

# Семинар 12. "Асимптоты графика функции"

## АСИМПТОТЫ

*Асимптотой* кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при ее удалении по кривой в бесконечность.



$$\text{Если } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty,$$

то прямая  $x = a$  есть *вертикальная* асимптота кривой.

например, кривая  $y = \frac{a}{x-a}$  имеет асимптоту  $x = a$ .

$$\text{Если } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = c,$$

то прямая  $y = c$  есть *горизонтальная* асимптота кривой при  $x \rightarrow \pm \infty$ .

Если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - kx] = b,$$

то прямая  $y = kx + b$  есть *наклонная* асимптота кривой  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \pm \infty$ .

При нахождении горизонтальных и наклонных асимптот следует различать пределы при  $x \rightarrow -\infty$  и при  $x \rightarrow +\infty$ .

Назад

Далее

Выход

...

**Пример 1.** Найти асимптоты кривой  $y = \frac{x^2+3x+6}{x-1}$ .

**Решение.** Функция определена для всех действительных чисел, кроме  $x = 1$ .

Так как

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2+3x+6}{x-1} = -\infty, \text{ а } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2+3x+6}{x-1} = +\infty,$$

то прямая  $x = 1$  является вертикальной асимптотой.

Так как

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2+3x+6}{x-1} = \pm \infty,$$

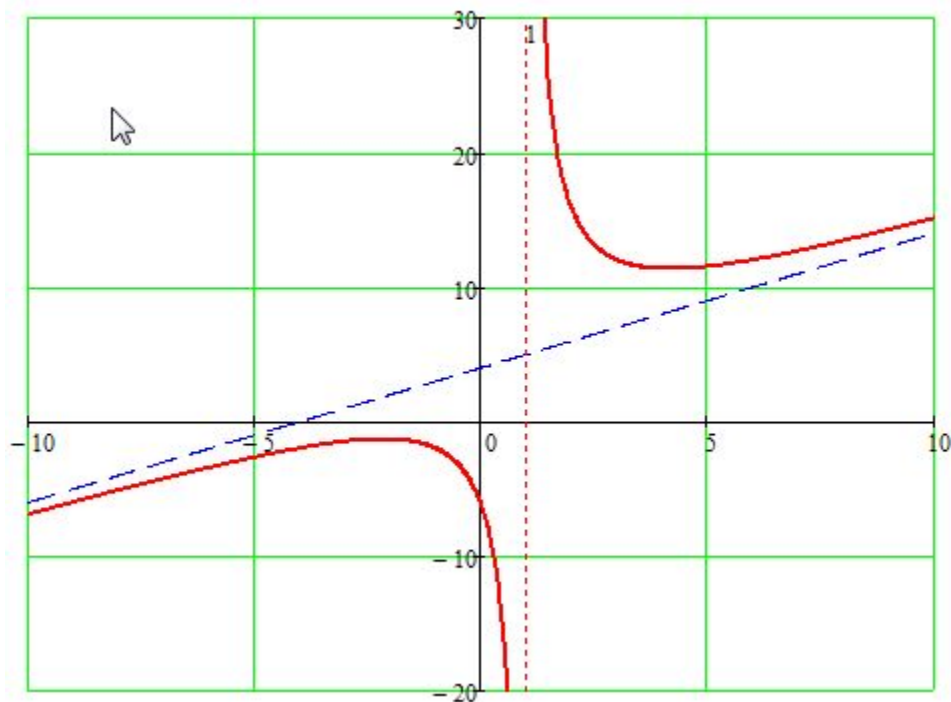
то горизонтальных асимптот нет.

Найдем параметры  $k$  и  $b$  наклонной асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2+3x+6}{x(x-1)} = 1 = k ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[ \frac{x^2+3x+6}{x-1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2+3x+6-x^2+x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{4x+6}{x-1} = 4 = b,$$

следовательно, прямая  $y = x + 4$  – наклонная асимптота.

Эскиз графика функции имеет вид.



**Пример 2.** Найти асимптоты кривой  $y = \frac{x}{x^2-1}$ .

Решение. Функция определена для всех действительных чисел, кроме  $x = 1$  и  $x = -1$ .

Так как



$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{x^2-1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty;$$
$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{x^2-1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty,$$

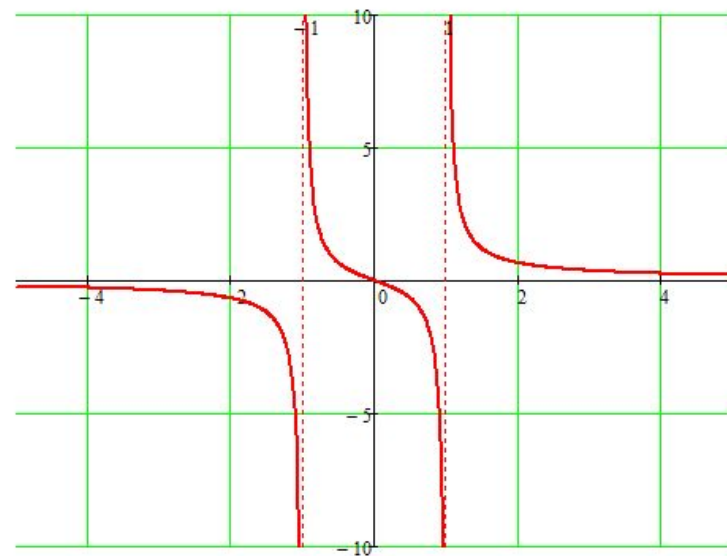
то прямые  $x = 1$  и  $x = -1$  являются вертикальными асимптотами.

Так как

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0,$$

то прямая  $y = 0$  – горизонтальная асимптота.

Так как график имеет горизонтальную асимптоту, то наклонной асимптоты нет.



**Пример 3.** Найти асимптоты кривой  $y = \frac{\sin x}{x}$ .

**Решение.** Функция определена для всех действительных чисел, кроме  $x = 0$ .

Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

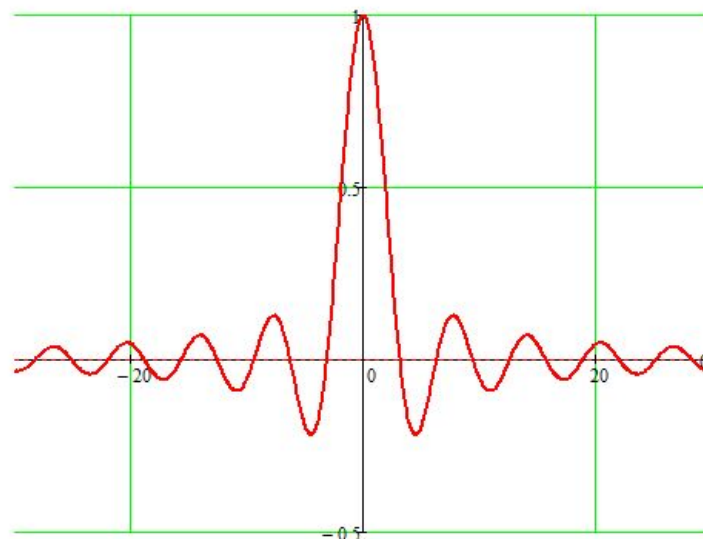
то вертикальной асимптоты кривой нет.

Так как

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

то прямая  $y = 0$  – горизонтальная асимптота.

Так как график имеет горизонтальную асимптоту, то наклонной асимптоты нет.



---

Выберите все верные утверждения относительно функции  $y = \ln \sin x$

- $f(x)$  не имеет асимптот.
- $f(x)$  имеет асимптоту при  $x \rightarrow -\infty$ .
- $f(x)$  имеет вертикальную асимптоту.
- $f(x)$  имеет асимптоту при  $x \rightarrow +\infty$ .

Выберите все верные утверждения относительно функции  $y = e^{-\frac{1}{x}}$

- $f(x)$  имеет асимптоту при  $x \rightarrow -\infty$
- $f(x)$  не имеет асимптот
- $f(x)$  имеет вертикальную асимптоту
- $f(x)$  имеет асимптоту при  $x \rightarrow +\infty$

Выберите все верные утверждения относительно функции  $y = \frac{x^3 + x}{1 - x^2}$

- $f(x)$  имеет вертикальную асимптоту
- $f(x)$  не имеет асимптот
- $f(x)$  имеет асимптоту при  $x \rightarrow +\infty$
- имеет наклонную асимптоту
- $f(x)$  имеет асимптоту при  $x \rightarrow -\infty$

Найдите уравнения всех асимптот функции

$$y = -x + 3 + \ln(x + 1)$$

$y = 3$

$y = -x + 3$

~~$y = x$~~

$x = -1$



Найдите уравнения всех асимптот функции  $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$

$x = -1$

$y = 2x$

$x = 1$

$y = 2$

Найдите уравнения всех асимптот функции  $y = \frac{e^{x-1}}{(x-1)^2}$

$y = 0$

$y = e^{-1}$

$x = 1$

$y = 1$