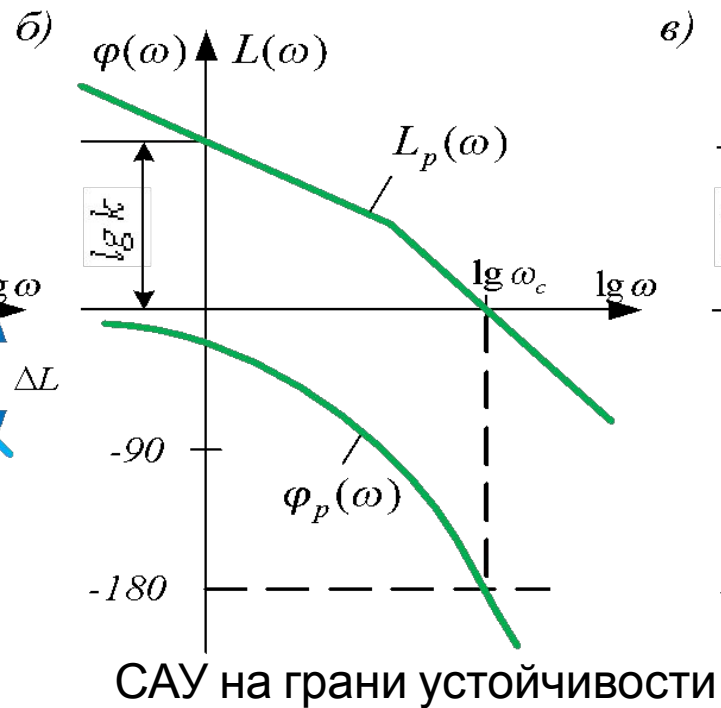
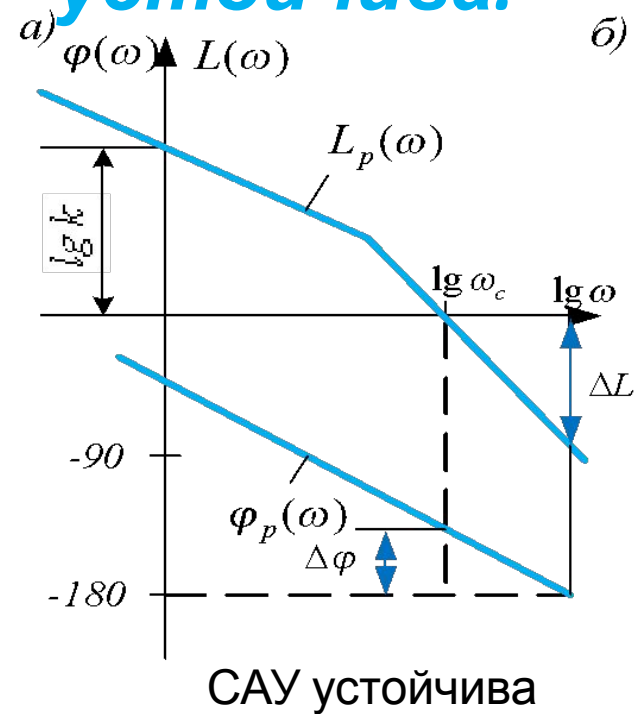
## Суждение об устойчивости на основании критерия Найквиста по логарифмическим частотным характеристикам системы в разомкнутом состоянии

Критерий Найквиста можно использовать и по отношению к логарифмическим частотным характеристикам. Согласно критерию устойчивости Найквиста САУ устойчива (если), при  $|\varphi_P(\omega_C)| < 180^\circ$

Если использовать логарифмический масштаб, то это означает, что

$$L_P(\omega_C) = \lg A_P(\omega_C) = \lg 1 = 0, \quad |\varphi_P(\omega_{\tilde{N}})| < 180^\circ$$

**Если логарифмическая фазо-частотная характеристика системы в разомкнутом состоянии при частоте среза (то есть при частоте, где логарифмическая амплитудно-частотная характеристика пересекает ось абсцисс) не достигает значения  $-180$  град, то система в замкнутом состоянии устойчива.**



На рисунке *a)* показаны запасы устойчивости по фазе и по амплитуде, определённые по логарифмическим характеристикам для устойчивой системы. Для системы, находящейся на грани устойчивости  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta L$ . Для неустойчивой системы запасов устойчивости не существует.

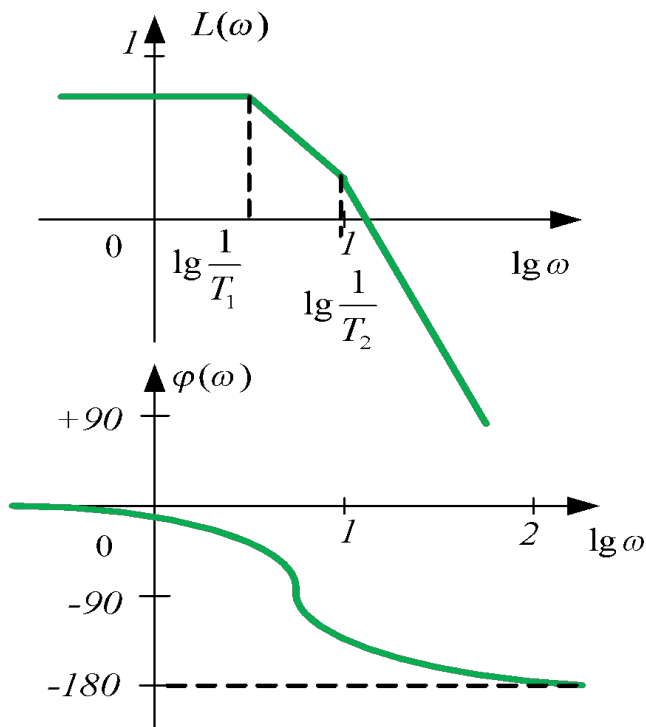
Критерий Найквиста легко можно сформулировать для логарифмических амплитудно-фазовых характеристик, используя понятия о положительных и отрицательных переходах.



**Пример 1.** Определить устойчивость системы автоматического управления, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

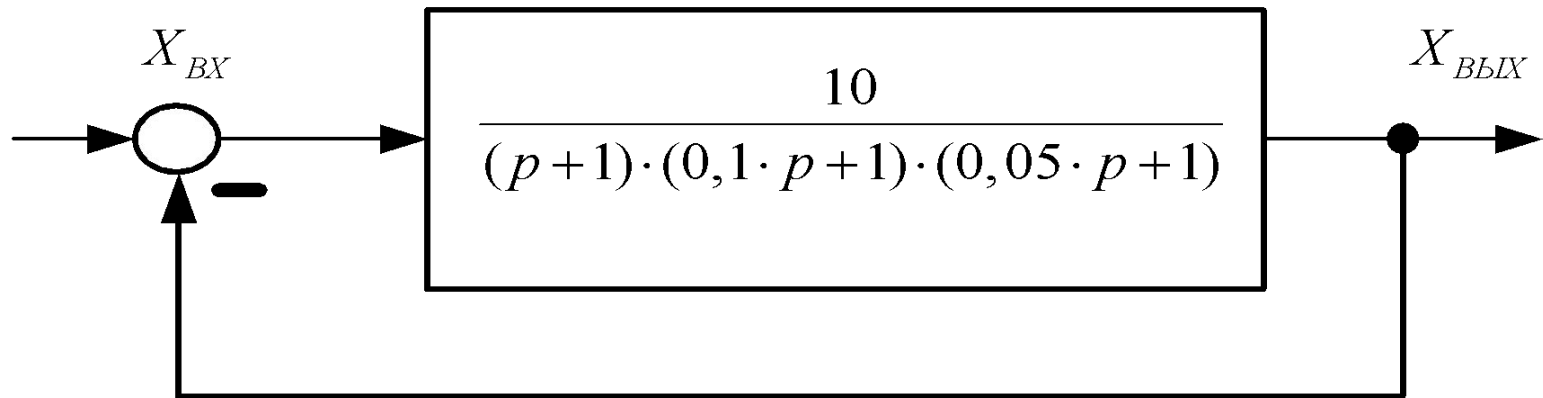
$$W_p(p) = \frac{k}{(T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)}$$

**Решение:** Построим ЛАЧХ и ЛФЧХ



Из этого примера видно, что если в разомкнутом состоянии САУ имеет второй порядок интегрируемости (не два интегрирующих звена  $\frac{1}{p^2}$ ), то при любых конечных значениях коэффициентов и постоянных времени система в замкнутом состоянии устойчива.

Пример 2. Определить устойчивость системы автоматического управления:



## Решени

Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_p(p) = \frac{k}{(1 \cdot p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,05 \cdot p + 1)}.$$

$T_1$                        $T_2$                        $T_3$

Найдём величины, необходимые для построения логарифмических амплитудно-фазовых характеристик

$$\lg k = \lg 10 = 1;$$

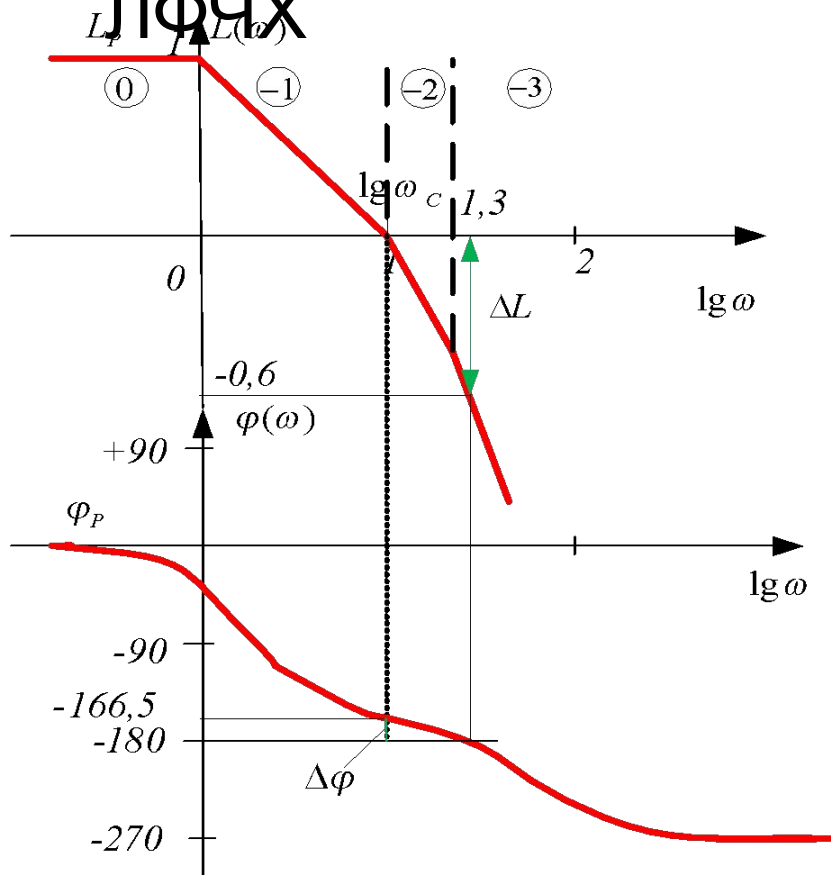
$$\lg \frac{1}{T_2} = \lg \frac{1}{0,1} = 1;$$

$$\lg \frac{1}{T_1} = \lg \frac{1}{1} = 0;$$

$$\lg \frac{1}{T_3} = \lg \frac{1}{0,05} = 1,3.$$

По данным построим ЛАЧХ и

ЛФЧХ

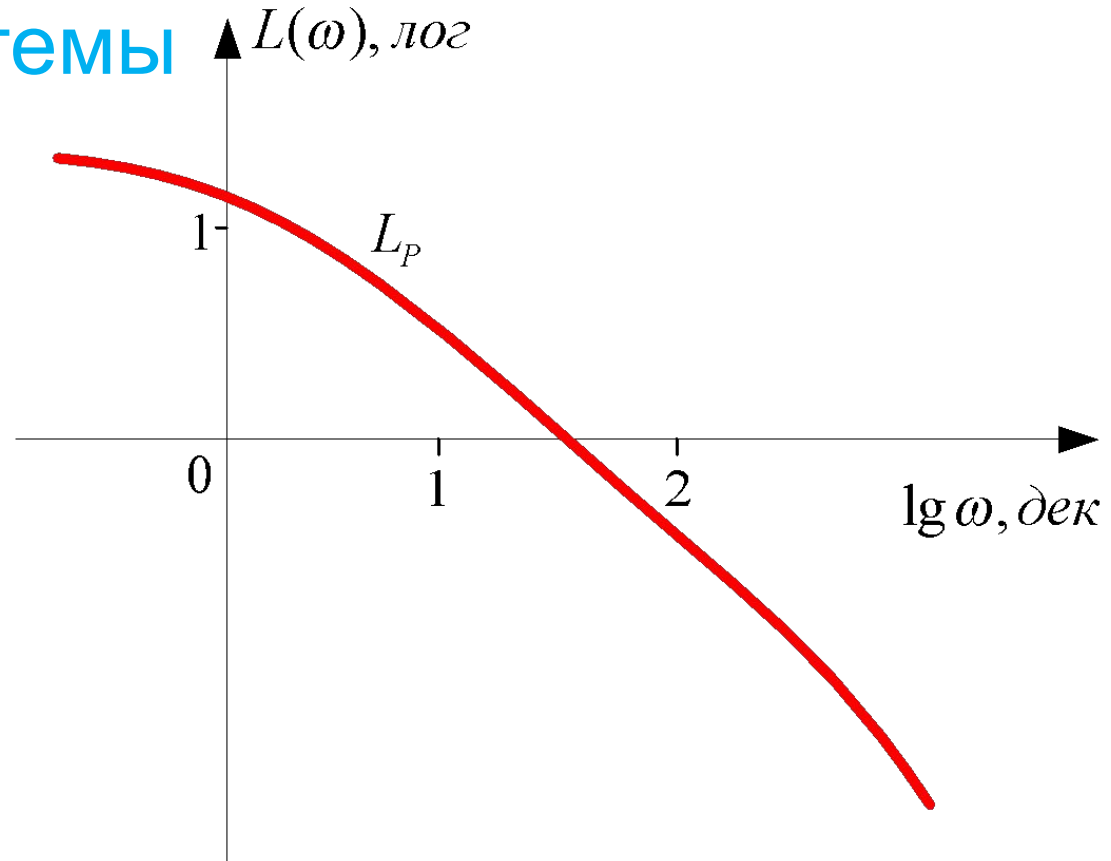


Из рисунка  
найдем  $\varphi_P(\omega_c) = -166,5^\circ$ ;  
 $|\Delta\varphi| = 180^\circ - 166,5^\circ = 13,5^\circ$ ,  
 $\Delta L = |-0,6|$ .

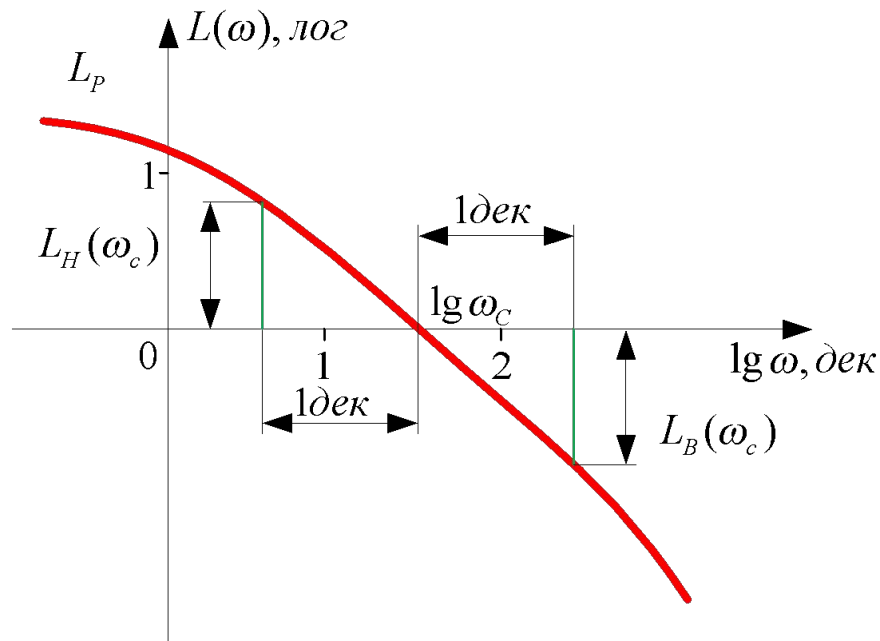
Чем меньше  $\Delta L$ , тем ближе  
САУ ко границе  
устойчивости.

По критерию Найквиста система  
автоматического управления **устойчива**.

# Устойчивость систем по критерию Найквиста по ЛАЧХ системы



Для минимально-фазовых звеньев между амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками существует однозначная зависимость и, следовательно, логарифмическая амплитудно-частотная характеристика однозначно определяет передаточную функцию системы.



1. От  $lg\omega_c$  вправо и влево отложить по 1 дек.
2. Восстановить из этих точек перпендикуляры до  $L_P$ .
3. Замерить  $L_H(\omega_c)$  и  $L_B(\omega_c)$ .
4. Рассчитать  $\varphi_P(\omega_c) = \frac{L_B(\omega_c) - L_H(\omega_c)}{2} \cdot 90^\circ$ .
5. Если  $|\varphi_P| = \begin{cases} > 180^\circ, & \text{то САУ неустойчива;} \\ = 180^\circ, & \text{то САУ на грани устойчивости;} \\ < 180^\circ, & \text{то САУ устойчива.} \end{cases}$

Пример 3. Определить устойчивость замкнутой системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии равна

$$W_P(p) = \frac{10}{(0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,05 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}.$$

## Решени

е:

Вычислим параметры, необходимые для построения логарифмической амплитудно-фазовой характеристики

$$\lg k = \lg 10 = 1;$$

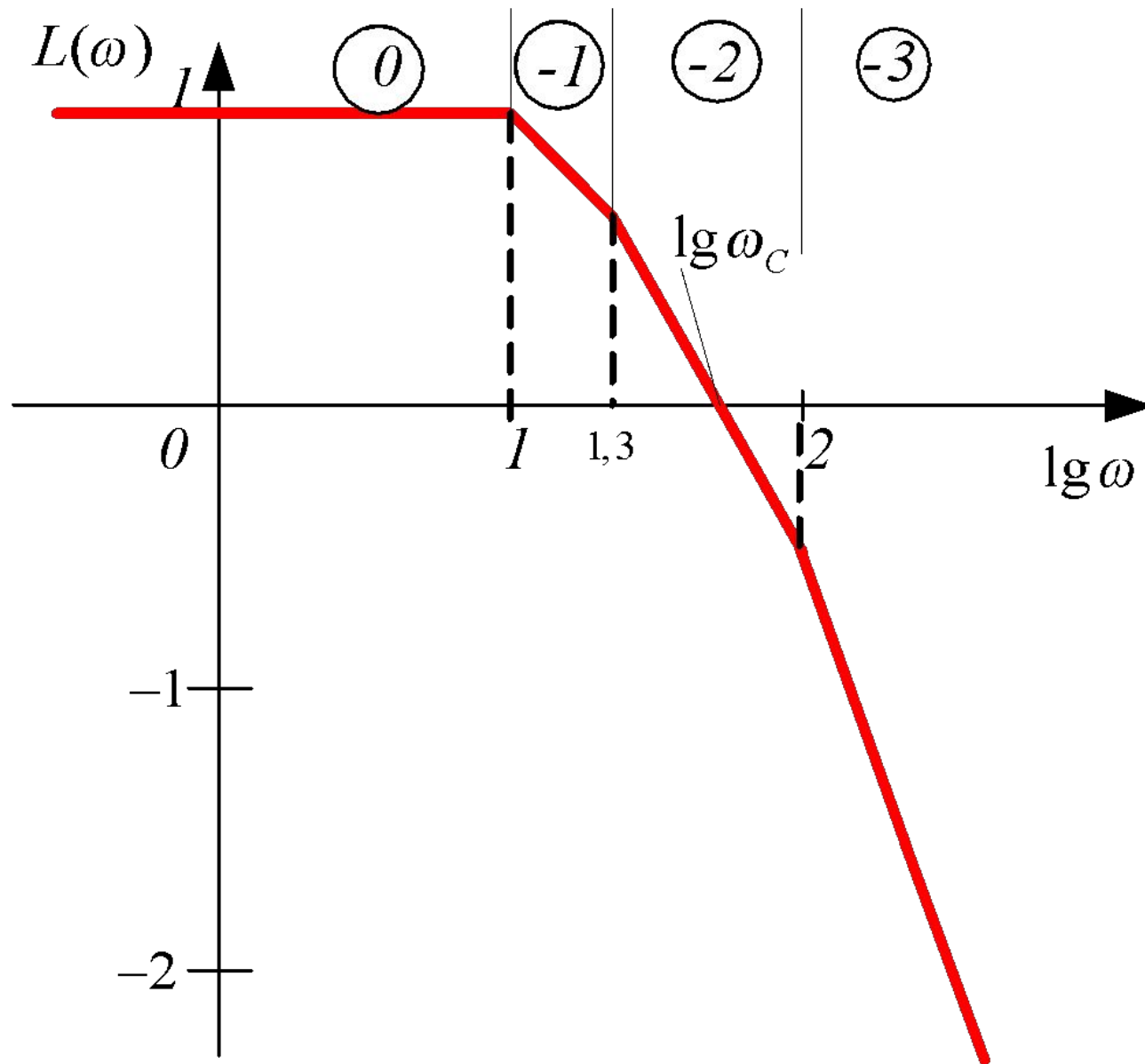
$$\lg \frac{1}{T_1} = \lg \frac{1}{0,1} = 1;$$

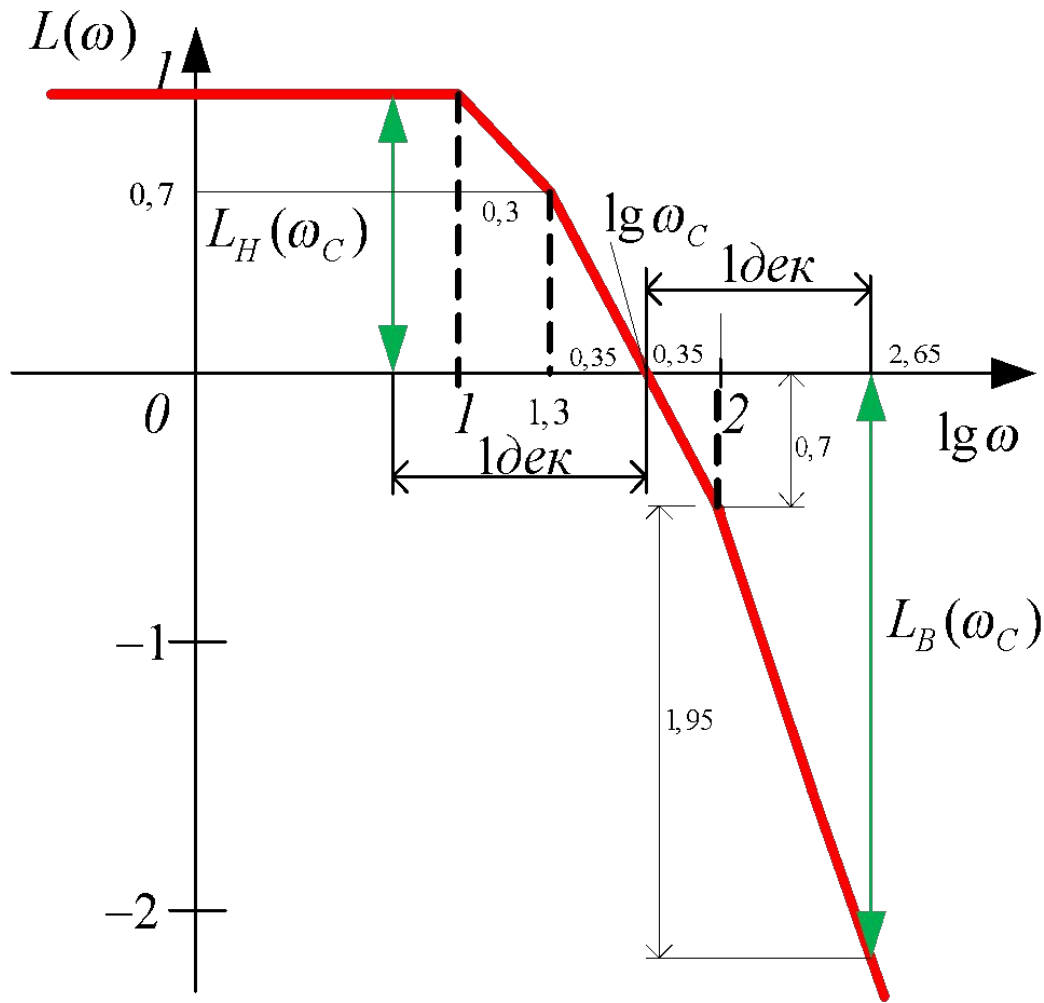
$$\lg \frac{1}{T_2} = \lg \frac{1}{0,05} = 1,3;$$

$$\lg \frac{1}{T_3} = \lg \frac{1}{0,01} = 2.$$



По этим данным построим  
ЛАЧХ.





Вывод: система в замкнутом состоянии устойчива.

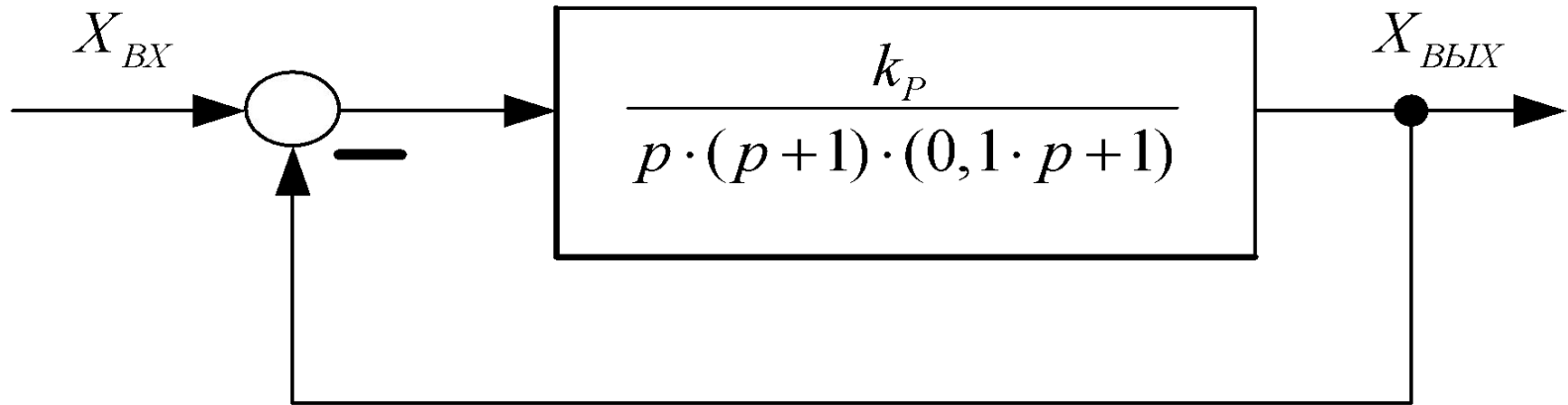
Из геометрических соображений найдём частоту среза системы:  
 $\lg \omega_C = 1,65; \quad \omega_C = 45 \frac{1}{с}$

От этой частоты отложим 1дек влево, 1дек вправо. По характеристике вычислим  $L_B(\omega_C) = -2,65$ .

По формуле найдём  $\varphi_p(\omega_C)$

$$\begin{aligned} \varphi_p(\omega_C) &= \frac{L_B(\omega_C) - L_H(\omega_C)}{2} \cdot 90^\circ = \\ &= \frac{-2,65 - 1}{2} \cdot 90^\circ = -164^\circ. \end{aligned}$$

Пример 4. Определить устойчивость замкнутой системы автоматического управления



## Решение:

Вычислим параметры, необходимые для построения логарифмических частотных характеристик

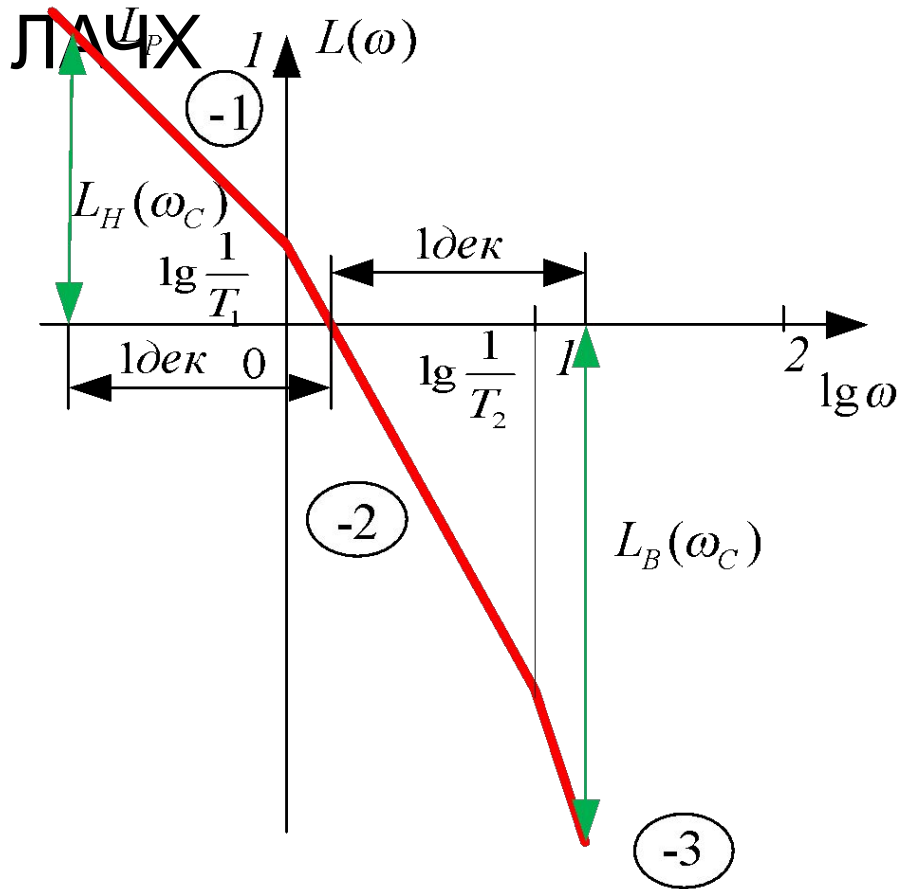
$$k_P = 6; \quad \lg 6 = 0,8;$$

$$T_1 = T_2 = 1;$$

$$\lg \frac{1}{T_1} = \lg \frac{1}{T_2} = 0;$$

$$\lg \frac{1}{T_3} = \lg \frac{1}{0,1} = 1.$$

По найденным данным построим



По рисунку найдём  $\lg \omega_c$  и  $\omega_c$ .  
 $L_H = 1,4$  лог;  $L_B = -2,6$  лог.  
 По формуле вычислим  $\varphi_P(\omega_c)$

$$\varphi_P(\omega_c) = \frac{-2,6 - 1,4}{2} \cdot 90^\circ = -180^\circ.$$

Система находится на грани устойчивости. Чтобы она была устойчивой надо  $k_P$  понизить.  
**Вывод:** чем больше  $k_P$  система в замкнутом состоянии более колебательна или неустойчива.

**В статике:**  $\Delta x_f$  - по возмущению;  
 $\Delta x_{\text{ЗАД}}$  - по заданию.

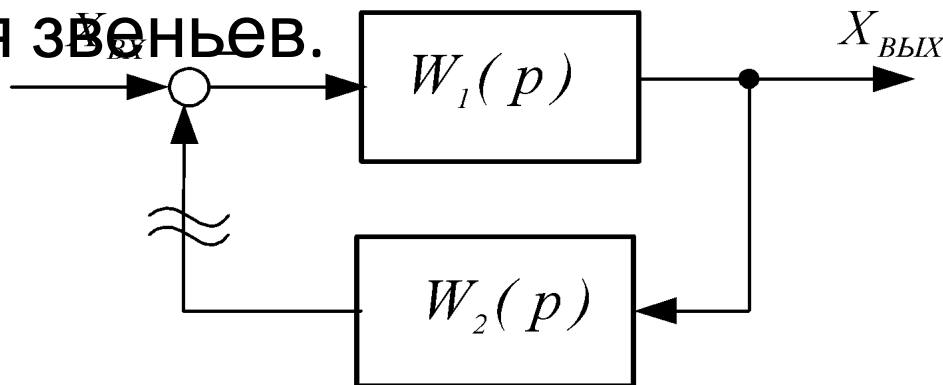
$$\Delta x_f = \frac{\Delta x_P \cdot f}{1 + k_P}; \quad \Delta x_{\text{ЗАД}} = \frac{\Delta x_{\text{РЗАД}}}{1 + k_P}.$$

**Вывод:** чем выше  $k_P$ , тем точнее в статике.

## Суждение об устойчивости системы по ЛЧХ прямого канала и обратной ЛЧХ канала обратной связи

Об устойчивости замкнутой САУ можно судить по расположению ЛЧХ встречно-параллельных соединяемых звеньев, не прибегая к непосредственному построению ЛЧХ САУ в разомкнутом состоянии.

Доказано, что любая замкнутая САУ представляется в виде встречно-параллельного соединения звеньев.



Передаточная функция разомкнутой системы  
равна

$$W_P(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = \frac{W_1(p)}{W_2^{-1}(p)},$$

Комплексный коэффициент передачи

$$W_P(j\omega) = W_1(j \cdot \omega) \cdot W_2(j \cdot \omega) = \frac{W_1(j \cdot \omega)}{W_2^{-1}(j \cdot \omega)} = \frac{A_1(\omega)}{A_2^{-1}(\omega)} e^{j \cdot [\varphi_1(\omega) - \varphi_2^{-1}(\omega)]}.$$

Для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ системы  
автоматического управления необходимо построить  
характеристики

$$L_1(\omega), \varphi_1(\omega), L_2^{-1}(\omega), \varphi_2^{-1}(\omega)$$

и определить

поправки.

Как

известно

$$L_P(\omega) = L_1(\omega) - L_2^{-1}(\omega),$$

$$\varphi_P(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2^{-1}(\omega),$$

то есть ординаты между ЛАЧХ и ЛФЧХ прямого и обратного каналов представляют собой значения соответственно ЛАЧХ и ЛФЧХ системы в разомкнутом состоянии.

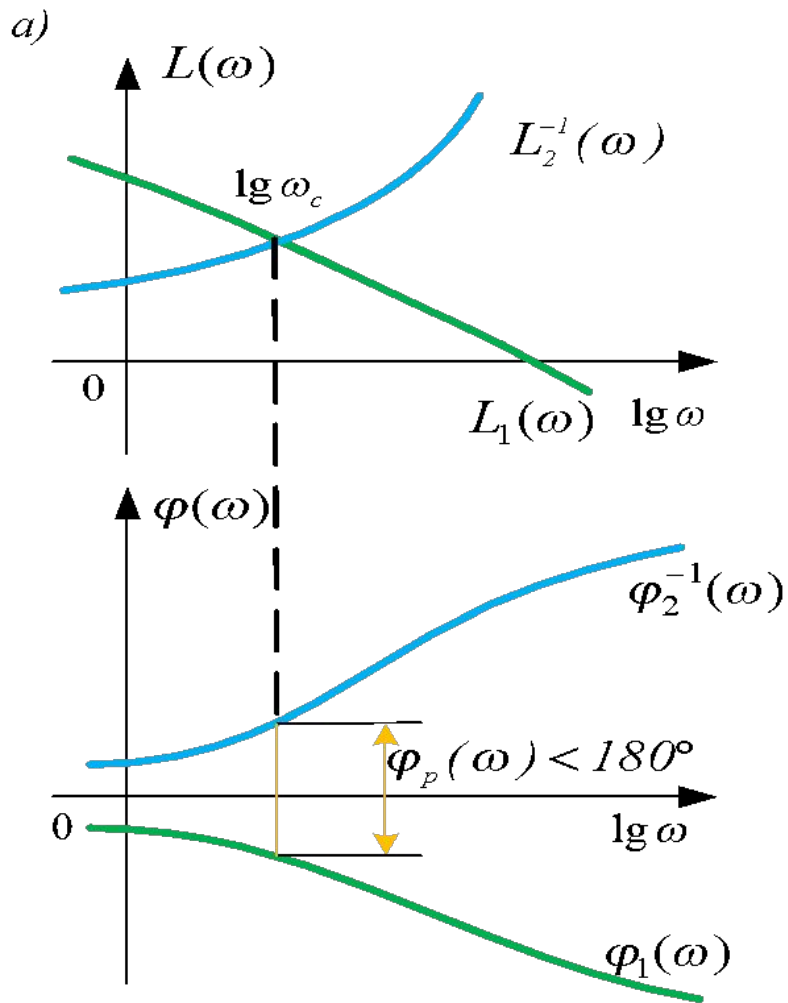
Пересечения ЛАЧХ прямого и обратного каналов происходят при частоте среза, то есть

$$L_1(\omega_C) = L_2^{-1}(\omega_C); \quad A_P(\omega_C) = \frac{A_1(\omega_C)}{A_2(\omega_C)} = 1.$$
$$L_P(\omega_C) = 0;$$

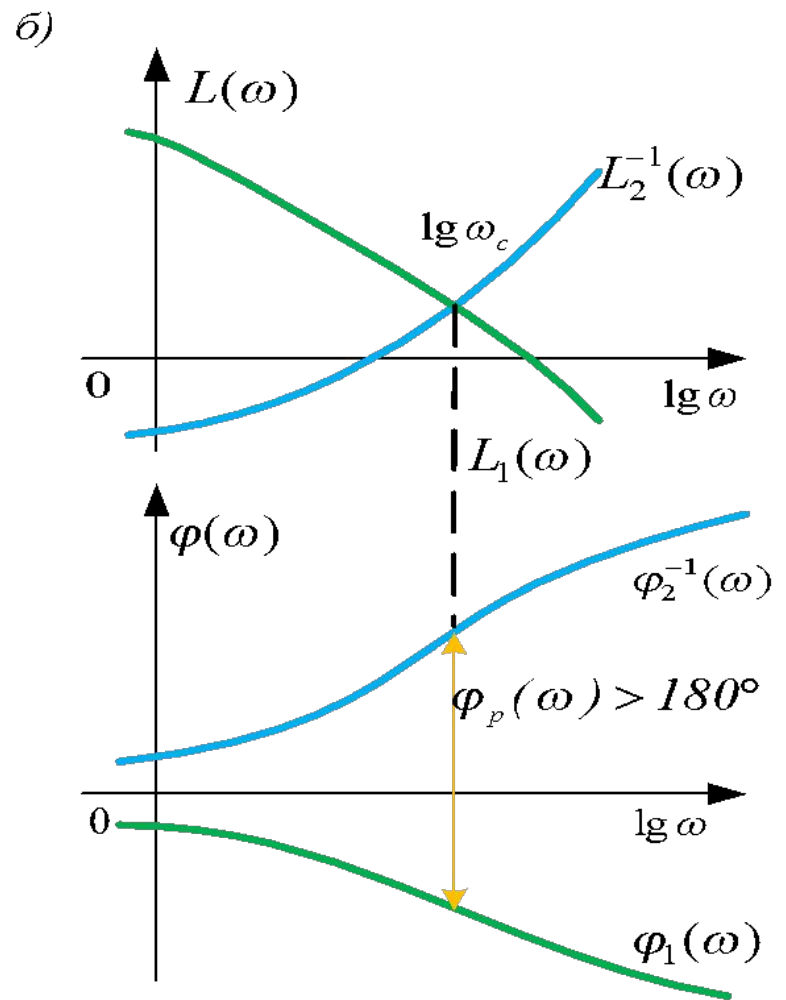


Таким образом, применительно к рассмотренному соединению звеньев критерий устойчивости Найквиста может быть сформулирован следующим образом.

*Система автоматического управления в замкнутом состоянии устойчива, если в точке пересечения логарифмических амплитудно-частотных характеристик прямого канала и обратной амплитудно-частотной характеристики канала обратной связи разность фаз между логарифмической фазо-частотной характеристикой прямого канала и обратной логарифмической фазо-частотной характеристикой канала обратной связи меньше  $180^\circ$*

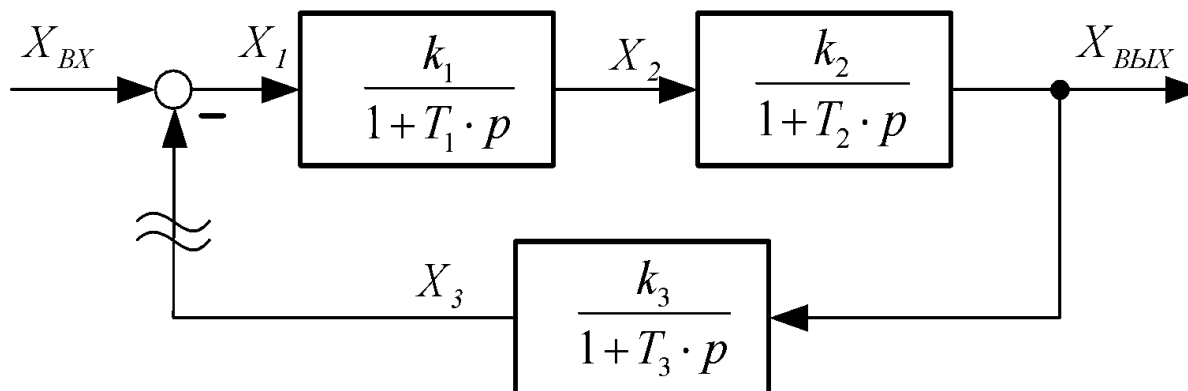


Устойчивая САУ



Неустойчивая САУ

# Пример 1. Определить устойчивость замкнутой системы вида



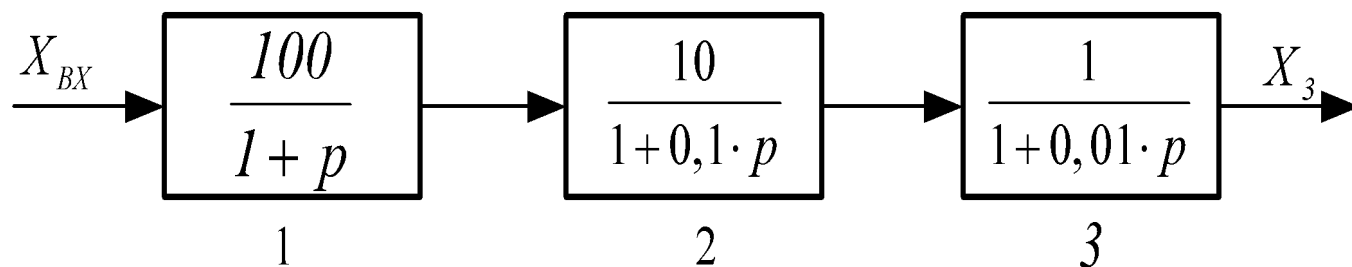
$$k_1 = 100; \quad T_1 = 1 \text{ сек};$$

$$k_2 = 10; \quad T_2 = 0,1 \text{ сек};$$

$$k_3 = 1; \quad T_3 = 0,01 \text{ сек}.$$

## Решение:

Построим ЛАФЧХ системы в разомкнутом состоянии, то есть такой системы:



Определим параметры, необходимые для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ

$$\lg k_1 = \lg 100 = 2;$$

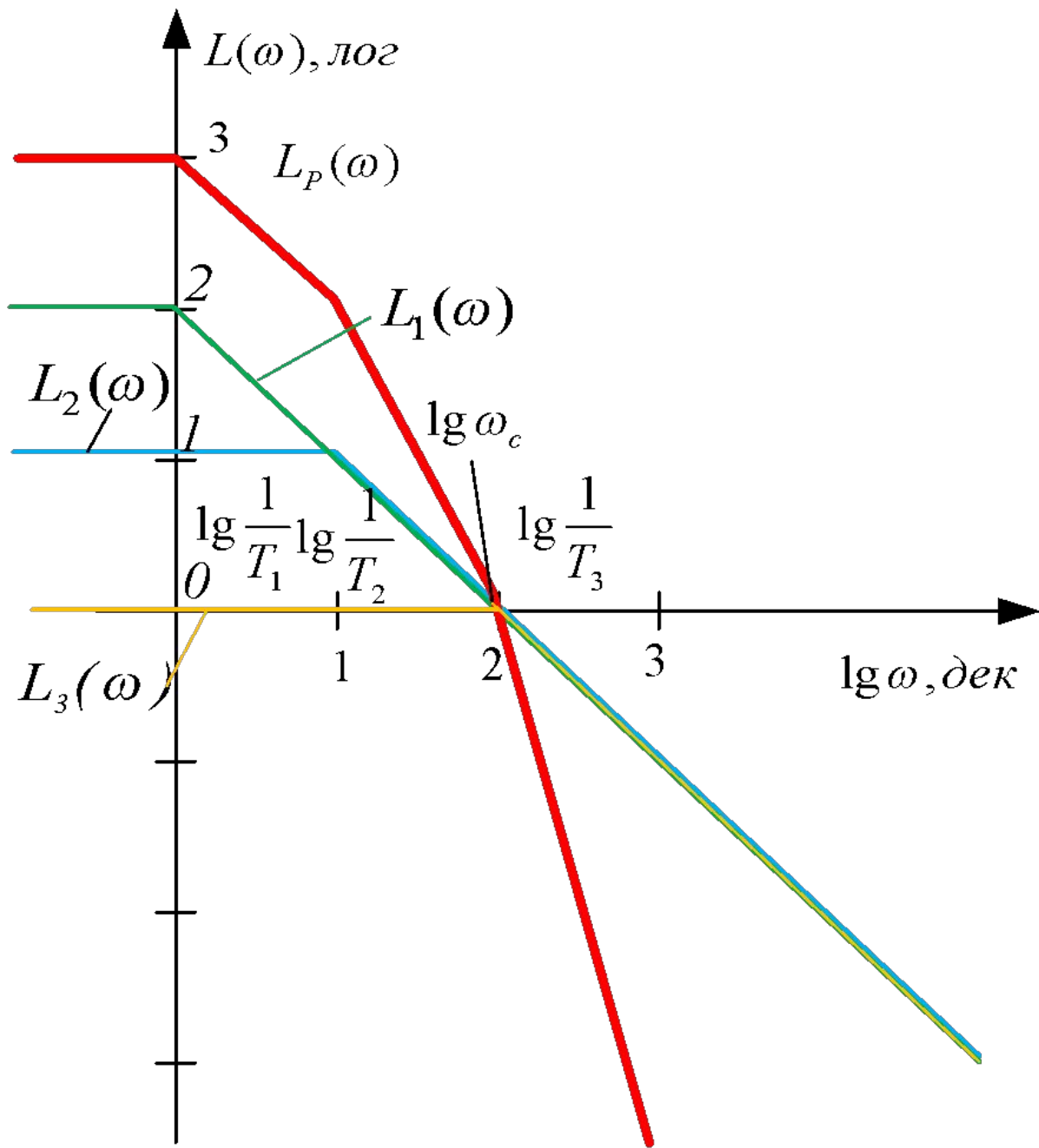
$$\lg k_2 = \lg 10 = 1;$$

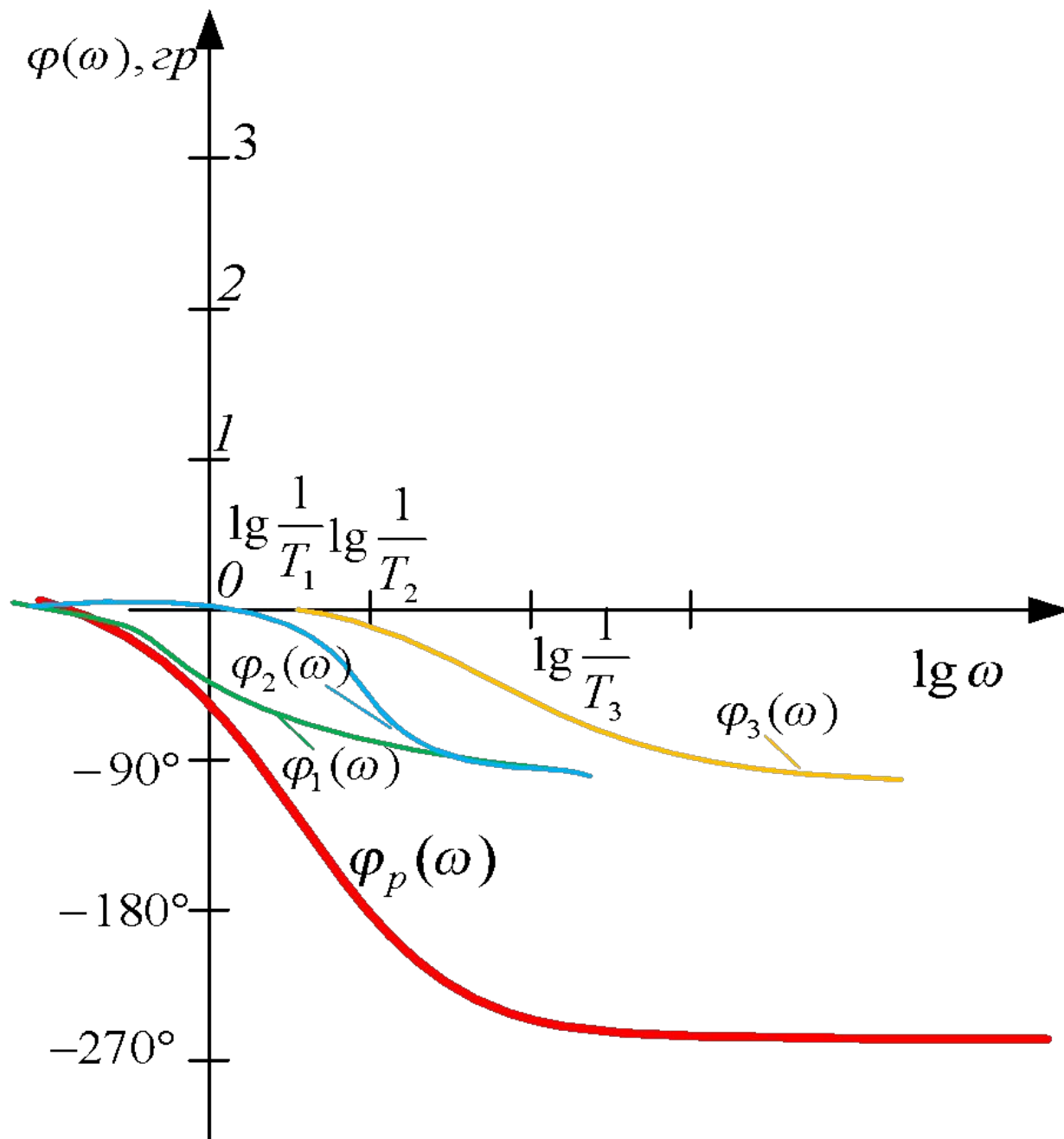
$$\lg k_3 = \lg 1 = 0;$$

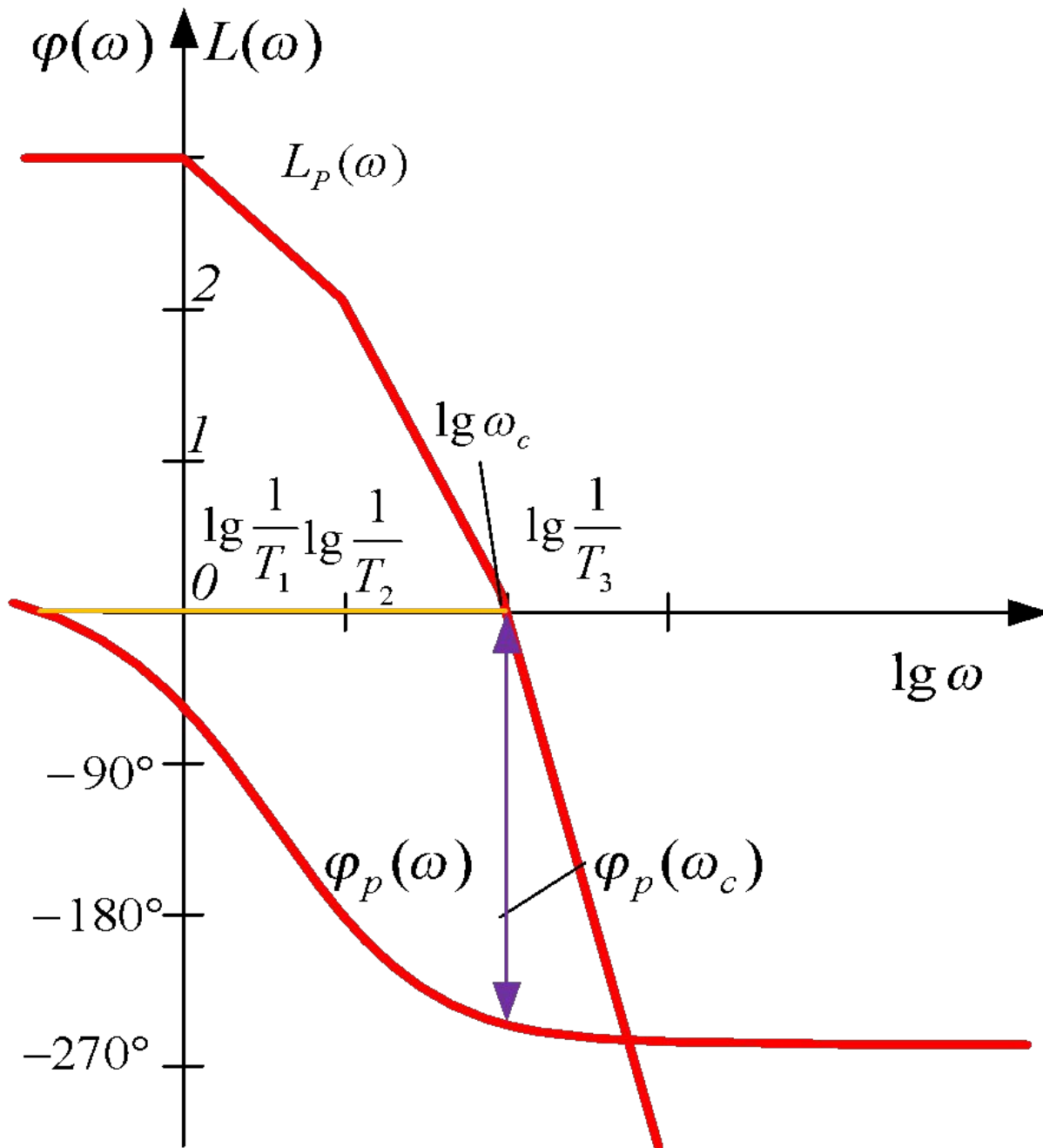
$$\lg \frac{1}{T_1} = \lg \frac{1}{1} = 0;$$

$$\lg \frac{1}{T_1} = \lg \frac{1}{1} = 0;$$

$$\lg \frac{1}{T_3} = \lg \frac{1}{100} = 0,01.$$





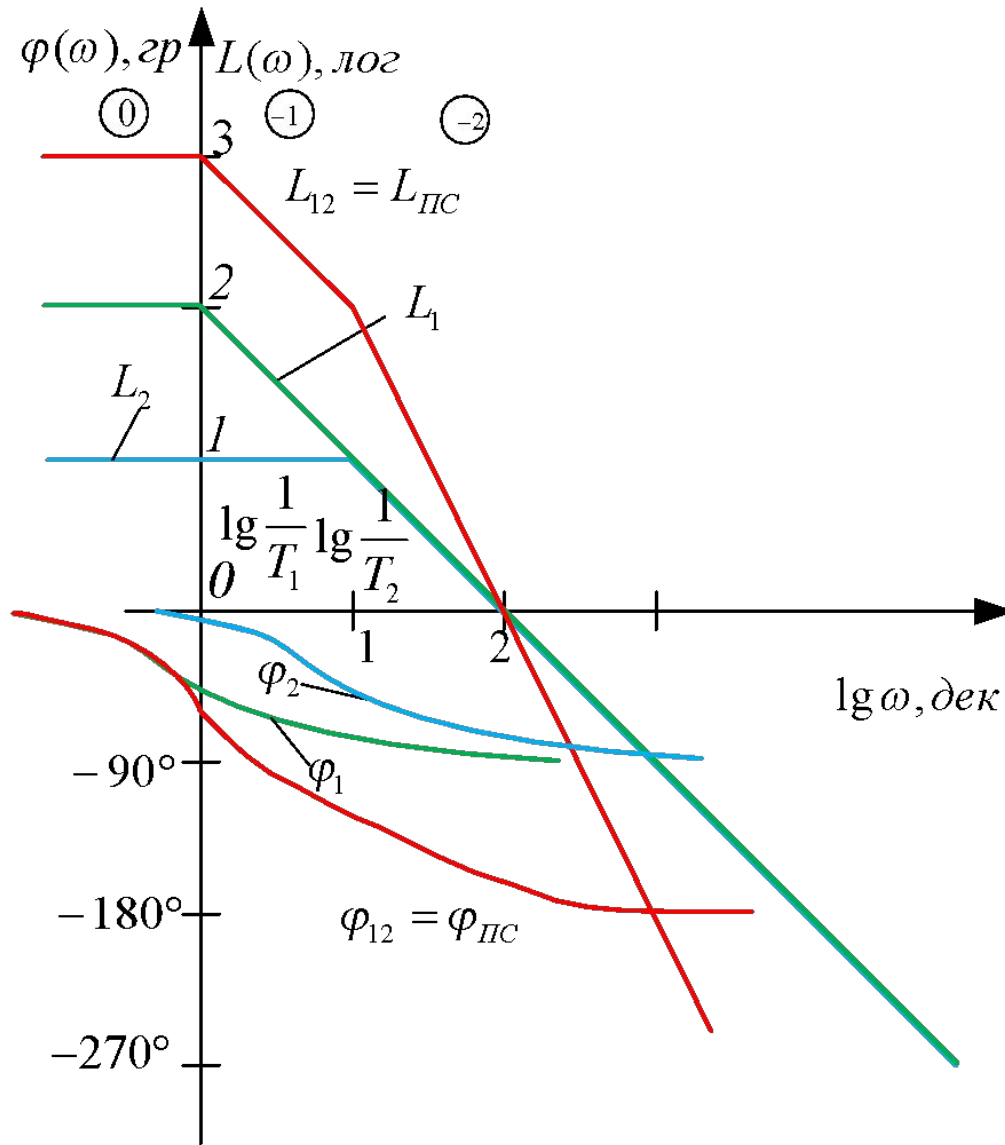


Вывод:

ПОСКОЛЬКУ  
 $|\varphi_P(\omega_{\tilde{N}})| > 180^\circ$ ,

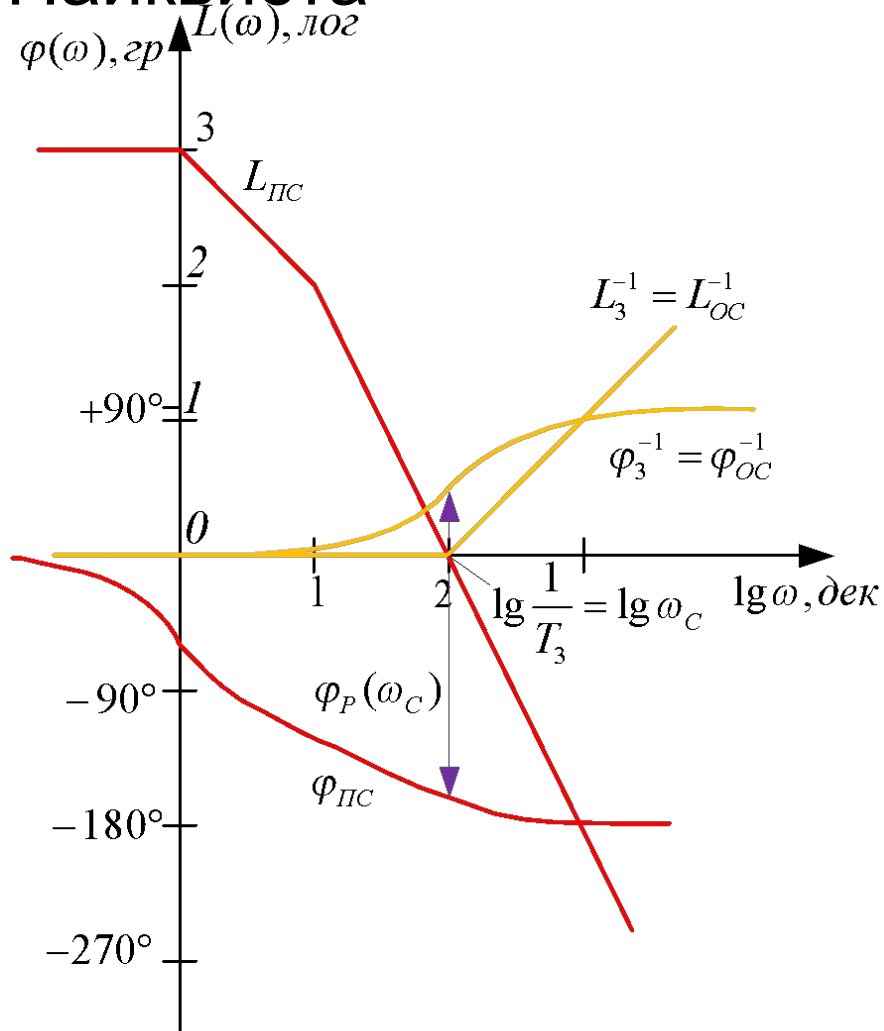
ТО СИСТЕМА В  
 ЗАМКНУТОМ  
 СОСТОЯНИИ  
 НЕУСТОЙЧИВА.

# Построим ЛАЧХ и ЛФЧХ прямой связи





Построим ЛАЧХ и ЛФЧХ обратной связи и определим устойчивость САУ по критерию Найквиста



**Вывод:**  
 ПОСКОЛЬКУ  
 $|\varphi_P(\omega_{\tilde{N}})| > 180^\circ$ ,  
 ТО СИСТЕМА В  
 ЗАМКНУТОМ  
 СОСТОЯНИИ  
**НЕУСТОЙЧИВА.**

Мы рассмотрели одноконтурную замкнутую систему. Если исследуется поведение многоконтурной САУ, то проверяют устойчивость всех контуров. А именно, строится  $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ . Определяется, устойчив ли первый контур. Если контур устойчив, находится результирующие ЛАЧХ и ЛФЧХ этого контура. Строится  $L_1, L_2$  следующего контура и т.д. Если какой-то контур неустойчив или обладает плохими качествами переходного процесса, то вводят корректирующие устройства с тем, чтобы система имела желаемые показатели регулирования.