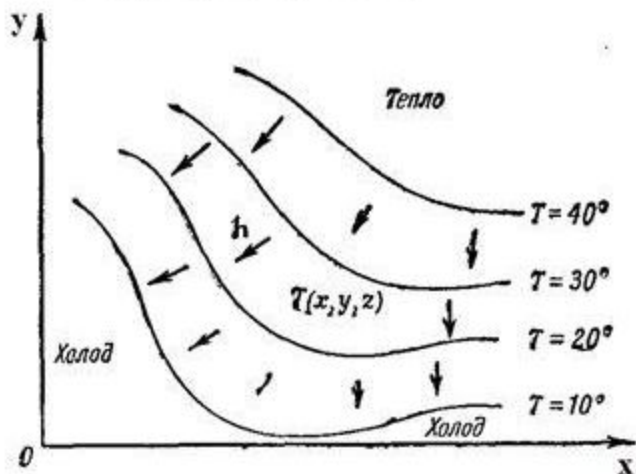
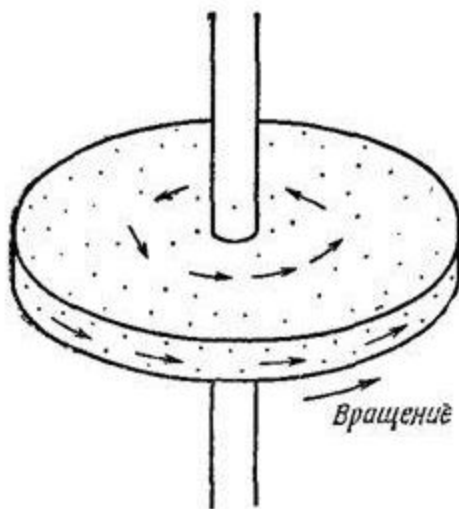


## Скалярное поле



Температура  $T$  – это скалярное поле. На рисунке представлены изотермы – линии с равными температурами. Поток тепла от горячей точки к холодной (отмечено стрелками) – это векторное поле

## Векторное поле



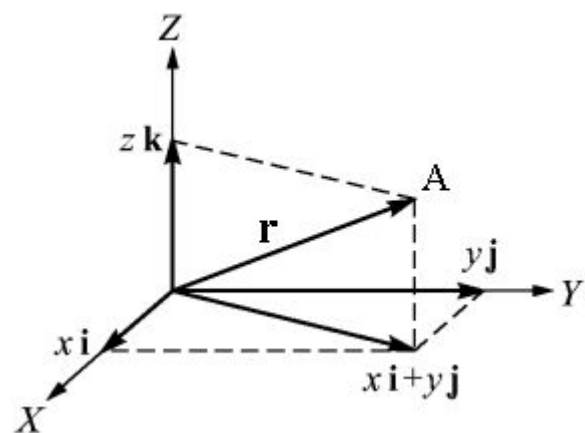
Пример векторного поля – это скорость атомов во вращающемся теле. Каждый вектор привязан к конкретному атому и имеет разное направление при движении и разное местоположение

$$\overline{\text{grad } u} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

$$\text{grad}U = \nabla U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$



Вычисление градиента скалярной функции

Задана скалярная функция :  $f(x,y,z) = x^2 \cdot y \cdot z^3$

$$\text{Grad}(f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y,z) \\ \frac{d}{dy} f(x,y,z) \\ \frac{d}{dz} f(x,y,z) \end{pmatrix}$$

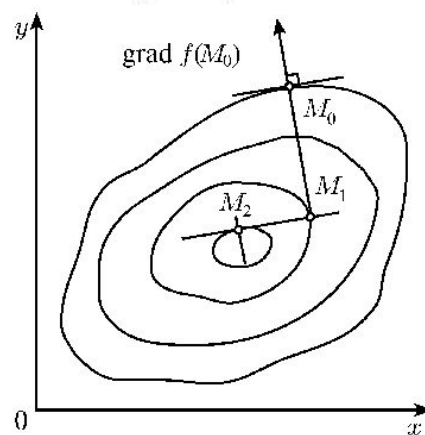
Символическое вычисление :

$$\text{Grad}(f,x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} 2xy z^3 \\ x^2 z^3 \\ 3x^2 y z^2 \end{pmatrix}$$

Численное значение в точке (1,2,3):

$$\text{Grad}(f,1,2,3) = \begin{pmatrix} 108 \\ 27 \\ 54 \end{pmatrix}$$

Полученный вектор указывает величину и направление максимального возрастания функции.



Для векторного поля введены  
два оператора первого порядка

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \mathbf{F}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = [\nabla \mathbf{F}]$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{U} &= \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{i} U_x + \mathbf{j} U_y + \mathbf{k} U_z) = \\ &= \left( \frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \\ &\quad + \left( \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

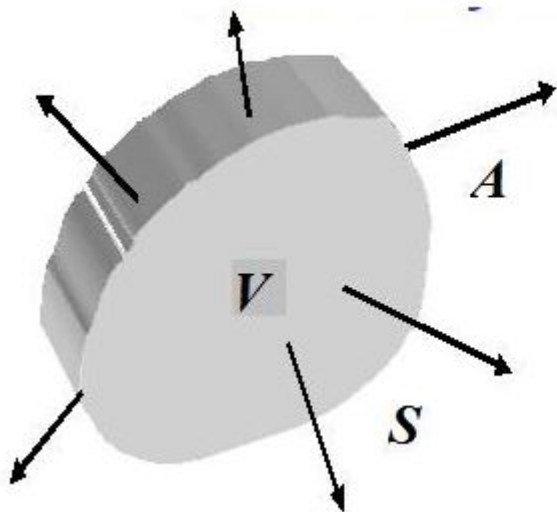
$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{E} d\vec{S}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$



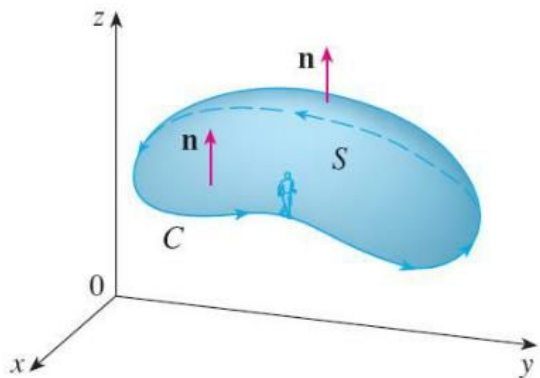
**Вихрь (ротатор) векторного поля  $\mathbf{B}$**

$$\operatorname{rot} \cdot \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$



## Теорема Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV$$



## Teorema Stokes

### Физический смысл формулы Стокса

- Циркуляция векторного поля вдоль положительного направления контура равна потоку вектора – ротора поля через любую поверхность, натянутую на данный контур:

$$\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} (\operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n}^0) d\sigma$$

Mathcad - [RotF.xmcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U QuickSheets Go

Вычисление ротора векторной функции rot(A)

$$A(x,y,z) := \begin{pmatrix} xz^3 - y \\ -zy^2 \\ 2x^2 - y \end{pmatrix} \text{ - заданная векторная функция}$$

$$\text{rot}(f,x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dy}f(x,y,z)_2 - \frac{d}{dz}f(x,y,z)_1 \\ \frac{d}{dz}f(x,y,z)_0 - \frac{d}{dx}f(x,y,z)_2 \\ \frac{d}{dx}f(x,y,z)_1 - \frac{d}{dy}f(x,y,z)_0 \end{pmatrix} \text{ - функция вычисления ротора}$$

Символическое значение :

$$\text{rot}(A,x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} 2x^2 + y^2 \\ 3xz^2 - y - 4xy \\ (-x)z^3 \end{pmatrix}$$

Численное значение в точке (4,2,3):

$$\text{rot}(A,4,2,3) = \begin{pmatrix} 36 \\ 184 \\ -108 \end{pmatrix}$$

+

**Math**

$x = \int \frac{d}{dx} \frac{1}{x^2}$

**Calculator**

sin cos tan ln log  
n! i |x| √ °Γ  
e<sup>x</sup> 1/x ( ) x<sup>2</sup> x<sup>y</sup>  
π 7 8 9 /  
¼ 4 5 6 ×  
÷ 1 2 3 +  
:= . 0 - =

**Matrix**

$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} \times_n \times^{-1} |x|$   
f(t) M<sup>></sup> M<sup>T</sup> m...n  
∑ ∙ ∇ ∑x ∇ ∑v  $\frac{d^2}{dx^2}$

**Graph**

Plot, 3D, etc.

**Evaluati...**

= := ≡  
→ •→ f x  
x f x f y x f y

**Boolean**

= < > ≤ ≥  
≠ → ^ v ⊕

**Calculus**

$\frac{d}{dx}$   $\frac{d^n}{dx^n}$  ∞  
∫<sub>a</sub><sup>b</sup> ∑<sub>n=1</sub><sup>∞</sup> ∏<sub>n=1</sub><sup>∞</sup>  
∫ ∑<sub>n</sub> ∏<sub>n</sub>  
lim<sub>→a</sub> lim<sub>→a+</sub> lim<sub>→a-</sub>

**Greek**

α β γ δ ε ζ  
η θ ι κ λ μ  
ν ξ ο π ρ σ  
τ υ φ χ ψ ω  
Α Β Γ Δ Ε Ζ  
Η Θ Ι Κ Λ Μ  
Ν Ξ Ο Π Ρ Σ  
Τ Υ Φ Χ Ψ Ω

**Symbolic**

→    •→    Modifiers  
float    complex    assume  
solve    simplify    substitute  
factor    expand    coeffs  
collect    series    parfrac  
fourier    laplace    ztrans  
invfourier    invlaplace    invztrans  
M<sup>T</sup> →    M<sup>-1</sup> →    |M| →  
explicit

**Programming**

Add Line ←  
if    otherwise  
for    while  
break    continue  
return    on error

# Gradient, Divergence and Curl

## *The Del Operator*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

- Gradient of a scalar function is a vector quantity.
- Divergence of a vector is a scalar quantity.
- Curl of a vector is a vector quantity.
- The Laplacian of a scalar A

$$\nabla f \quad \longrightarrow \quad \text{Vector}$$

$$\nabla \cdot A$$

$$\nabla \times A$$

$$\nabla^2 A$$

$$\textit{grad}(\textit{div}\mathbf{F}) \equiv \nabla(\nabla\mathbf{F})$$

$$\textit{div}(\textit{grad}U) \equiv \nabla(\nabla U)$$

$$\textit{div}(\textit{rot}\mathbf{F}) \equiv \nabla[\nabla\mathbf{F}]$$

$$\textit{rot}(\textit{grad}U) \equiv [\nabla(\nabla U)]$$

$$\textit{rot}(\textit{rot}\mathbf{F}) \equiv [\nabla[\nabla\mathbf{F}]]$$

Правило вычисления определителя  $\Delta_3$  равносильно правилу треугольников (правилу Саррюса), которое схематически можно записать как



$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Если векторы  $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$  и  $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$  заданы своими координатами, то векторное произведение находится по формуле:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



дивергенция векторного произведения

$$(\vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \times \vec{B}]) = (\vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \times \vec{B}]) + (\vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \times \vec{B}]).$$

$$(\vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \times \vec{B}]) = (\vec{B} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{A}]) = (\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A}).$$

$$(\vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \times \vec{B}]) = -(\vec{\nabla} \cdot [\vec{B} \times \vec{A}]) = -(\vec{A} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{B}]) = (\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}).$$

$$\text{div} [\vec{A} \times \vec{B}] = (\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}).$$

дивергенция произведения скалярного и векторного полей

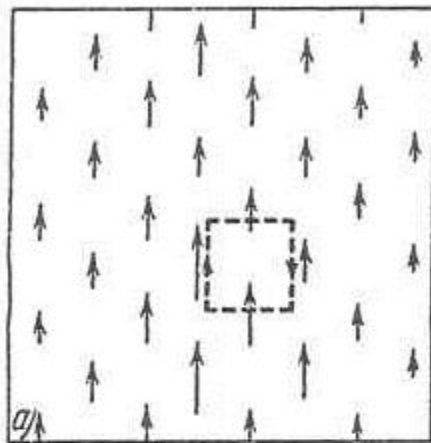
$$\text{div} (U \vec{A}) = (\vec{\nabla} \cdot U \vec{A}).$$

$$(\vec{\nabla} \cdot U \vec{A}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{U} \vec{A}) + (\vec{\nabla} \cdot U \vec{A}).$$

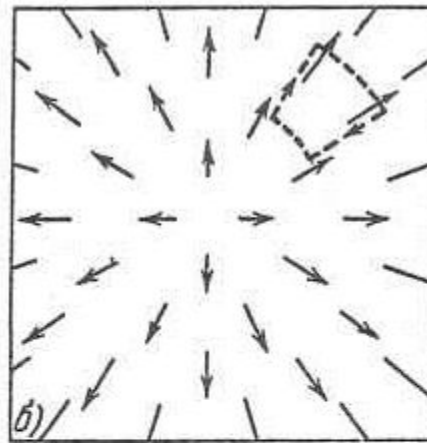
$$(\vec{\nabla} \cdot U \vec{A}) = (\vec{\nabla} U \cdot \vec{A}) + U(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}).$$

$$\text{div}(U \vec{A}) = (\vec{\nabla} \cdot U \vec{A}) = (\vec{A} \cdot \text{grad} U) + U \text{div} \vec{A}.$$

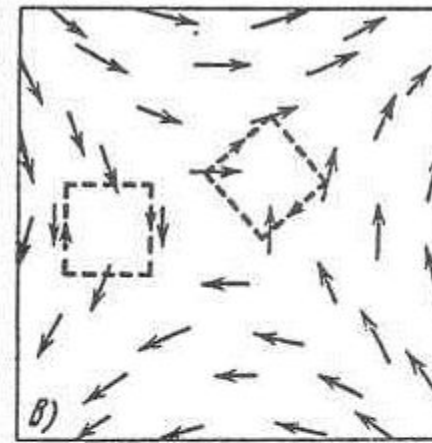
## Значения дивергенции и ротора векторного поля в выделенной области



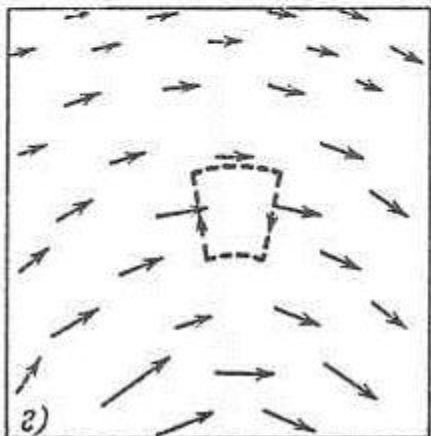
*div F=0 rot F≠0*



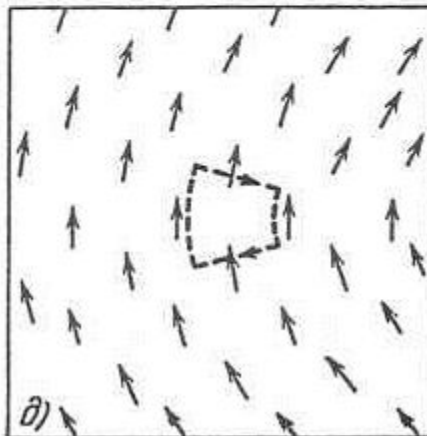
*div F≠0 rot F=0*



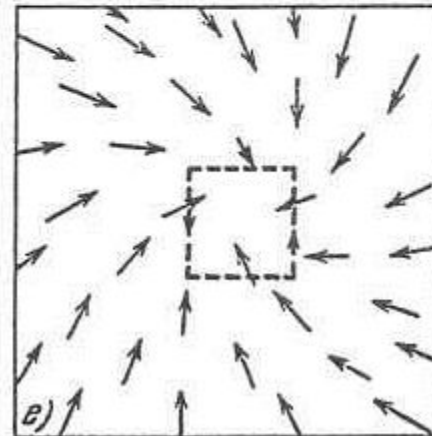
*div F=0 rot F=0*



*div F=0 rot F=0*



*div F=0 rot F≠0*



*div F≠0 rot F=0*

[http://studbooks.net/2395482/matematika\\_himiya\\_fizika/operator\\_laplasa](http://studbooks.net/2395482/matematika_himiya_fizika/operator_laplasa)