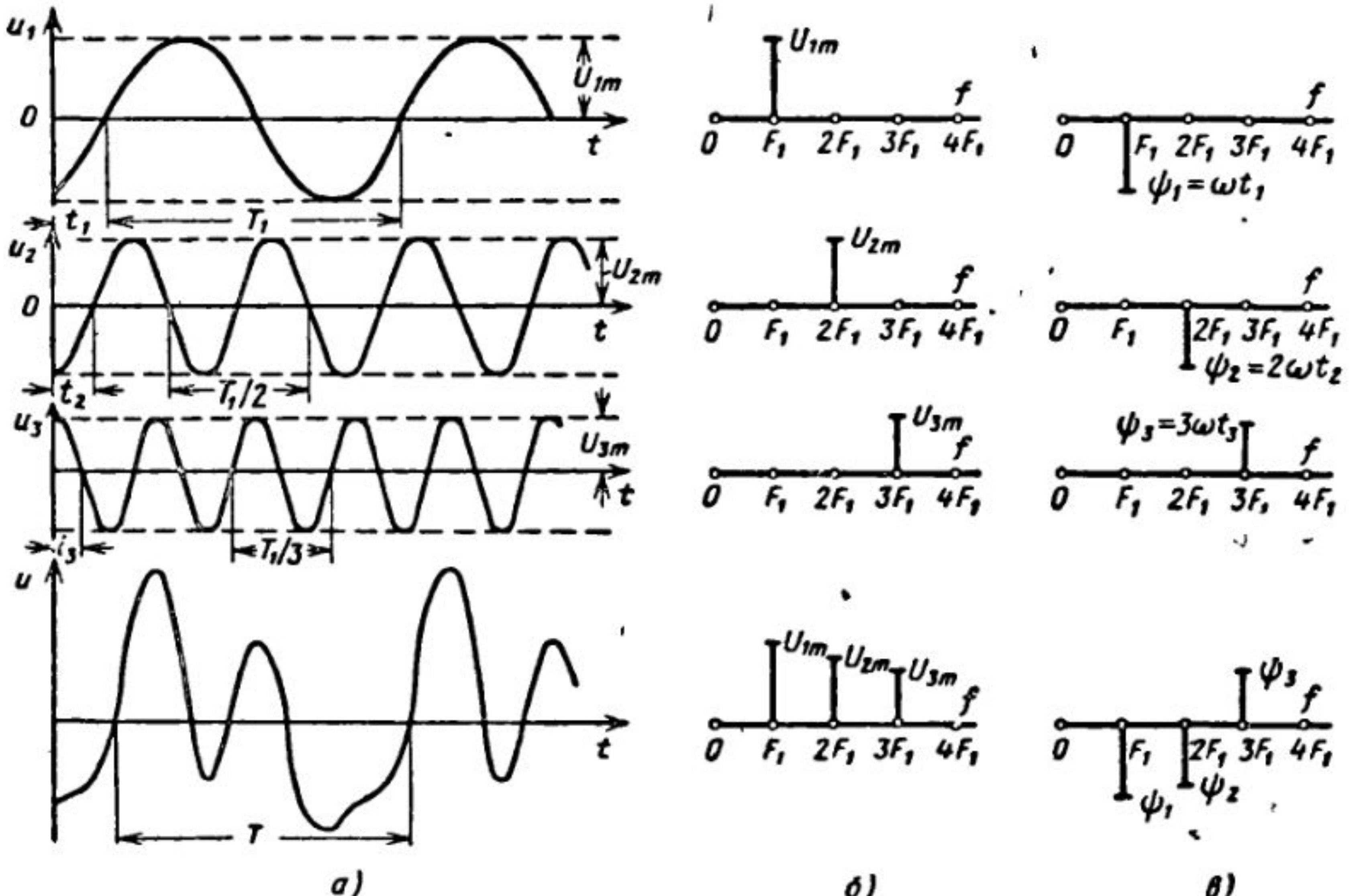


Рис. 1.2. Временны́е диаграммы (*а*), амплитудно-частотный спектр (*б*) и фазо-частотный спектр (*в*) периодического несинусоидального сигнала.

$$u = U_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = U_0 + U_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \\ + U_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2) + U_{3m} \sin(\omega_3 t + \psi_3) + \ldots$$

Пользуясь знаком суммы n слагаемых $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$, где n — любое целое число от 1 до ∞, получаем сокращенную запись ряда:

$$u = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n). \qquad (1)$$

Можно исключить начальные фазы гармоник из ряда Фурье, если использовать преобразование

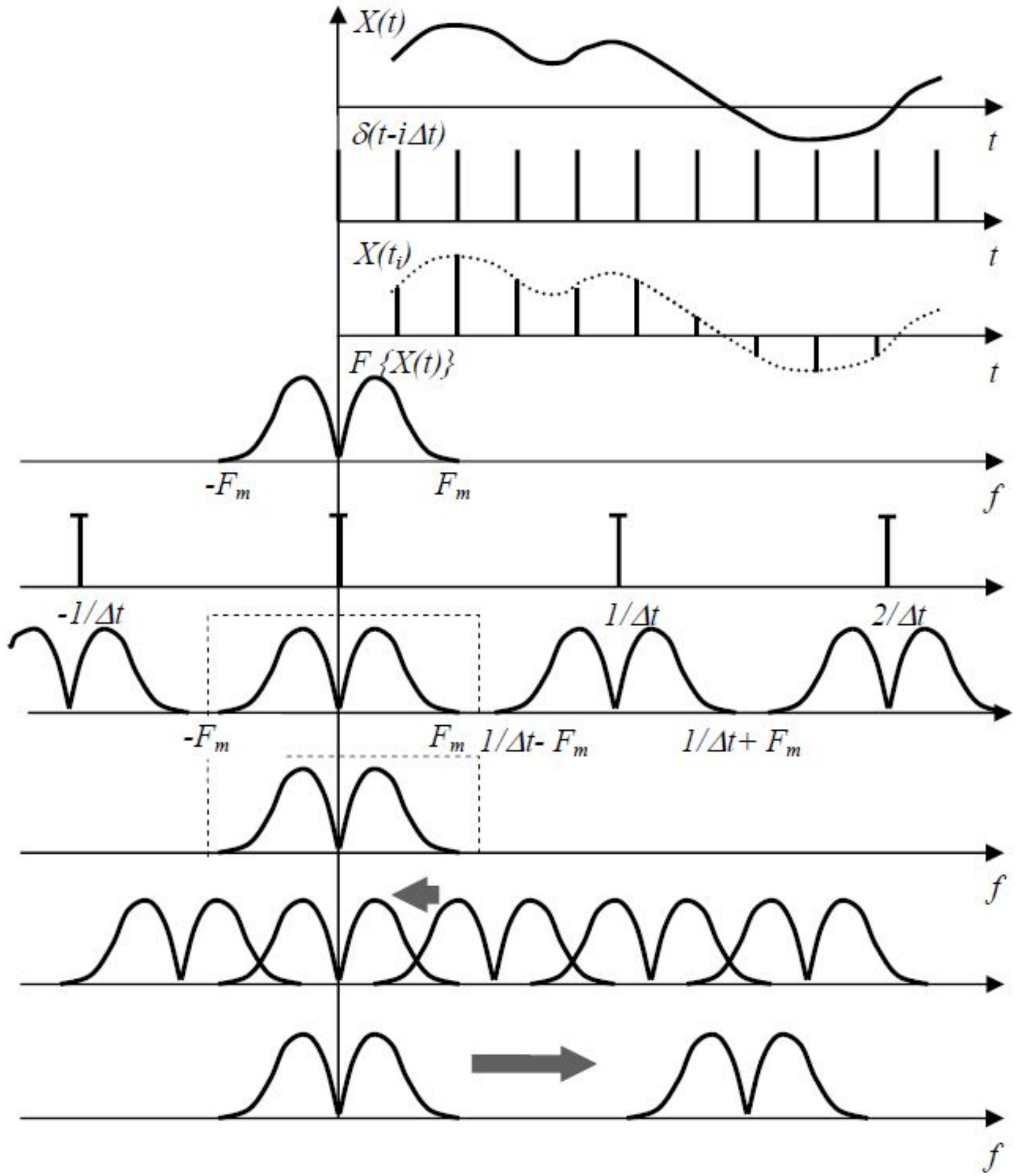
$$U_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n) = U_{nm} \sin n\omega t \cos \psi_n + U_{nm} \cos n\omega t \sin \psi_n = \\ = U'_{nm} \sin n\omega t + U''_{nm} \cos n\omega t,$$

где $U'_{nm} = U_{nm} \cos \psi_n$ и $U''_{nm} = U_{nm} \sin \psi_n$ — постоянные величины,

выражающие соответственно амплитуды напряжения n-й гармоники для синусной и косинусной составляющих.

Теперь ряд Фурье (1) принимает вид

$$u = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U'_{nm} \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} U''_{nm} \cos n\omega t. \qquad (2)$$



X(t)
t
δ(t-iΔt)
t
X(t_i)
t
F {X(t)}
-F_m
F_m
f
-1/Δt
1/Δt
2/Δt
-F_m
F_m
1/Δt- F_m
1/Δt+ F_m
f
f

Теорема Котельникова. Теорема Котельникова была доказана в 1933 г. в виде теоремы о функциях с финитным спектром, за рубежом — в виде теоремы отсчетов (приписывают Клоду Шеннону); отчасти предвосхищена Найквистом в 1924 г. В качестве интерполяции между равно отстоящими точками она была рассмотрена в 1915 г. Виттакером. Теорема Котельникова — основа теории дискретного представления отсчетами.

Существо теоремы следующее. Функцию $S(t)$ с финитным (ограниченным) спектром можно точно восстановить (интерполировать) по ее отсчетам $S(kT_0)$, взятым через интервалы $T_0 \leqslant 1/2F$, где F — верхняя частота спектра функции. Это осуществляется с помощью ряда Котельникова

$$\hat{S}(t) = S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(kT_0)\, W_{\text{и}}(t - kT_0),$$

где в качестве интерполирующих функций $W_k(\bullet)$ используются функции отсчетов

$$W_{\text{и}}(t - kT_0) = \operatorname{sinc}[2\pi F(t - kT_0)].$$

$$W_и(t - kT_0) = \mathrm{sinc}\,[2\pi F(t - kT_0)].$$

Эти функции представляют собой весовую или импульсную характеристику идеального ФНЧ. Передаточная функция идеального ФНЧ (рис. 2.20)

$$W(f) = \begin{cases} \frac{1}{2F}, & -F < f < F \\ 0, & |f| > F. \end{cases} .$$

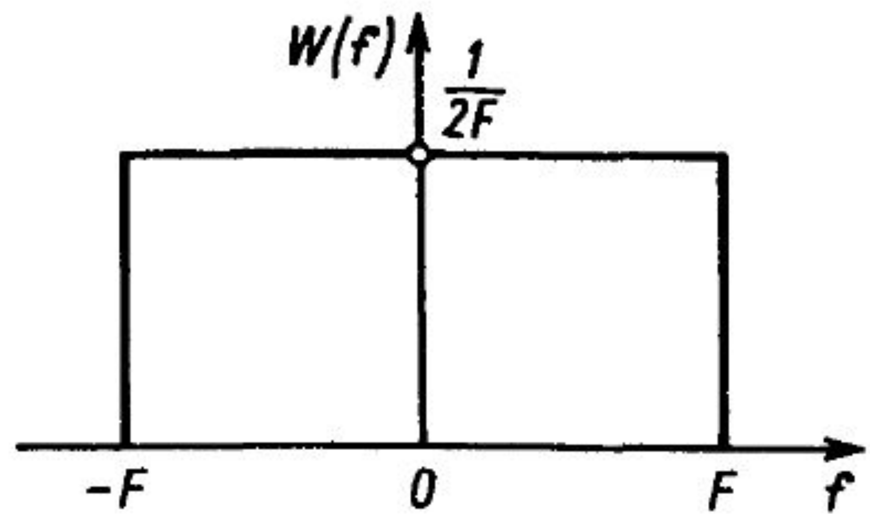
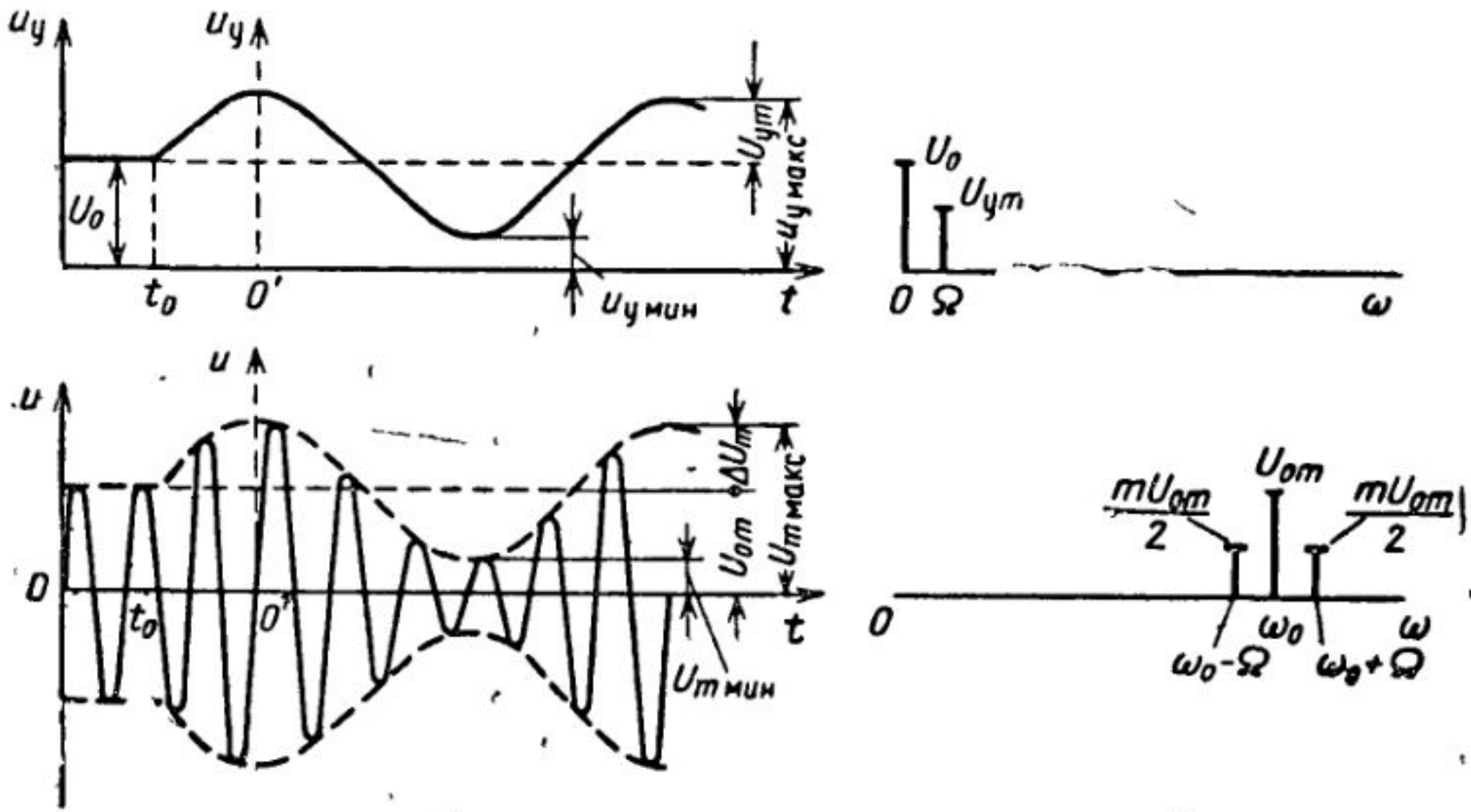


Рис. 2.20

$$u_{\text{у}} = U_0 + U_{\text{у}m} \cos \Omega t,$$

где $U_{\text{у}m}$ — амплитуда изменения управляющего сигнала; $\Omega = 2\pi F$ — частота управляющего сигнала.



а) *б)*

Рис. 1.4. Временные (*а*) и спектральные (*б*) диаграммы управляющего и радиосигналов при АМ синусоидальным напряжением.

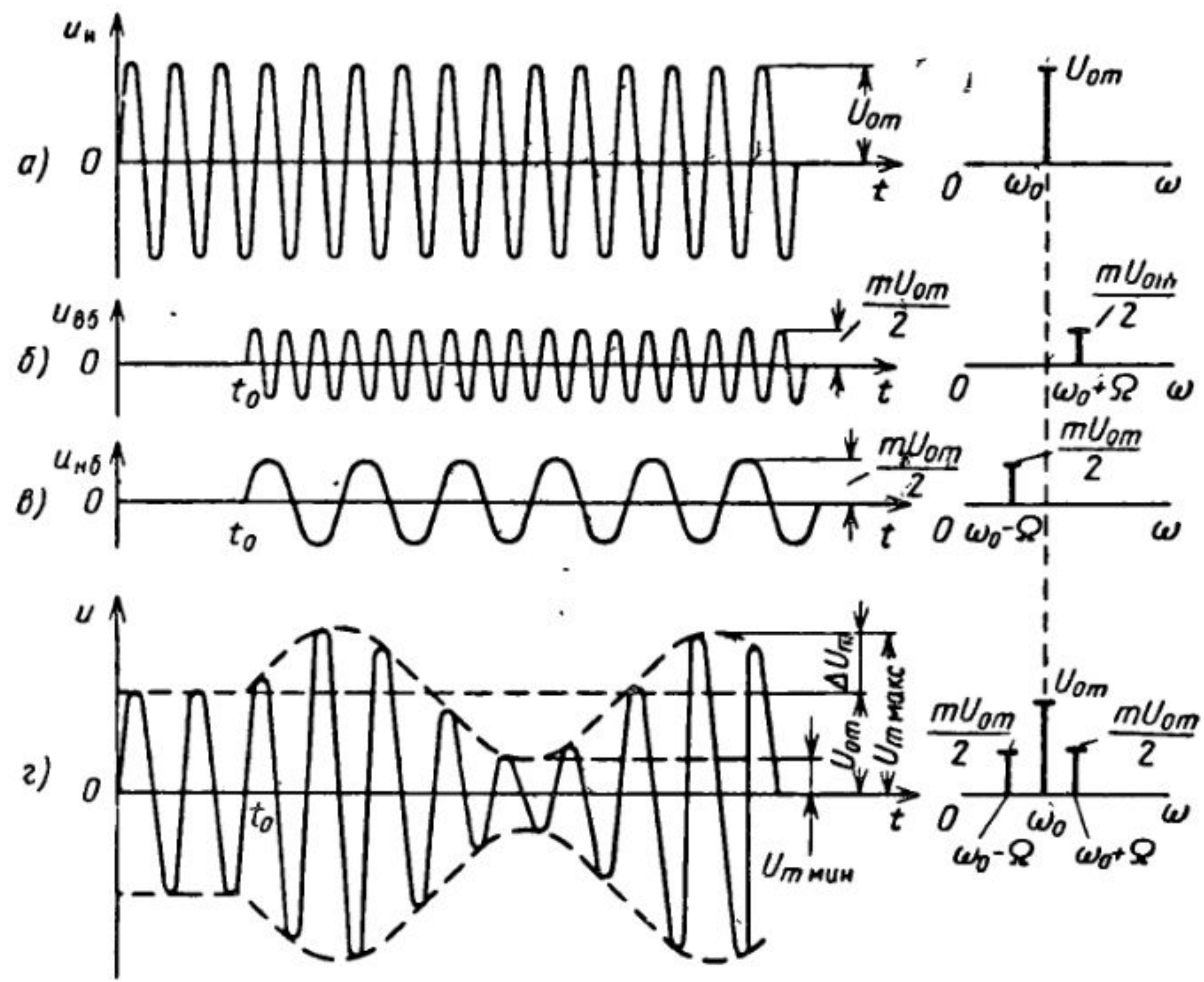


Рис. 1.5. Временны́е и спе́ктральные диаграммы напряжений несущей частоты (*а*), верхней (*б*) и нижней (*в*) боковых частот и результирующего радиосигнала (*г*).

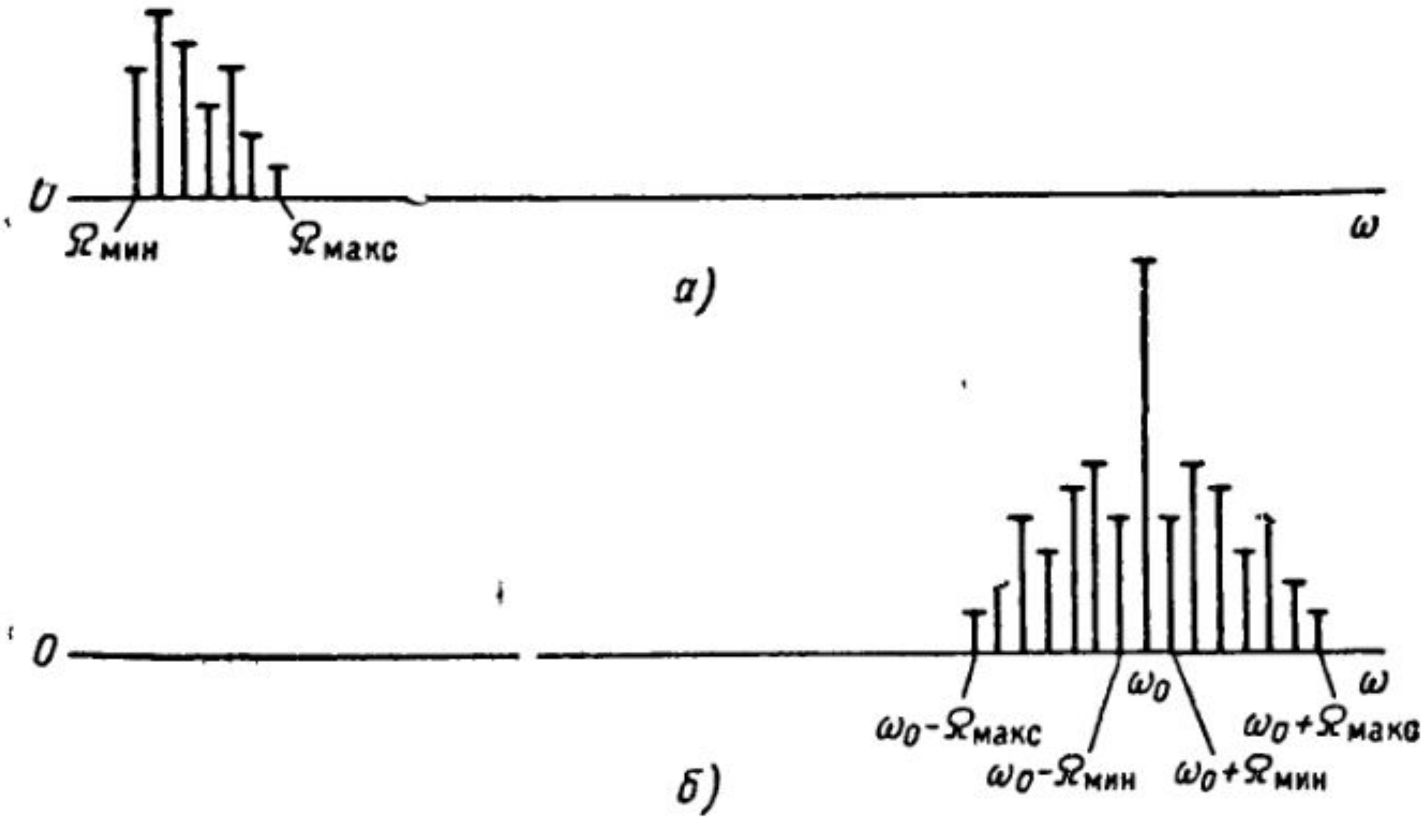


Рис. 1.8. Спектральные диаграммы управляющего сигнала (*а*) и соответствующего АМ радиосигнала (*б*).

при амплитудной модуляции ширина спектра радиосигнала в два раза больше максимальной частоты спектра управляющего сигнала:

$$\Delta\omega_{\text{сп}} = (\omega_0 + \Omega_{\text{макс}}) - (\omega_0 - \Omega_{\text{макс}}) = 2\Omega_{\text{макс}}. \qquad (6)$$

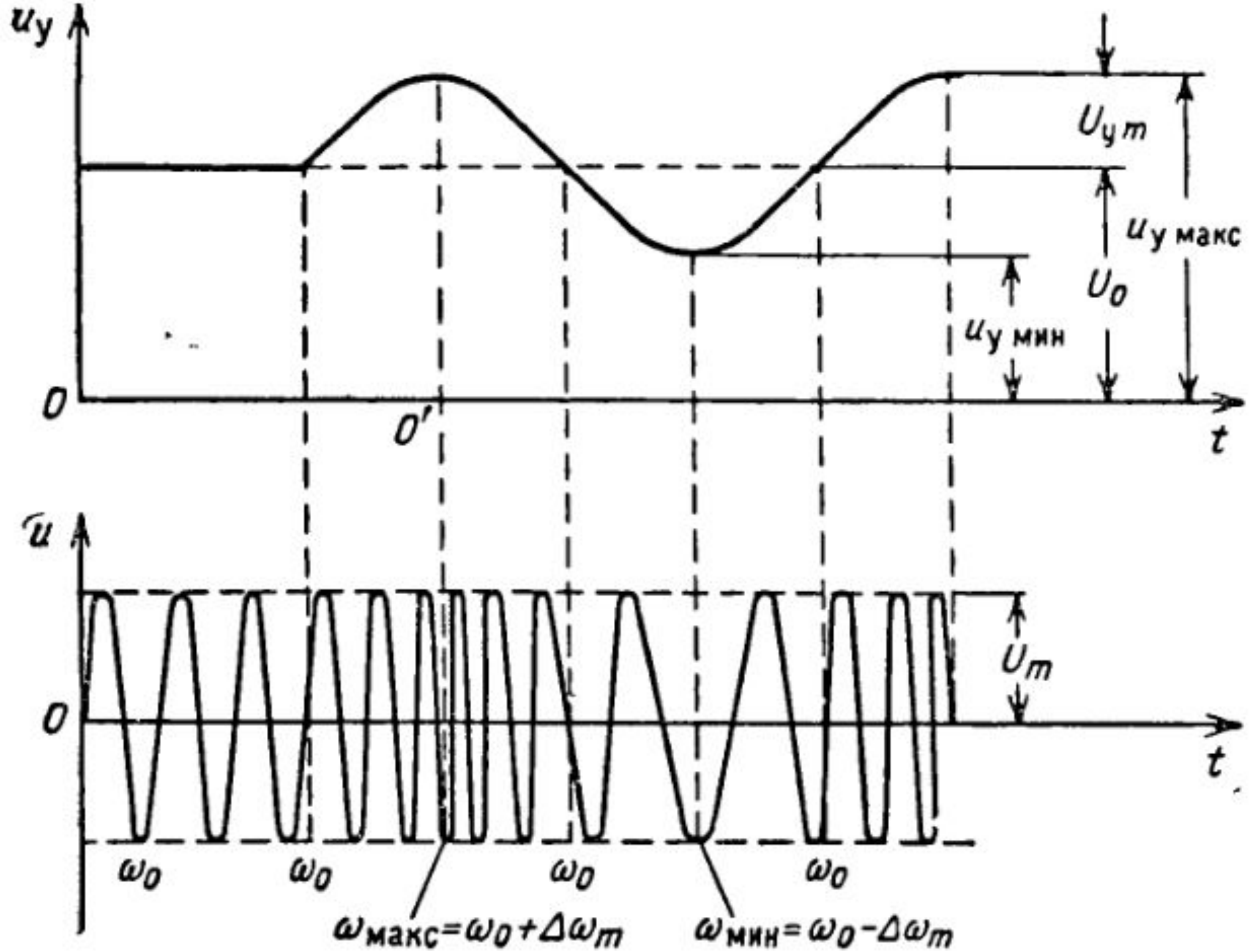


Рис. 1.9. Временные диаграммы управляющего сигнала и соответствующего ЧМ радиосигнала

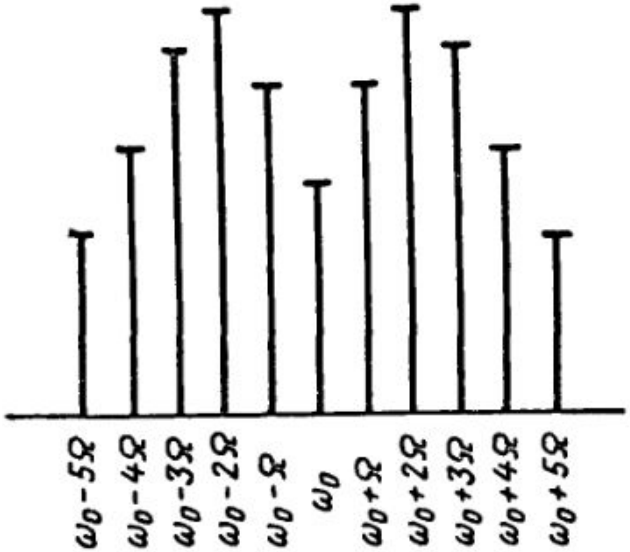


Рис. 1.11. Спектральная диаграмма ЧМ сигнала.

метить, что если $M \gg 1$, то число пар боковых частот равно $M+1$, и так как интервал между соседними линиями спектра равен частоте управляющего сигнала, то ширина спектра ЧМ сигнала

$$\Delta\omega_{\text{сп}} = 2\,(M+1)\Omega \approx 2M\Omega. \tag{13}$$

Здесь обращают на себя внимание два обстоятельства:

— при амплитудной модуляции ширина спектра радиосигнала зависит только от частоты управляющего сигнала, а при частотной модуляции — еще и от индекса модуляции;

— при одинаковой частоте модуляции Ω ширина спектра ЧМ сигнала с $M \gg 1$ в M раз шире спектра АМ сигнала.

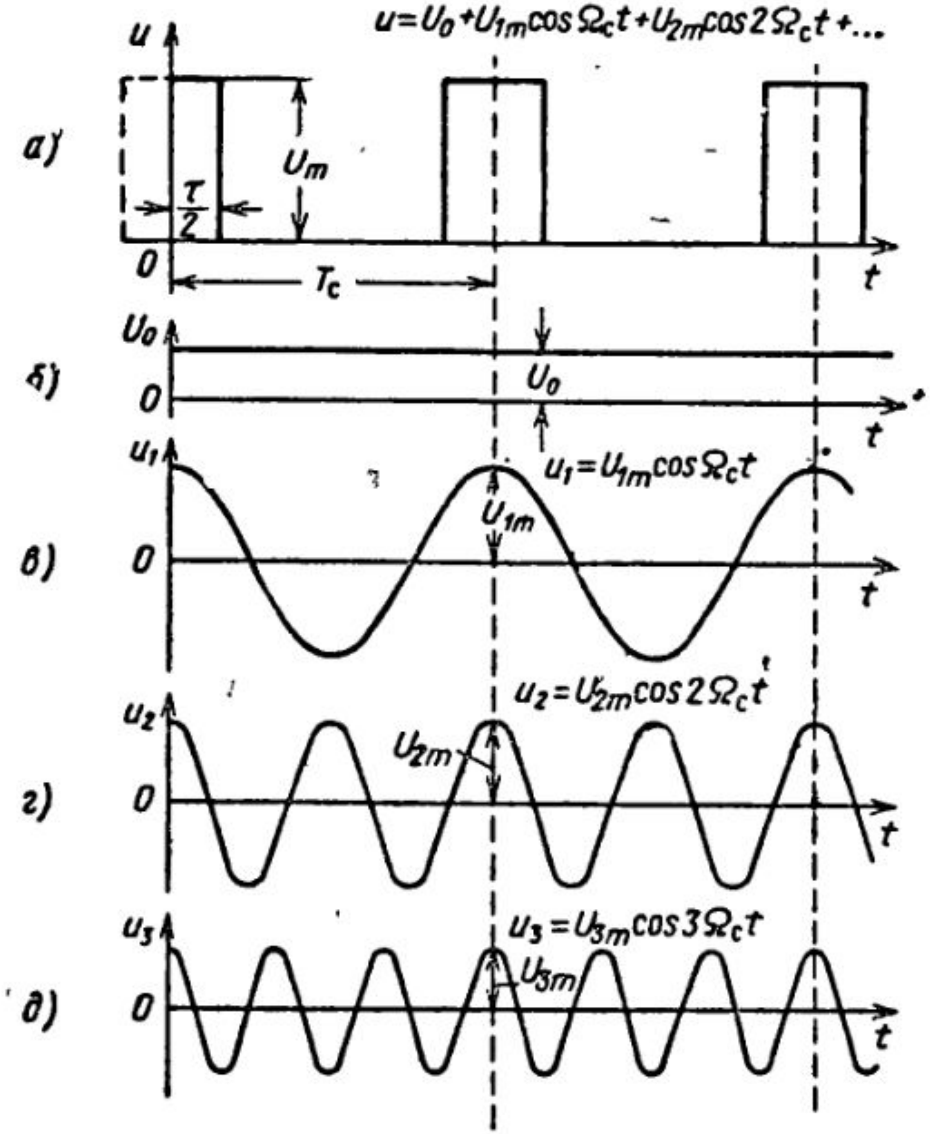
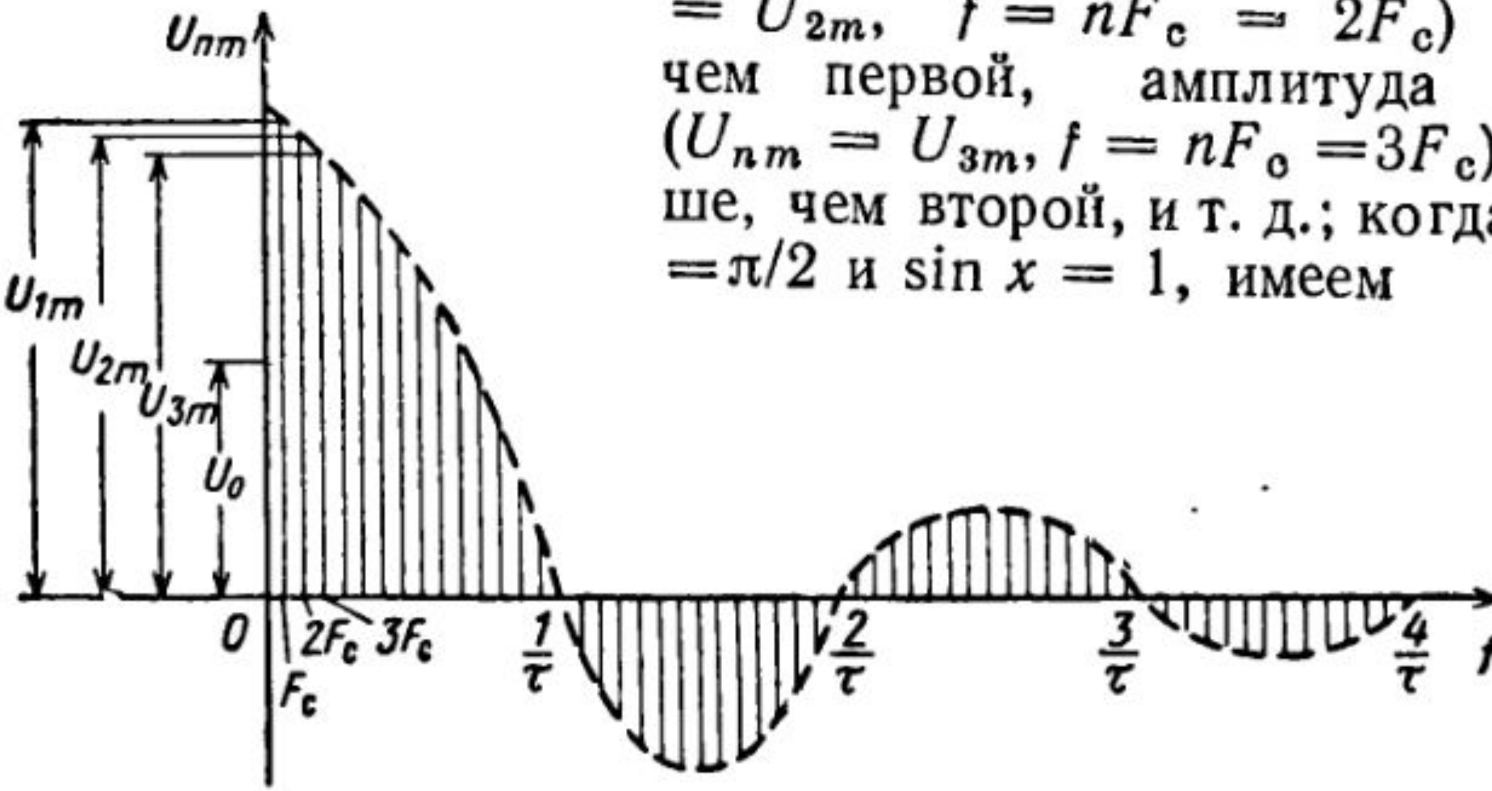


Рис. 1.12. Последовательность прямоугольных импульсов (*а*) и временны́е диаграммы гармонических составляющих.

ции равна нулю. Поэтому амплитуда второй гармоники (



$= U_{2m}, \quad f = nF_c = 2F_c$) м
чем первой, амплитуда т
($U_{nm} = U_{3m}, f = nF_c = 3F_c$) –
ше, чем второй, и т. д.; когда x
$=\pi/2$ и $\sin x = 1$, имеем

Рис. 1.13. Спектр последовательности прямоугольных видеоимпульсов.

Спектр периодической последовательности прямоугольных радиоимпульсов (рис. 1.14) строим, исходя из того, что радиоимпульс полу-

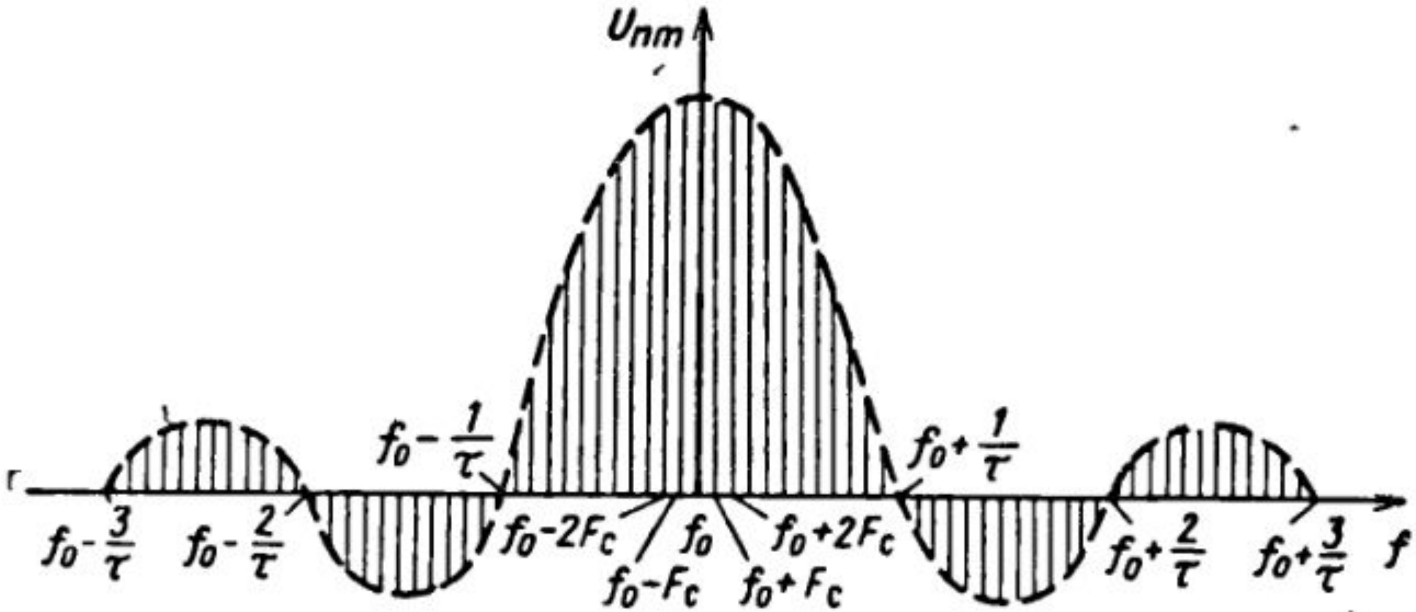


Рис 1.14 Спектр последовательности прямоугольных радиоимпульсов.

чен в результате амплитудной модуляции колебаний с частотой заполнения f_0 гармоническими составляющими прямоугольных видеоимпульсов длительностью τ и периодом следования $T_{..}$

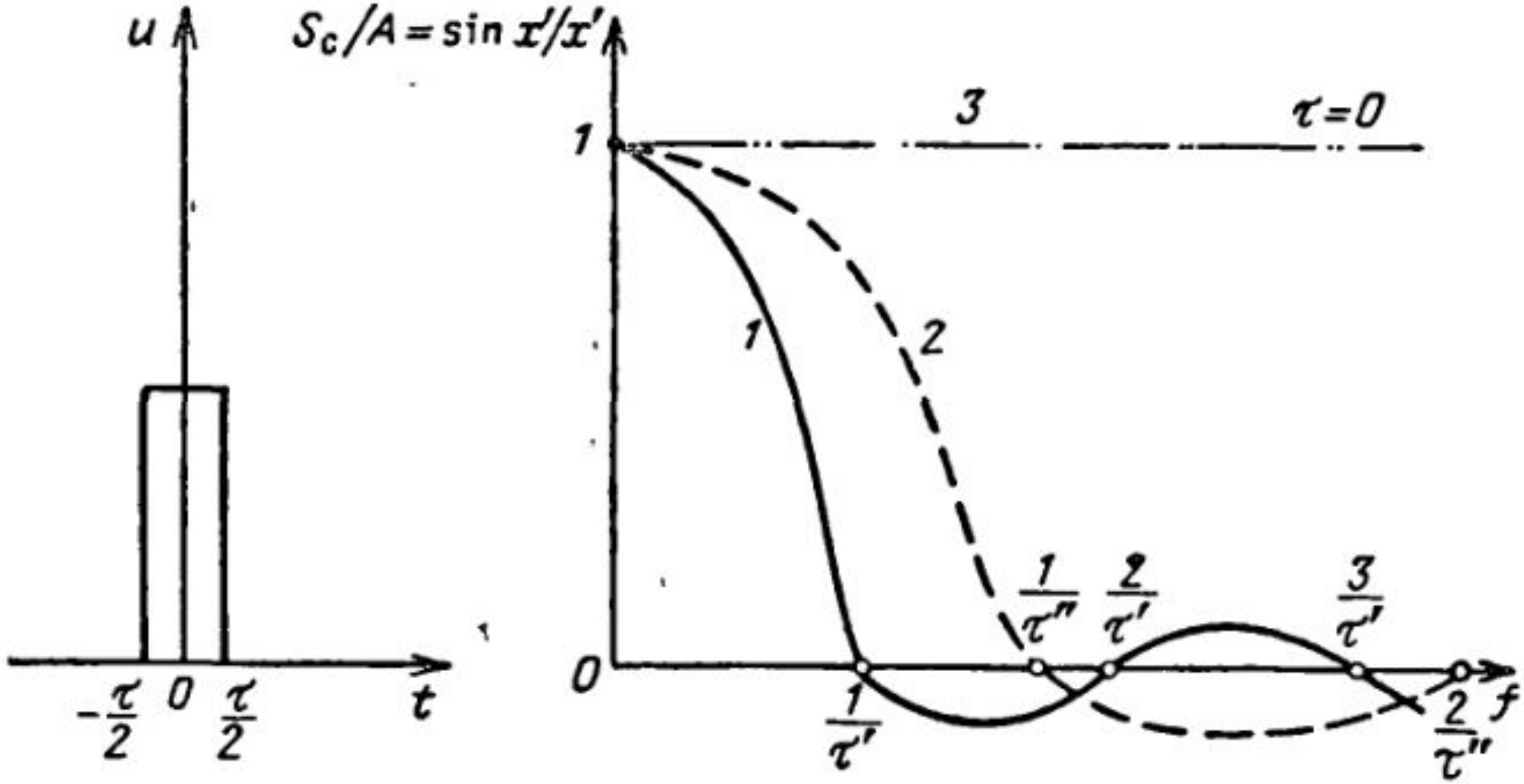


Рис. 1.15. Одиночный прямоугольный импульс и его спектр.

Один из них — *увеличение* $H_с$, *т. е. отношения средней мощности сигнала* $P_с$ *к средней мощности помех* $P_п$. Этот способ требует увеличения мощности передатчика, направленности антенн, а также подавления помех в источнике их возникновения.

Второе направление — *расширение спектра сигнала* $F_{макс}$. Оно реализуется в процессе нелинейной обработки сигналов (модуляции и детектирования) и требует применения широкополосной системы модуляции.

Различие в спектрах сигнала и помехи позволяет увеличить отношение сигнал/помеха *методом фильтрации*. Эффективность этого метода повышается с сужением спектра сигнала, особенно на фоне широкополосной помехи.

Третье направление — *увеличение длительности наблюдения сигнала* $T_с$. Это направление, в частности, используется в методе накопления.

Существенно, что любой из упомянутых методов связан с некоторыми «жертвами»: повышение мощности сигнала требует дополнительных затрат энергии в передатчике и увеличения габаритов и веса аппаратуры; расширение спектра сигнала ограничивает число одновременно работающих станций в данном диапазоне волн; увеличение длительности сигнала ограничивает количество информации, которое за данный отрезок времени может быть передано по линии связи.

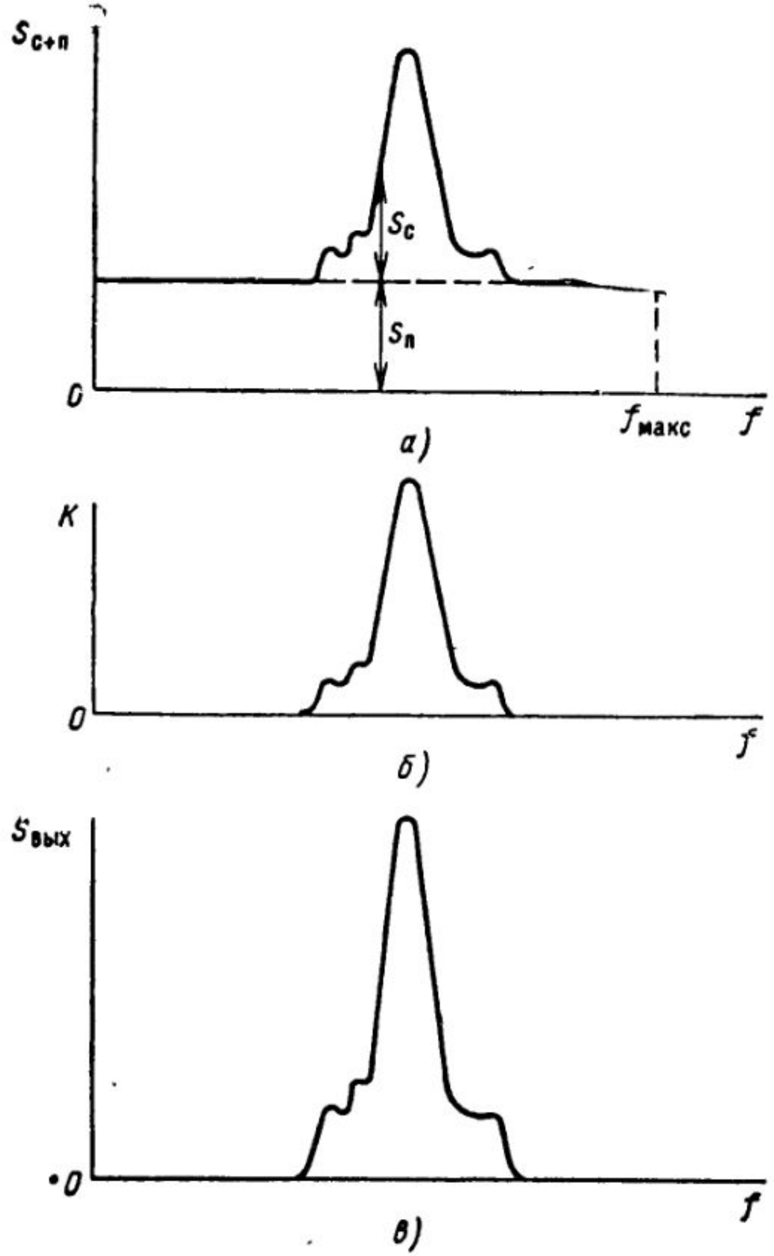


Рис. 10.21. Графики, иллюстрирующие преобразование спектра сигнала и помехи оптимальным фильтром

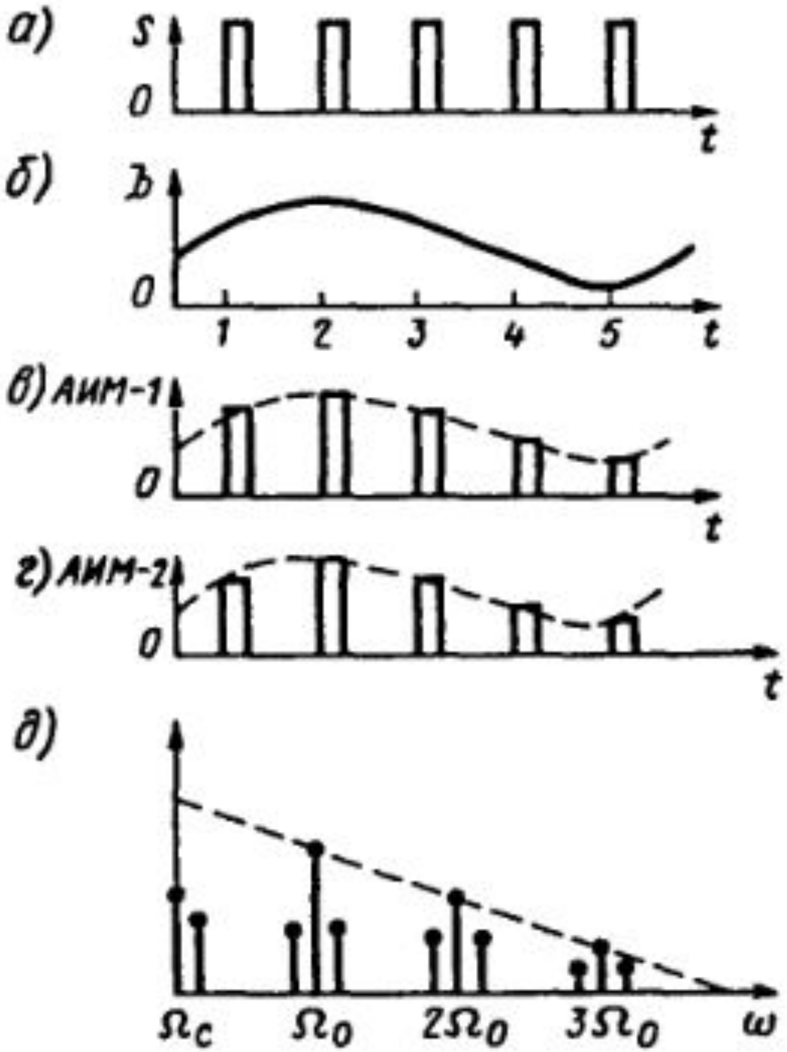


Рис. 3.24

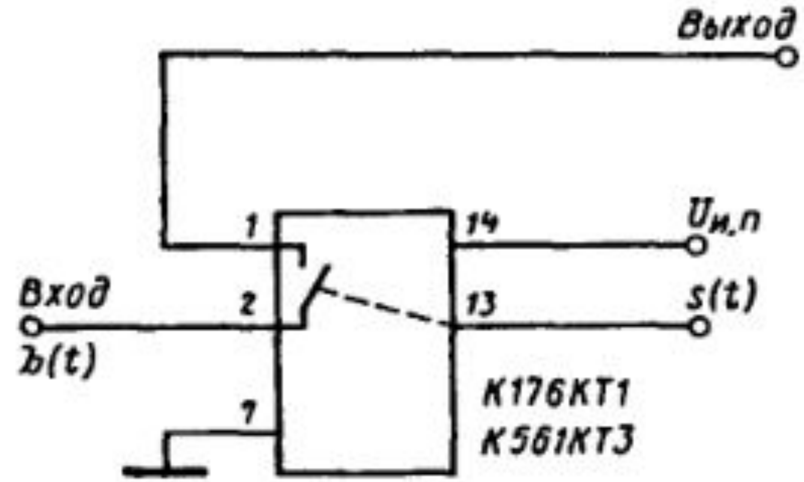


Рис. 3.25

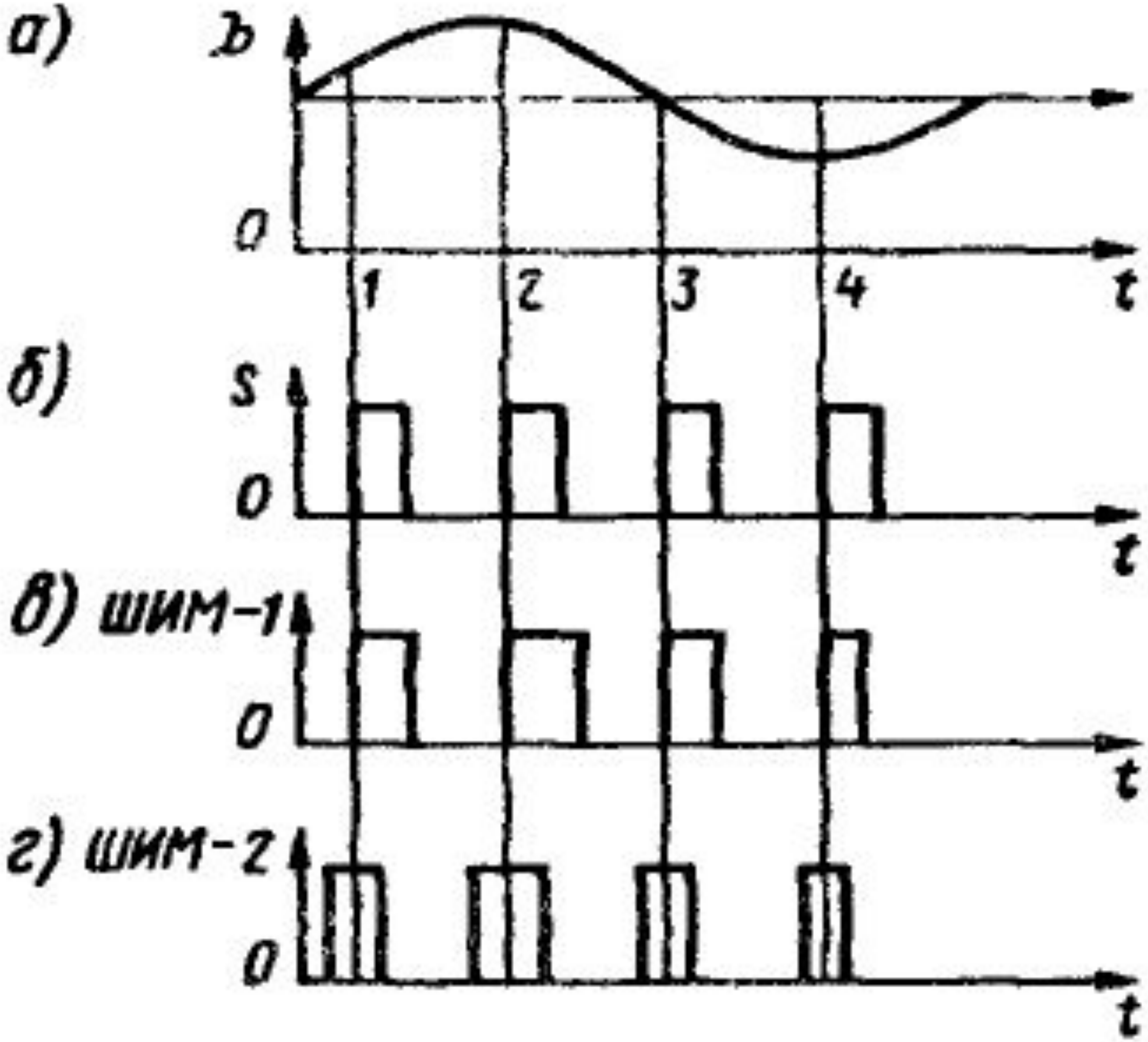
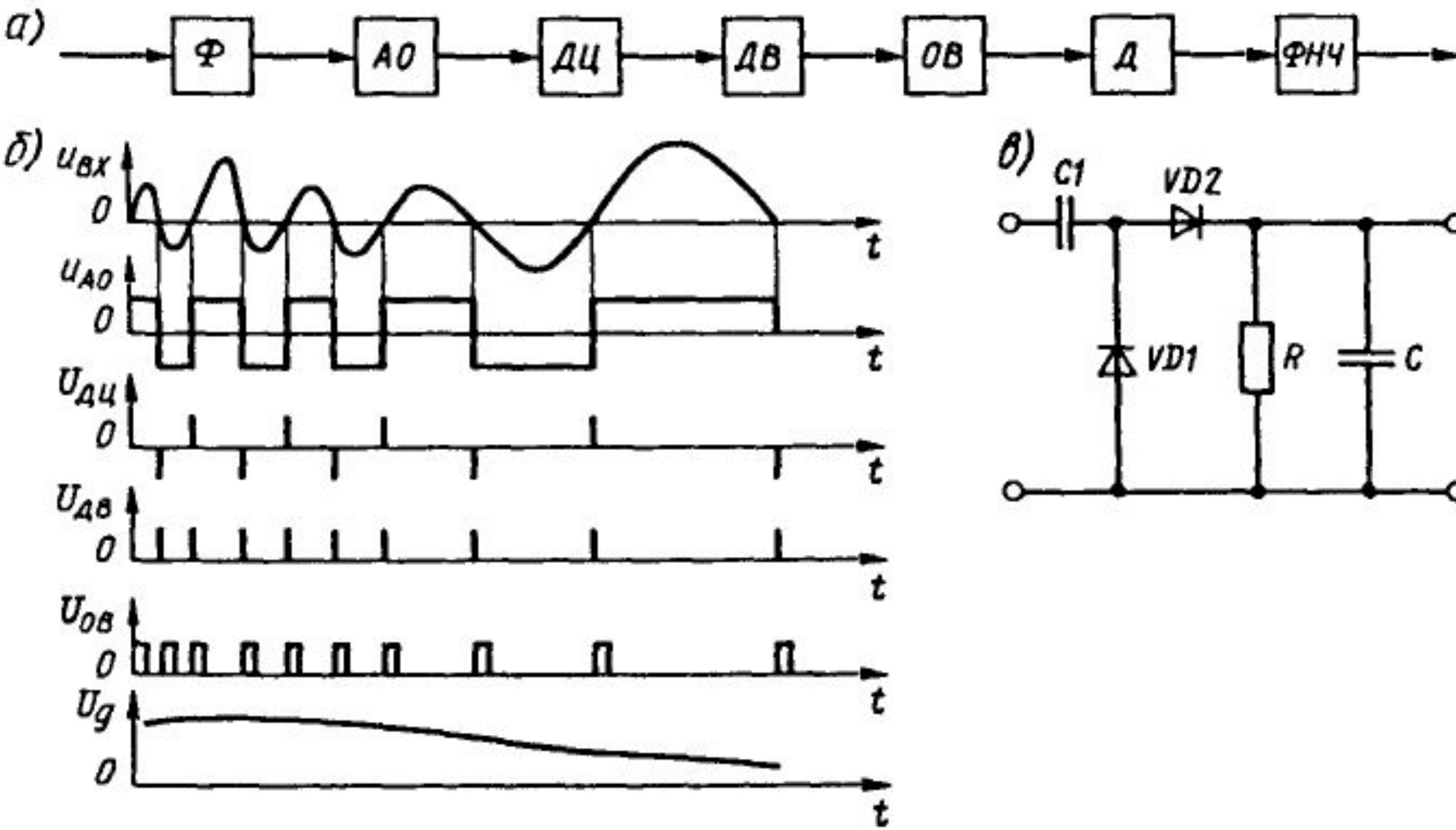


Рис. 3.26



а)
Ф
АО
ДЦ
ДВ
ОВ
Д
ФНЧ
б)
$u_{вх}$
0
t
$u_{АО}$
0
t
$U_{ДЦ}$
0
t
$U_{ДВ}$
0
t
$U_{ОВ}$
0
t
U_g
0
t
в)
C1
VD2
VD1
R
C

Рис. 3.29

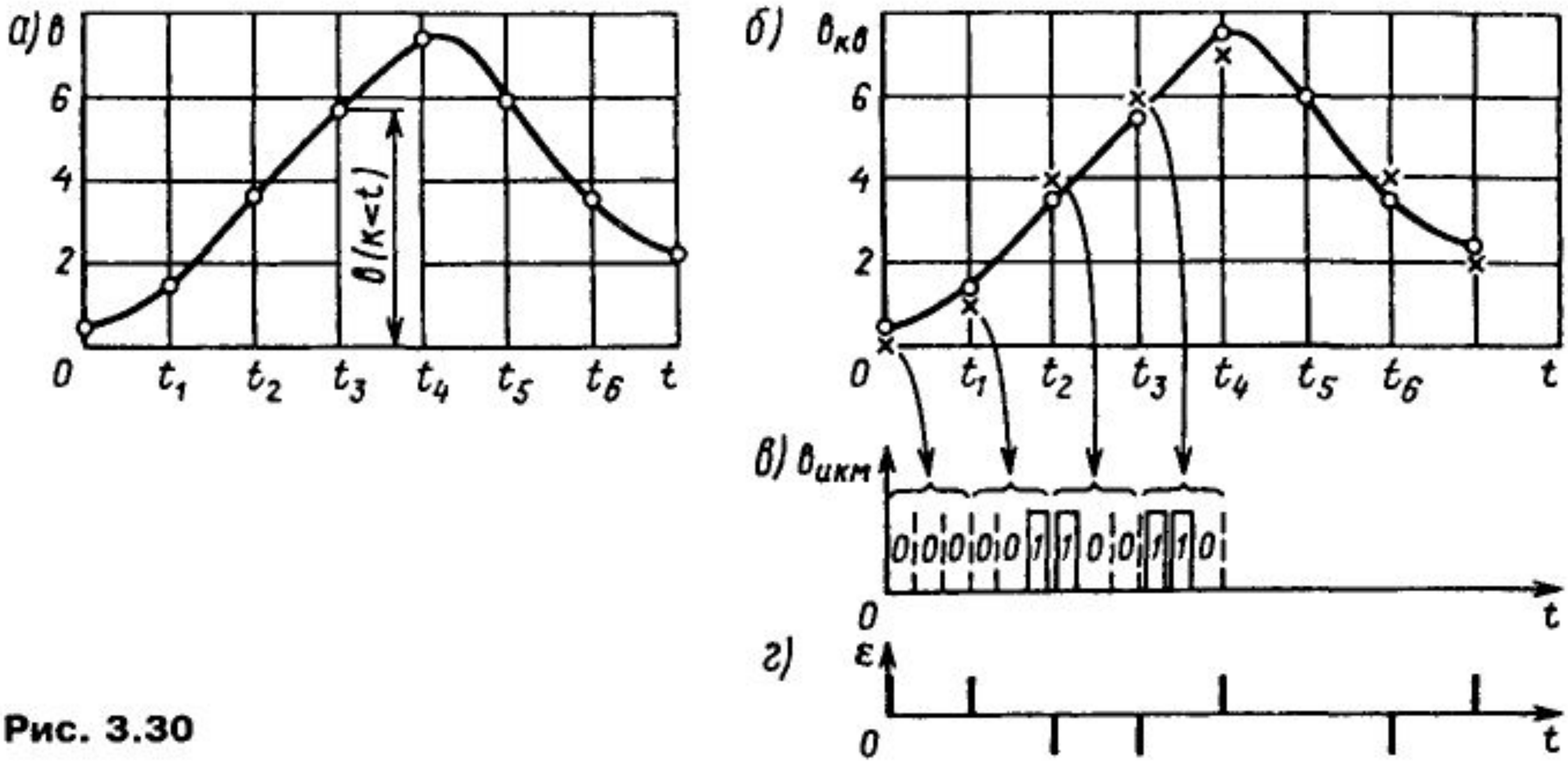
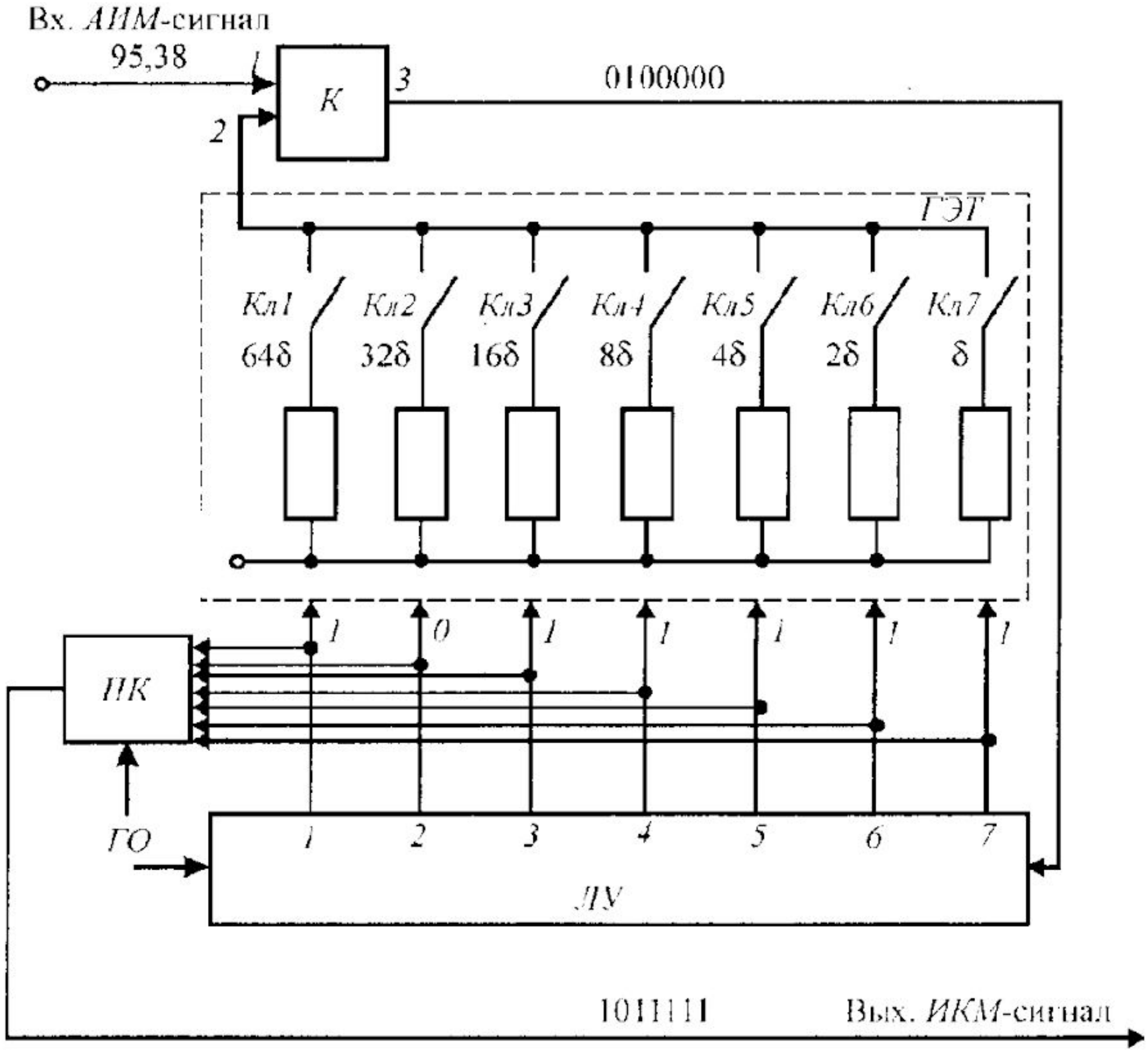
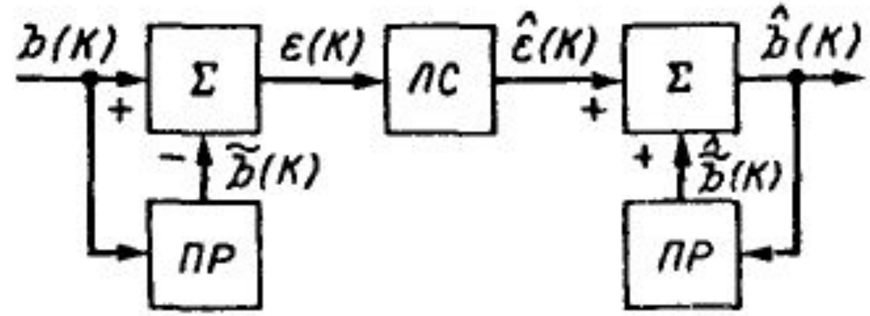


Рис. 3.30

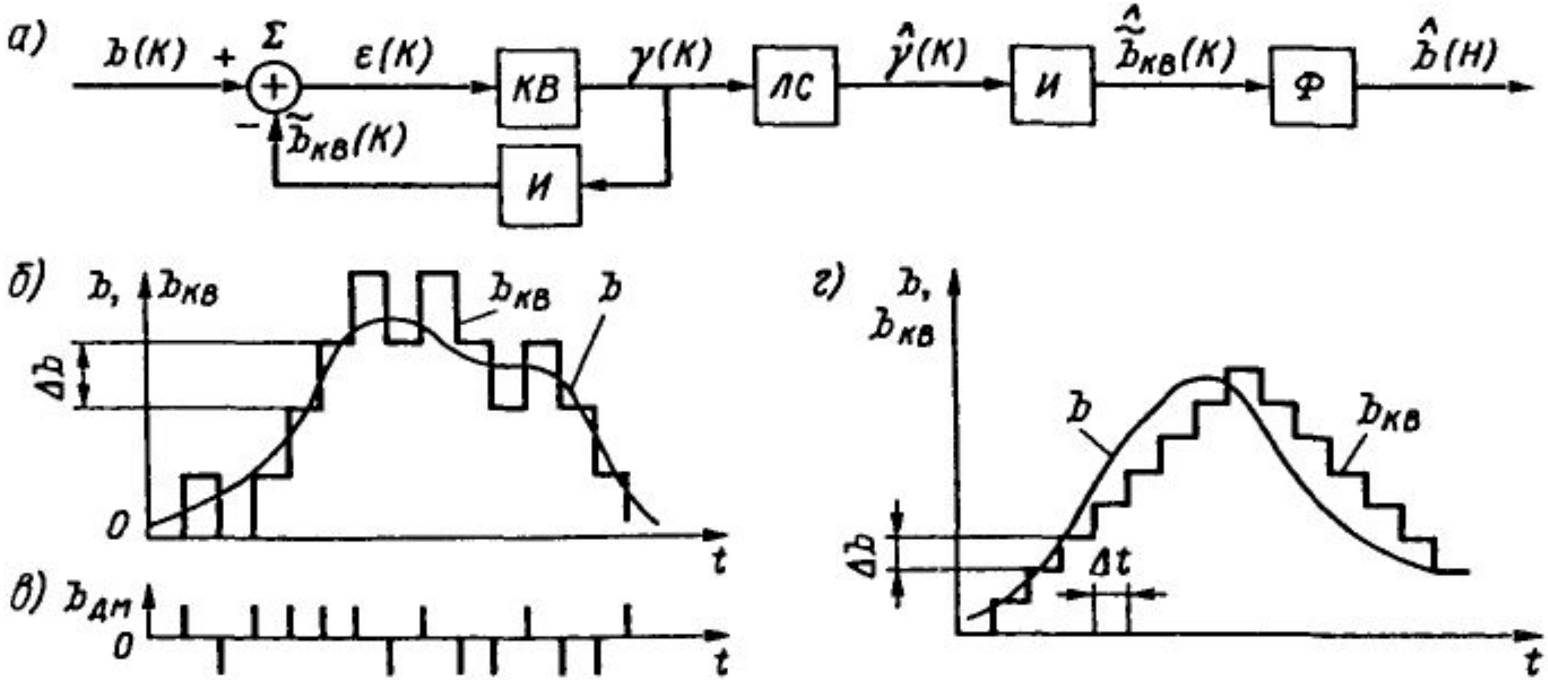
Квантование сигнала по уровню





b(K)
Σ
ε(K)
ЛС
ε̂(K)
Σ
b̂(K)
+
−
b̃(K)
ПР
+
+
ПР

Рис. 3.33



а)
b(K)
+
Σ
ε(K)
КВ
γ(K)
ЛС
γ̂(K)
И
Ф
b̂(H)
−
b̃кв(K)
И
б)
b, bкв
bкв
b
Δb
0
t
в) bДМ
0
t
г)
b,
bкв
b
bкв
Δb
Δt
t

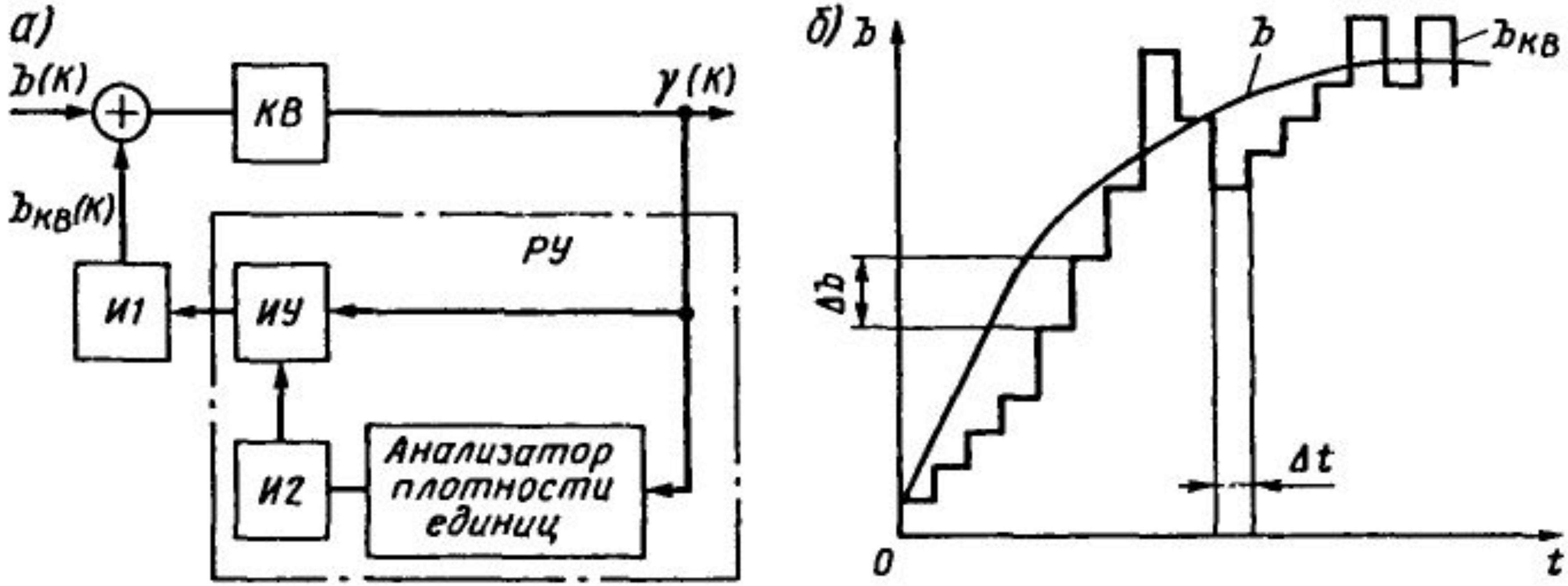
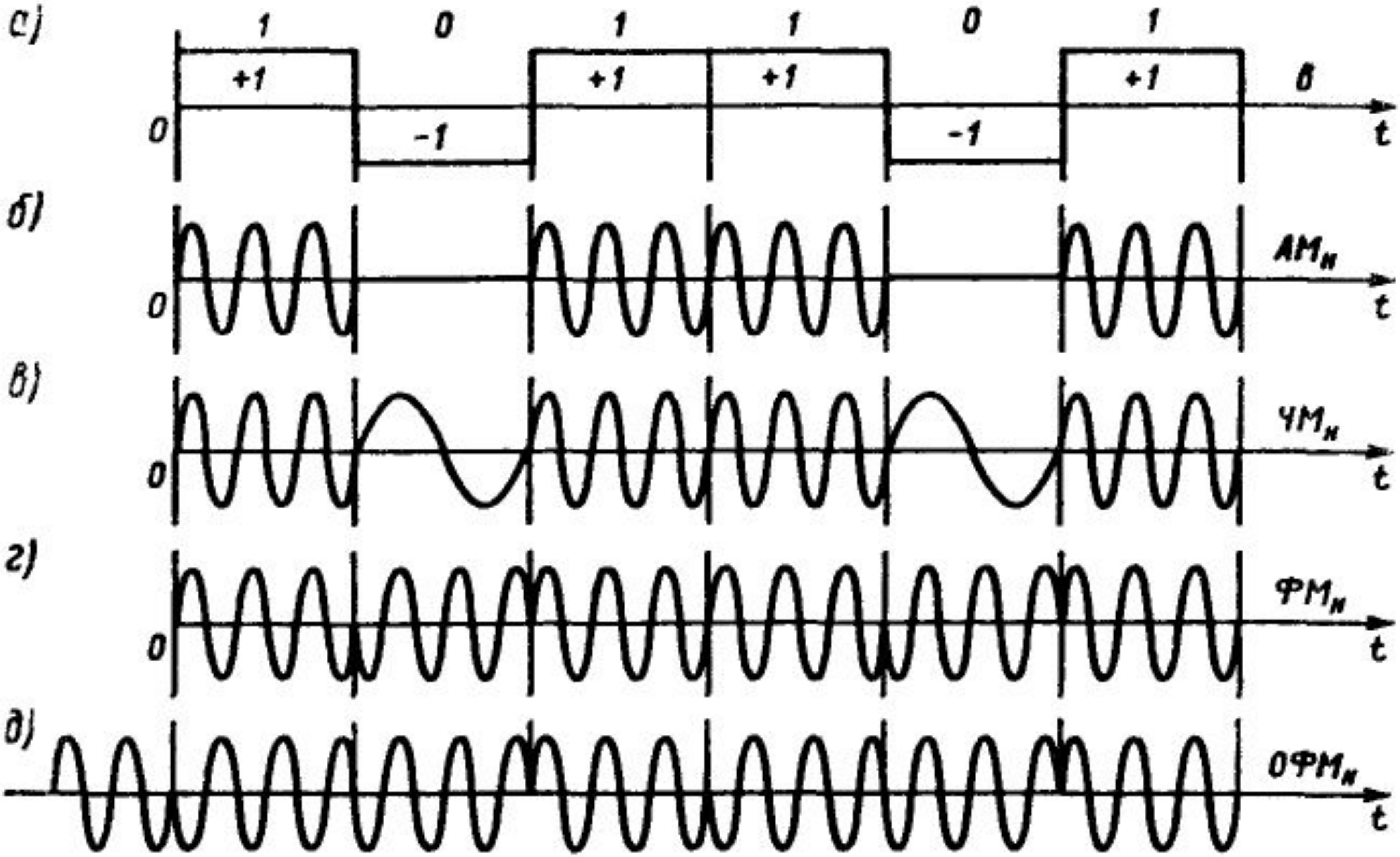

а)
ϑ(к)
КВ
γ(к)
ϑкв(к)
РУ
И1
ИУ
И2
Анализатор
плотности
единиц
б)
ϑ
ϑкв
Δϑ
Δt
0
t

Рис. 3.37



а)
1
0
1
1
0
1
+1
+1
+1
+1
-1
-1
0
t
б)
АМн
в)
ЧМн
г)
ФМн
д)
ОФМн

Дискретный источник выдает сообщение a, принадлежащее некоторому конечному ансамблю A ($a \in A$). Определим количество информации, содержащееся в этом сообщении, используя три исходных естественных (очевидных) требования:

1) количество информации должно быть аддитивной величиной, т. е. в двух независимых сообщениях количество информации определяется как сумма количеств информации в каждом из них (телеграмма с N поезда и расписание поездов, необходимые для встречи);

2) количество информации в сообщении о достоверном событии равно 0 (солнце встает на востоке);

3) количество информации не должно зависеть от качественного содержания сообщения (степени важности, возможных последствий его передачи, эмоциональной окраски и т. п.).

В общем случае сообщение a из ансамбля A характеризуется вероятностью $p(a)$, что источник формирует или посылает это сообщение, т. е. количество информации $i(a)$, содержащейся в сообщении a должно быть функцией от вероятности $p(a)$.

Воспользуемся далее требованием 1) (требованием аддитивности). Пусть a_1 и a_2 — два независимых сообщения. Вероятность $p(a_1, a_2)$ того, что источник выдаст одно за другим эти два сообщения

$$p(a_1, a_2) = p(a_1)p(a_2),$$

где $p(a_1)$, $p(a_2)$ — вероятности формирования сообщения a_1 и a_2 соответственно.

Общее количество информации $i(a_1, a_2)$, содержащейся в этих двух сообщениях, согласно условию аддитивности определяется как сумма количеств информации в каждом из них:

$$i(a_1, a_2) = i(a_1) + i(a_2).$$

Таким образом, надо найти функцию от вероятности $p(\bullet)$ такую, чтобы при перемножении двух аргументов значения функции складывались. Этому условию удовлетворяет только логарифмическая функция

$$i(a) = k \log[p(a)],$$

где k — произвольный коэффициент.

Логарифм, вообще говоря, может быть взят по любому основанию. Эта формула может быть использована для определения количества информации, содержащейся в сообщении a. Эта формула удовлетворяет и требованию 2): в случае достоверного события вероятность сообщения $p(a) = 1$. Тогда количество информации согласно полученной формуле:

$$i(a) = k \log 1 = k \cdot 0 = 0,$$

Поскольку $p(a) \leqslant 1$, и следовательно, $\log p(a) \leqslant 0$, то, чтобы измерять количество информации неотрицательными числами, выбираем значение коэффициента $k = -1$:

$$i(a) = -\log p(a) = \log \frac{1}{p(a)}.$$

4.2. ЭНТРОПИЯ

Количество информации является случайной величиной, поскольку сами сообщения случайны. Очевидно, что для количества информации существует свое распределение вероятностей, которое зависит от распределения вероятностей сообщения в ансамбле. Поэтому удобнее для характеристики всего ансамбля (источника сообщения) использовать математическое ожидание количества информации, которое называют *энтропией*:

$$H(A) = M[i(a)] = M\left[\log\frac{1}{p(a)}\right],$$

где $H(A) = M\left[\log\frac{1}{p(a)}\right]$ — энтропия дискретного источника сообщения.

Усреднение производится по всему ансамблю, с учетом всех вероятностных связей между сообщениями. Чем больше энтропия источника, тем больше степень неожиданности передаваемых им сообщений в среднем, т. е. тем больше неопределенность ожидаемого сообщения в среднем. Поэтому энтропию часто называют *мерой неопределенности сообщений*. При этом под неопределенностью понимают неопределенность, существующую до того как сообщение принято. После приема (если, конечно, он заведомо верен и производится безошибочно) всякая неопределенность устраняется. Количество информации можно расценивать как меру уменьшения неопределенности.

Энтропия — основная информационная характеристика источника сообщений. Чем больше энтропия, тем труднее запомнить сообщение и передать его по каналу связи. Как правило, чем больше энтропия, тем больше энергетические затраты на передачу сообщения.

Основные свойства энтропии следующие:

энтропия неотрицательна $H(A) \geqslant 0$ и равна 0 только для "вырожденного" ансамбля, когда одно сообщение передается с вероятностью $p(a) = 1$, а другие с нулевой вероятностью;

энтропия аддитивна; это приводит к тому, что если рассматривать последовательность n сообщений как одно укрупненное, то энтропия источника таких укрупненных сообщений будет в n раз больше по сравнению с энтропией исходного источника;

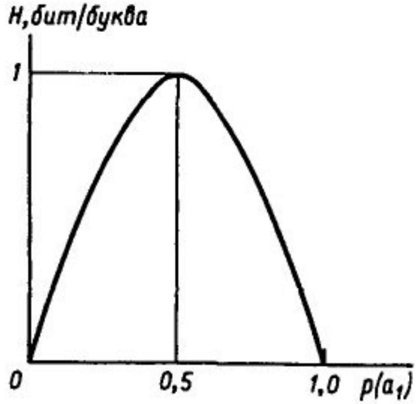


Рис. 4.1

если ансамбль содержит k различных сообщений (k — объем алфавита источника), то $H(A) \leqslant \log k$ (равно в том случае, когда все сообщения равновероятны и независимы).

В частном случае двоичного источника без памяти ($k = 2$; сообщения передаются статически независимо друг от друга) энтропия максимальна в том случае, когда $p(a_1) = p(a_2) = 0{,}5$, при этом $H(A) = \log k = \log 2 = 1$. В этом случае график зависимости энтропии от вероятности появления того или иного сообщения примет вид, представленный на рис. 4.1.

Для данного источника без памяти с объемом алфавита k

$$H(A) = M\left[\log \frac{1}{p(a)}\right] = \sum_{k=1}^{k} p(a_k) \log \frac{1}{p(a_k)}.$$

Пусть, например, $k = 32$ (модель источника-алфавита русской или английской речи). Тогда при условии равновероятности выбора букв по последней формуле определим:

$$H(A) = \sum_{1}^{32} \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{1/32} = 32 \frac{1}{32} \cdot 5 = 5 \text{ бит/буква}.$$

Можно было получить этот результат иначе:

$$H(A) = \log k = \log_2 32 = 5 \text{ бит/буква}.$$

Таким образом, можно сделать следующие выводы относительно степени информативности источников сообщений:

1. *Энтропия* источника и количество информации *тем больше, чем больше размер алфавита* источника.

2. Энтропия источника зависит от статистических свойств сообщений. *Энтропия максимальна, если сообщения источника равновероятны и статистически независимы.*

3. *Энтропия источника, вырабатывающего неравновероятные сообщения, всегда меньше максимально достижимой.*

4. *При наличии статистических связей между элементарными сообщениями (памяти источника) его энтропия уменьшается.*

В качестве примера рассмотрим источник с алфавитом, состоящим из букв русского языка ***а ,б, в,.....,ю, я***. Будем считать для простоты, что размер алфавита источника $K = 2^5 = 32$.

Если бы все буквы русского алфавита имели одинаковую вероятность и были статистически независимы, то средняя энтропия, приходящаяся на один символ, составила бы

$$H(\lambda)_{max} = \log_2 32 = 5 \text{ бит/букву.}$$

В качестве примера рассмотрим источник с алфавитом, состоящим из букв русского языка ***а ,б, в,.....,ю, я***. Будем считать для простоты, что размер алфавита источника $K = 2^5 = 32$.

Если бы все буквы русского алфавита имели одинаковую вероятность и были статистически независимы, то средняя энтропия, приходящаяся на один символ, составила бы

$$H(\lambda)_{max} = \log_2 32 = 5 \text{ бит/букву.}$$

Если теперь учесть лишь различную вероятность букв в тексте (а нетрудно проверить, что так оно и есть), расчетная энтропия составит

$$H(\lambda) = 4{,}39 \text{ бит/букву.}$$

С учетом корреляции (статистической связи) между двумя и тремя соседними буквами (после буквы *"П"* чаще встречается *"А"* и почти никогда – *"Ю"* и *"Ц"*) энтропия уменьшится, соответственно, до

$$H(\lambda) = 3{,}52 \text{ бит/букву} \text{ и } H(\lambda) = 3{,}05 \text{ бит/букву.}$$

Наконец, если учесть корреляцию между восемью и более символами, энтропия уменьшится до

$$H(\lambda) = 2{,}0 \text{ бит/букву}$$

и далее остается без изменений.

В связи с тем, что реальные источники с одним и тем же размером алфавита могут иметь совершенно различную энтропию (а это не только тексты, но и речь, музыка, изображения и т.д.), вводят такую характеристику источника, как *избыточность*

$$\rho_и = 1 - H(\lambda) / H(\lambda)_{max} = 1 - H(\lambda)/\log K, \qquad (1.49)$$

где $H(\lambda)$ - энтропия реального источника, $\log K$ - максимально достижимая энтропия для источника с объемом алфавита в K символов.

Тогда, к примеру, избыточность литературного русского текста составит

$$\rho_и = 1 - (2\ бита/букву)/(5\ бит/букву) = 0{,}6\ .$$

Другими словами, при передаче текста по каналу связи каждые шесть букв из десяти передаваемых не несут никакой информации и могут безо всяких потерь просто не передаваться.

Такой же, если не более высокой ($\rho_и$= 0,9...0,95) избыточностью обладают и другие источники информации - речь, и особенно музыка, телевизионные изображения и т.д.

$$\mathrm{H(A)} = M\{I(a_i)\} = -\sum_{i=1}^{L} \mathrm{P}(a_i) \cdot \log_2 \mathrm{P}(a_i).$$

$$R = \frac{H_{\max}(A) - H(A)}{H_{\max}(A)} = 1 - \frac{H(A)}{H_{\max}(A)} = 1 - \frac{H(A)}{\log_2 L}.$$

Буква	К	У	З	Н	Е	Ц	О	В
$P(a_i)$	0,028	0,021	0,016	0,053	0,072	0,004	0,090	0,038
$P(a_i) \cdot \log_2 P(a_i)]$	0,144	0,117	0,095	0,224	0,270	0,032	0,312	0,179

№	дв. код	буква	$P(a_i)$	№	дв. код	буква	$P(a_i)$
1	00001	А	0,062	17	10001	Р	0,040
2	00010	Б	0,014	18	10010	С	0,045
3	00011	В	0,038	19	10011	Т	0,053
4	00100	Г	0,013	20	10100	У	0,021
5	00101	Д	0,025	21	10101	Ф	0,002
6	00110	Е, Ё	0,072	22	10110	Х	0,009
7	00111	Ж	0,007	23	10111	Ц	0,004
8	01000	З	0,016	24	11000	Ч	0,012
9	01001	И	0,062	25	11001	Ш	0,006
10	01010	Й	0,010	26	11010	Щ	0,003
11	01011	К	0,028	27	11011	Ь, Ъ	0,014
12	01100	Л	0,035	28	11100	Ы	0,016
13	01101	М	0,026	29	11101	Э	0,003
14	01110	Н	0,053	30	11110	Ю	0,006
15	01111	О	0,090	31	11111	Я	0,018
16	10000	П	0,023	32	00000	«_» пробел	0,175

Наиболее полную характеристику источника описывают термином - производительность источника (скорость создания сообщений, поток сообщений). Если в единицу времени источник выдает в среднем V_u символов (скорость источника), то среднее количество информации, создаваемой источником в единицу времени:

$$H'(A) = V_u \cdot \mathrm{H(A)} = \frac{1}{T_{\phi}} H(A),$$

где $T_ф$ - средняя длительность одного символа (буквы). Если буквы алфавита передаются равномерным пятиэлементным (пятиимпульсным) кодом в соответствии с прил. 1, то длительность одной буквы будет одинакова для всех букв и равна $5\tau_и$. Для нашего примера

$$H'(A) = \frac{1}{5\tau_u} \cdot 1{,}373 = 0{,}275 \frac{\text{бит}}{\text{имп.}}.$$

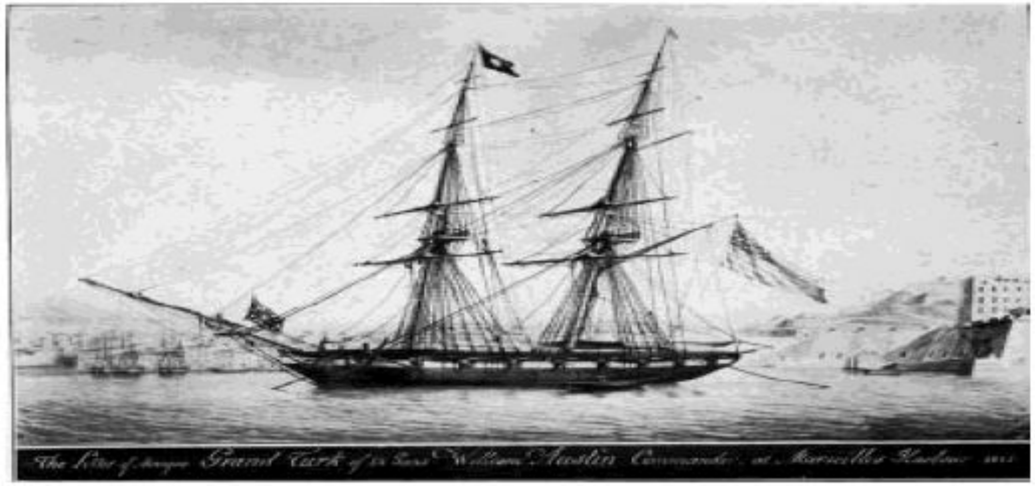


Рис. 1.5

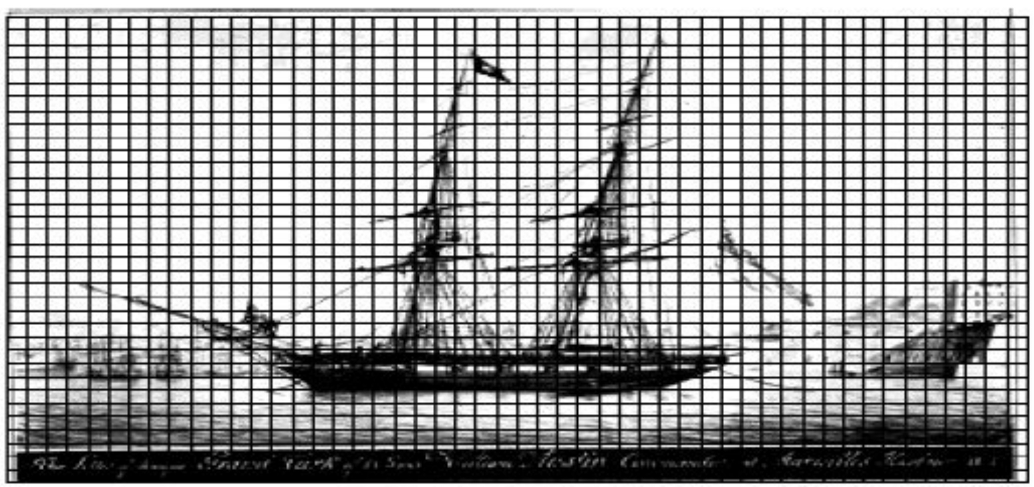


Рис. 1.6

ВАРИАНТ №1 (лист 1)

1. Что такое длительность фронта импульса (один из многих)

Варианты ответов:

- 1) среднее значение длительности сигнала при его изменении
- 2) длительность импульса на уровне 0,5 от амплитуды
- 3) реальное значение переменной составляющей сигнала
- 4) время нарастания или спадания уровня импульса
- 5) длительность импульса на уровне 0,1 от амплитуды

2. Что такое детерминированный сигнал? (один из многих)

Варианты ответов:

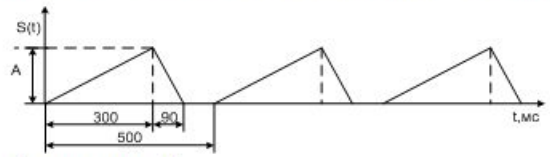
- 1) сигнал, имеющий бесконечную длительность
- 2) сигнал, начало которого не определено
- 3) сигнал, значения которого известны в любой момент времени
- 4) сигнал, все параметры которого не известны
- 5) сигнал с ограниченной энергией

3. Для восстановления сигнала по его спектру требуется: (один из многих)

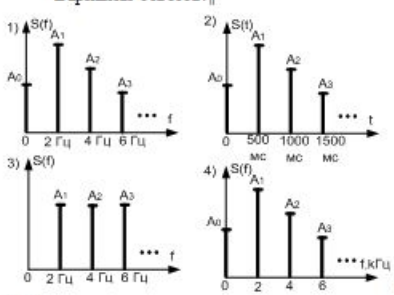
Варианты ответов:

- 1) разложение спектра на простейшие сигналы-составляющие
- 2) аппроксимирование функции сигнала на отрезке
- 3) построение графика спектра на интервале от – бесконечности до + бесконечности
- 4) суммирование всех гармоник сигнала

4. Укажите АЧС для сигнала, представленного на рисунке (один из многих)



Варианты ответов:



5. Дайте определение термину «частота дискретизации» (один из многих)

Варианты ответов:

- 1) величина, обратная интервалу дискретизации
- 2) частотная разница между амплитудным и фазовым спектрами
- 3) располагается по обе стороны от несущей частоты при амплитудной модуляции
- 4) частота повторения сигнала f

ВАРИАНТ №1 (лист 2)

6. Определить минимальную частоту дискретизации сигнала, спектр которого ограничен спектром тональных частот 300 Гц – 3400 Гц. (один из многих)

Варианты ответов:

1) 8000 Гц.
2) 1700 Гц.
3) 3400 Гц.
4) 3700 Гц.
5) 6800 Гц.

7. Дайте определение модуляции ШИМ (один из многих)

Варианты ответов:

- 1) это модуляция ширины спектра несущего колебания
- 2) это модуляция ширины спектра боковой полосы
- 3) это модуляция ширины несущих импульсов периодом модулирующего сигнала
- 4) это модуляция ширины несущих импульсов амплитудой модулирующего сигнала
- 5) это модуляция ширины несущих импульсов частотой модулирующего сигнала

8. Определить индекс частотной модуляции в случае модуляции несущей чистым тоном частотой 2 кГц, если девиация частоты несущей равна 10 кГц. (один из многих)

Варианты ответов:

1) 5. 5) 20.
2) 6.
3) 8.
4) 12

9. Укажите свойство, не относящееся к энтропии (один из многих)

Варианты ответов:

- 1) Энтропия – вещественна, положительна, >0, ограничена т.к. P()<1
- 2) Энтропия = 0 для детерминированных сообщений (из определения)
- 3) Энтропия – min, если все события равновероятны
- 4) Энтропия бинарной системы (2-х альтернативной) изменяется от 0 до 1

10. Используя метод накопления для борьбы с помехами и считая, что вероятности сбоя символов 1 и 0 в канале одинаковы, принять решение о том, какая кодовая комбинация была передана, если при ее трехкратном повторении по телеграфным каналам связи было принято следующее: 00001, 11010, 01101. (один из многих)

Варианты ответов:

1) 01001.
2) 10110.
3) 00100.
4) 10001.
5) 01010.

Разрыв раздела (со следующей страницы)