Scapegoat Tree

Выполнил Димов А.А. ИМ15-06Б

Руководитель Олейников Б.В.

Разработана Arne Andersson, Igal Galperin, Ronald L. Rivest в 1962г.

Ronald L. Rivest

Arne Andersson

Определение

- Scapegoat tree – структура данных, представляющее из себя самобалансирующееся бинарное дерево поиска.

- Операции поиска, вставки и удаления работают за $O(log\ N)$, при этом скорость одной операции может быть улучшена за счет другой

Понятия, необходимые для работы с данным деревом:

- T-дерево
- $root[T]$-корень дерева T
- $left[x]$,$right[x]$-левые и правый "сын" вершины
- $brother(x)$- брат вершины (имеет общего родителя)
- $depth(x)$-глубина вершины (расстояние от вершины до корня)
- $height(x)$-глубина дерева T
- $size(x)$-вес вершины x (кол-во всех ее дочерних вершины+1)
- $size[T]$-размер дерева T (вес корня)
- *max_size[T] – максимальный размер дерева T.*

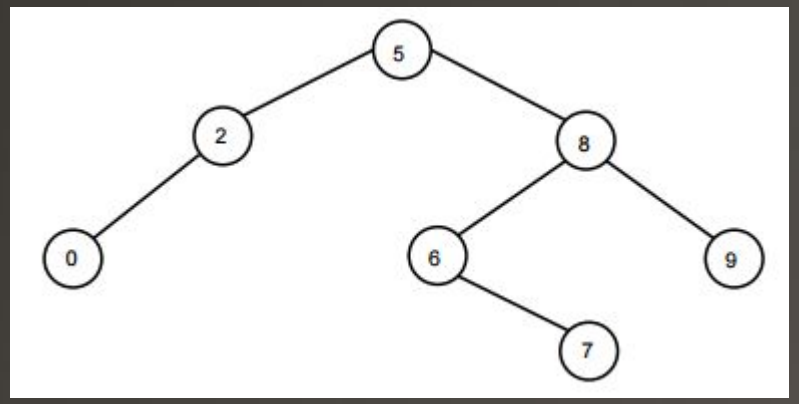
- При работе необходимо поддерживать состояние сбалансированного дерева, иначе время работы операции поиска может превысить $O(\log n)$.

Степень сбалансированности

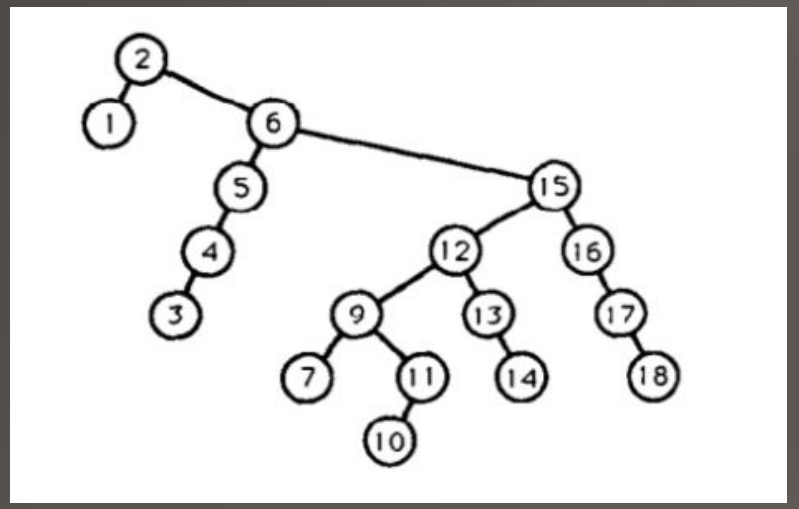
- Коэффициэнт α — это число в диапазоне от [0.5; 1), определяющее требуемую степень качества балансировки дерева. Некоторая вершина x называется "α-сбалансированной по весу", если вес её левого сына меньше либо равен α * size(x) и вес ей правого сына меньше либо равен α * size(x).

$$size(left[x]) \leq \alpha * size(x)$$
$$size(right[x]) \leq \alpha * size(x)$$

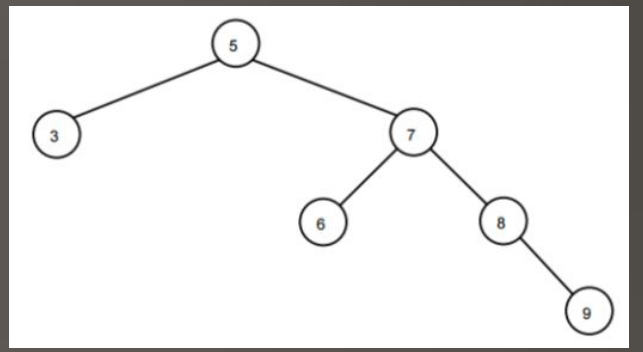
Примеры



$a = 0.6$



$a = 0.57$



$a = 0.55$

Плюсы и минусы Scapegoat дерева

Плюсы

- Скорость одних операций возможно улучшить за счет других операций.
- Scapegoat tree работает быстрее, чем красно-черное дерево и декартово.
- Требуется меньше памяти (не надо хранить информацию для балансировки).
- Настройки скорости меняются в процессе выполнения.
- Не требуется перебалансировать дерево при поиске.

Минусы

- В худшем случае операции модификации дерева могут занять $O(N)$ времени.
- В случае неправильного выбора парметра $alpha$ часто используемые операции будут работать долго, а редко используемые – быстро. При этом дерево будет уступать остальным по скорости

Поиск

- Данная операция стандратна для двоичного дерева поиска. Необходимо пройти от корня, сравнивая каждую вершину с искомым значением, если найдено – возврат значения, иначе, если значение в вершине меньше, то рекурсивно ищем в левом поддереве, если больше – в правом.
- Сложность операции зависит от $alpha$:
  - $O(\log_{1/a} N)$

Вставка

- Начинается вставка нового элемента в Scapegoat-дерево классически: поиском ищем место, куда бы подвесить новую вершину и подвешиваем.
- Легко понять, что это действие могло нарушить α-балансировку по весу для одной или более вершин дерева. И вот теперь начинается то, что и дало название структуре данных: мы ищем «козла отпущения» (Scapegoat-вершину) — вершину, для которой потерян α-баланс и её поддерево должно быть перестроено.
- Сама только что вставленная вершина, хотя и виновата в потере баланса, «козлом отпущения» стать не может — у неё ещё нет «детей», а значит её баланс идеален.
- Соответственно, нужно пройти по дереву от этой вершины к корню, пересчитывая веса для каждой вершины по пути. Если на этом пути встретится вершина, для которой критерий α-сбалансированности по весу нарушился — мы полностью перестраиваем соответствующее ей поддерево так, чтобы восстановить α-сбалансированность по весу.

Перебалансировка

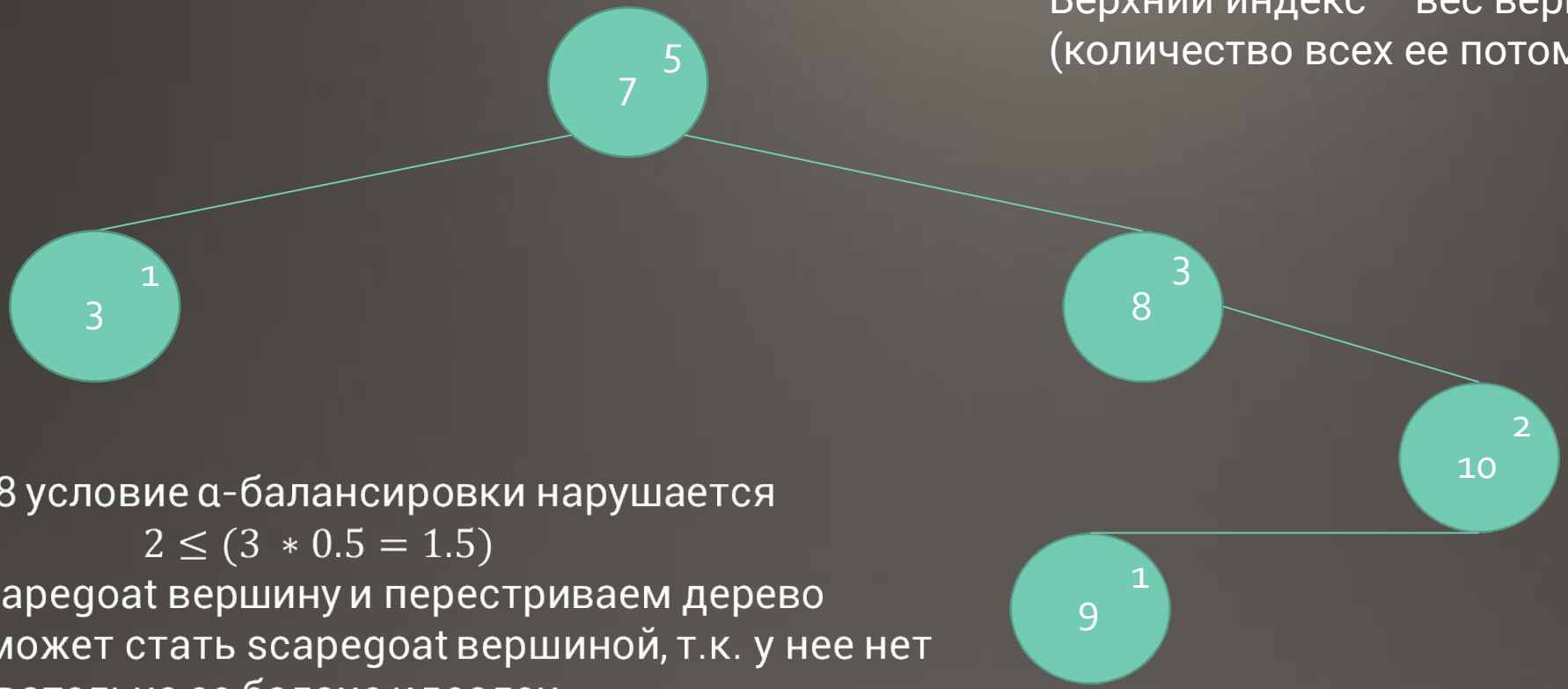
Обходим всё поддерево Scapegoat-вершины (включая её саму) с помощью in-order обхода — на выходе получаем отсортированный список (свойство In-order обхода бинарного дерева поиска).

- Находим медиану на этом отрезке, подвешиваем её в качестве корня поддерева.
- Для «левого» и «правого» поддерева рекурсивно повторяем ту же операцию.

```
if start > ends then
    begin
       result := Nil;
      exit;
    end;
  mid := ceil((start + ends) / 2.0);
  d := nodesList[mid];
  p := Node.Create(d.key);
  leftNode := self.buildTreeFromSortedList(nodesList, start, mid-1);
  p.left := leftNode;
  rightNode := self.buildTreeFromSortedList(nodesList, mid+1, ends);
  p.right := rightNode;
  result := p;
```

Пример:
α = 0.5

Верхний индекс – вес вершины (количество всех ее потомков + 1)



- Для вершины 8 условие α-балансировки нарушается

$$2 \leq (3 * 0.5 = 1.5)$$

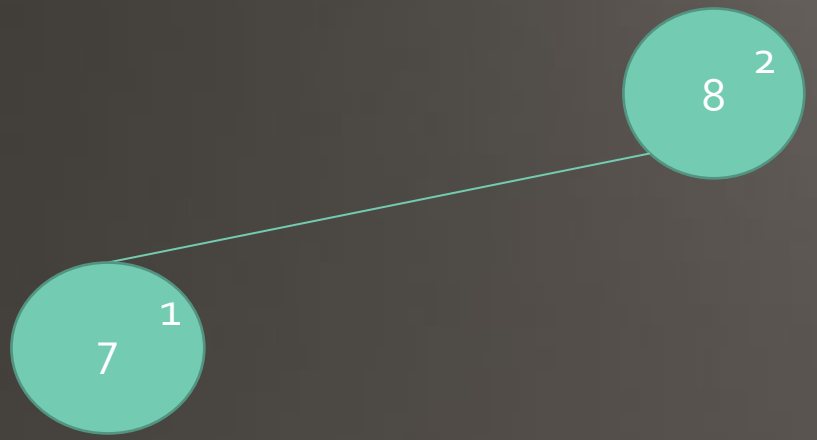
- Берем 8 как scapegoat вершину и перестриваем дерево
- Вершина 9 не может стать scapegoat вершиной, т.к. у нее нет детей, а следовательно ее баланс идеален

Пример:
α = 0.5

Верхний индекс – вес вершины
(количество всех ее потомков + 1)

- Вычислив медиану (2) (start = 0, ends = 4), подвешиваем 8 в качестве корня поддерева (в данном случае корень самого дерева)

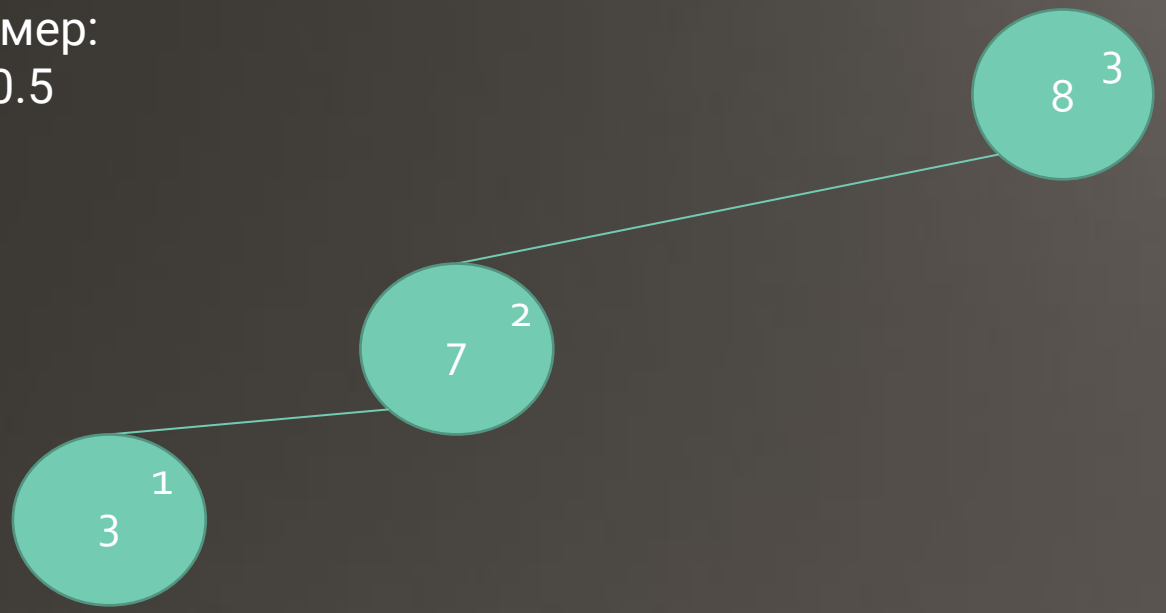
Пример:
α = 0.5



Верхний индекс – вес вершины
(количество всех ее потомков + 1)

- Далее, рекурсивно проходим влево, выполняем туже функцию, уменьшая параметр ends.
- В левое поддерево подвешиваем 7

Пример:
α = 0.5

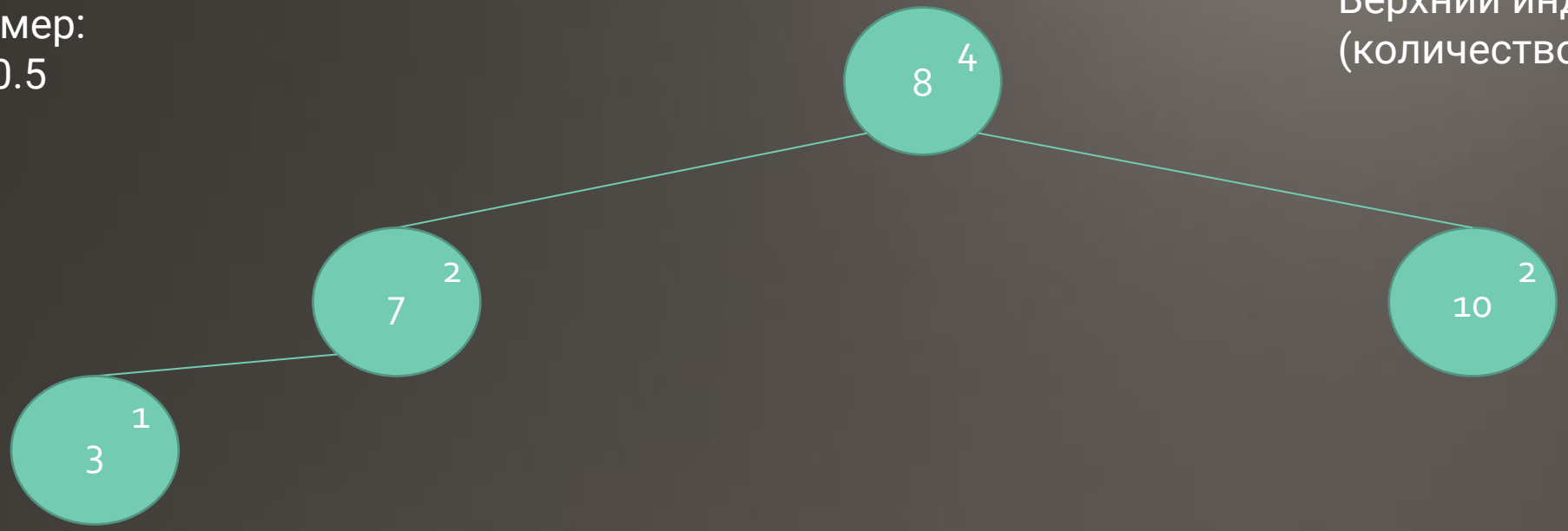


Верхний индекс – вес вершины
(количество всех ее потомков + 1)

- Далее, рекурсивно проходим влево, выполняем туже функцию, уменьшая параметр ends.
- В левое поддерево подвешиваем 3

Пример:
α = 0.5

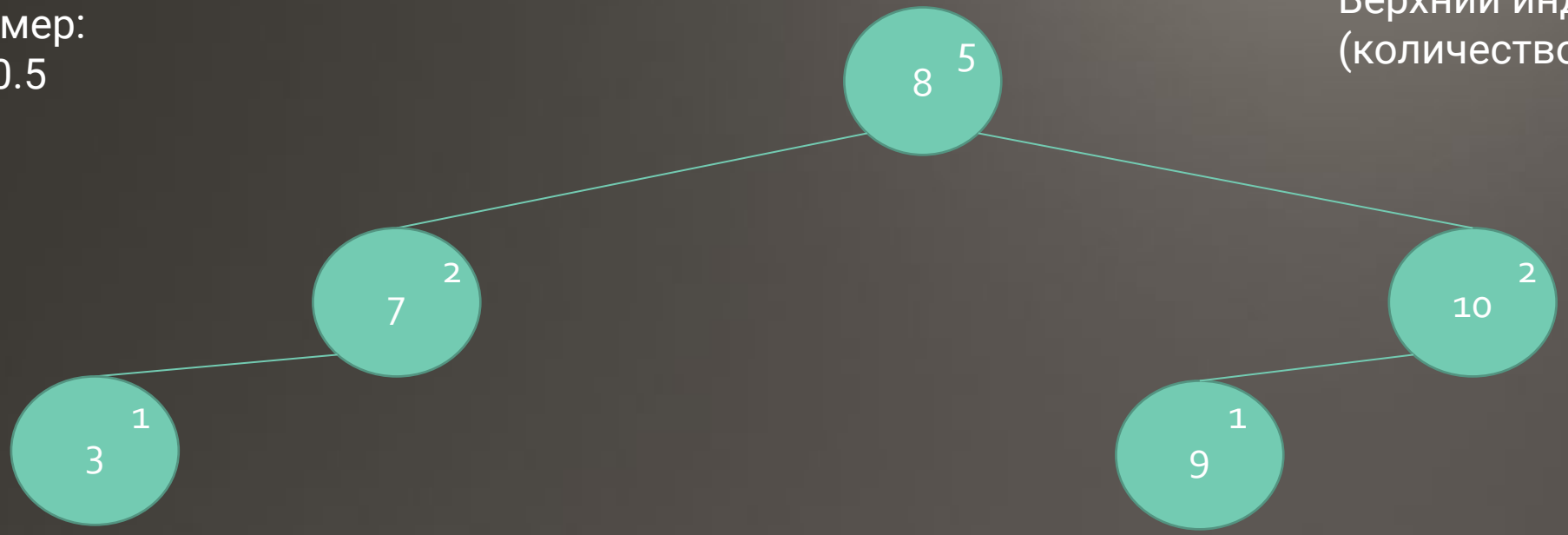
Верхний индекс – вес вершины
(количество всех ее потомков + 1)



- Далее, рекурсивно проходим вправо, выполняем туже функцию, увеличивая параметр ends.
- В правое поддерево подвешиваем 10

Пример:
α = 0.5

Верхний индекс – вес вершины
(количество всех ее потомков + 1)



- Далее, рекурсивно проходим вправо, выполняем туже функцию, увеличивая параметр ends.
- В левое поддерево вершины 10 подвешиваем 9
- Выходим из рекурсии
- Дерево имеет α-балансировку

Удаление

Удаляем вершину обычным удалением вершины бинарного дерева поиска (поиск, удаление, возможное переподвешивание детей).

Далее проверяем выполнение условия

$$size[T] < \alpha * max_size[T]$$

Если оно выполняется — дерево могло потерять α-балансировку по весу, а значит нужно выполнить полную перебалансировку дерева (начиная с корня) и присвоить $max_size[T] = size[T]$