

Лекция 17

Распределение Максвелла

Распределение Больцмана

Распределение Максвелла

- В лекции 16 было введено понятие о вероятностях для молекул

- $dW(v_x)$, $dW(v_y)$ и $dW(v_z)$

иметь проекцию скорости движения в интервалах

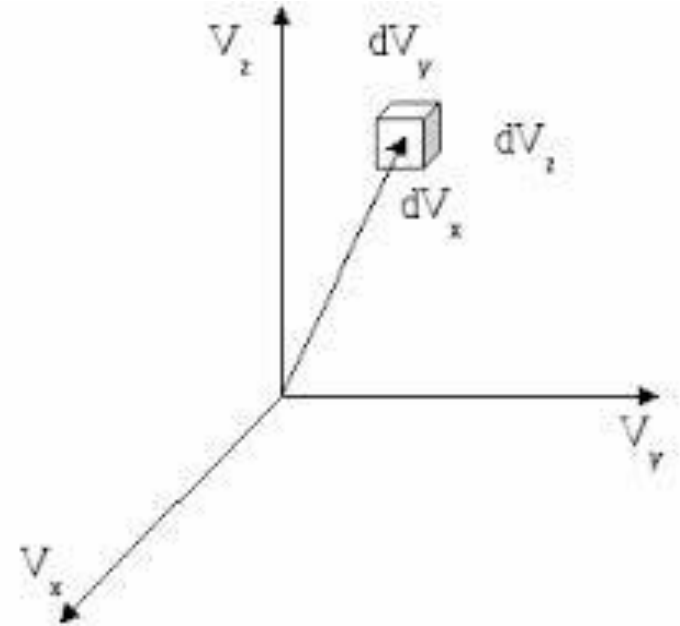
- $[v_x, v_x + dv_x], [v_y, v_y + dv_y], [v_z, v_z + dv_z]$.

- Обобщением будет введение понятия вероятности $dW(\vec{v})$ иметь определенное значение вектора скорости

Распределение Максвелла

- В геометрическом смысле это означает вероятность того, что в пространстве скоростей конец вектора скорости находится в параллелепипеде объемом
 - $d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$
- Как и для любой непрерывной случайной величины, для $dW(\vec{v})$ должно выполняться условие

$$\int dW(\vec{v}) = 1$$



Распределение Максвелла

- Закон распределения молекул по скоростям был получен в конце 19 века Максвеллом.
- При этом он сделал два предположения:
 1. все направления скоростей равновероятны
 2. рассчитанное с помощью закона распределения давление идеального газа должно соответствовать полученному из экспериментов уравнению.



Распределение Максвелла

- Для непрерывной случайной величины, каковой является скорость молекулы, можно ввести функцию распределения (плотность вероятности) $g(\vec{v})$, такую, что

-

- $dW(\vec{v}) = g(\vec{v})dv.$

-

- Из принципа равновероятности направлений движения следует, что плотность вероятности не зависит от угловых переменных, указывающих направление вектора скорости, а должна быть лишь функцией его модуля:

-

- $g(\vec{v}) \equiv g(v).$

Распределение Максвелла

- Аналогично можно ввести функции распределения
 - $f(v_x)$, $f(v_y)$ и $f(v_z)$
- определяющие вероятности, что молекула имеет компоненты скорости в малых интервалах
 - $[v_x, v_x + dv_x]$, $[v_y, v_y + dv_y]$, $[v_z, v_z + dv_z]$.
- - $dW(v_x) = f(v_x)dv_x$,
 - $dW(v_y) = f(v_y)dv_y$,
 - $dW(v_z) = f(v_z)dv_z$.

Распределение Максвелла

- В силу хаотичности молекулярного движения, каждая из функций распределения зависит только от "своей" компоненты скорости и не зависит от других.
- Вид этих функций один и тот же независимо от выбора аргумента v_x , v_y или v_z . Это позволяет для функциональной зависимости от проекций скоростей используется одно и то же обозначение f .
- Отметим, что
-
- $$\int g(v) d\vec{v} = \int f(v_x) dv_x = \int f(v_y) dv_y = \int f(v_z) dv_z = 1$$

Распределение Максвелла

- Обладание тем или иным значением одной компоненты скорости никак не зависит от величины других компонент. В соответствии с принципом умножения вероятностей для независимых событий имеем соотношение

-

$$dW(\vec{v}) = dW(v_x)dW(v_y)dW(v_z)$$

-

- Здесь под событием подразумевается обнаружение определенного значения одной из компонент скорости.

Распределение Максвелла

- Для плотностей вероятностей $f(v_x)$, $f(v_y)$ и $f(v_z)$ получаем

-

- $g(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z)$

- Прологарифмируем это выражение

-

- $\ln g(v) = \ln f(v_x) + \ln f(v_y) + \ln f(v_z)$

- и продифференцируем по v_x

-

- $\frac{1}{g(v)} \frac{dg(v)}{dv} \frac{dv}{dv_x} = \frac{1}{f(v_x)} \frac{df(v_x)}{dv_x}$.

Распределение Максвелла

- Поскольку $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, для производной $\frac{dv}{dv_x}$ получим следующее значение

- $$\frac{dv}{dv_x} = \frac{d\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right)}{dv_x} = \frac{v_x}{v}.$$

- Теперь уравнение может быть представлено в виде

- $$\frac{1}{v} \frac{1}{g(v)} \frac{dg(v)}{dv} = \frac{1}{v_x} \frac{1}{f(v_x)} \frac{df(v_x)}{dv_x}.$$

Распределение Максвелла

- Из равенства (17.8) следует, что функции различных аргументов v , v_x , v_y и v_z совпадают друг с другом во всей области их определения. Такое может быть, только если они все равны одной и той же постоянной. Поэтому перепишем (17.8) и аналогичные выражения для проекций v_y и v_z в виде
- $$\frac{1}{v} \frac{1}{g(v)} \frac{dg(v)}{dv} = \frac{1}{v_x} \frac{1}{f(v_x)} \frac{df(v_x)}{dv_x} = \frac{1}{v_y} \frac{1}{f(v_y)} \frac{df(v_y)}{dv_y} = \frac{1}{v_z} \frac{1}{f(v_z)} \frac{df(v_z)}{dv_z} = -2\alpha.$$
- где α – некоторая константа. Множитель -2 перед ней выбран из соображений, которые станут понятны ниже.

Распределение Максвелла

- Проведем интегрирование) четырех уравнений вида

- $\frac{1}{v} \frac{1}{g(v)} \frac{dg(v)}{dv} = -2\alpha$

-

- Вначале разделим переменные

-

- $\frac{dg(v)}{g(v)} = -2\alpha v dv.$

- После интегрирования получаем

-

- $\ln g(v) = -\alpha v^2 + \ln Z,$

-

- где Z – константа.

Распределение Максвелла

- Окончательно получаем

-

- $g(v) = \frac{1}{Z} \exp(-\alpha v^2).$

- Тем же путем получим выражения для функций распределения компонент скорости

-

$$f(v_x) = \frac{1}{Z_0} \exp(-\alpha v_x^2),$$
$$f(v_y) = \frac{1}{Z_0} \exp(-\alpha v_y^2),$$
$$f(v_z) = \frac{1}{Z_0} \exp(-\alpha v_z^2).$$

Распределение Максвелла

- Постоянная Z_0 может быть найдена из условия

-

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) d v_x = \frac{1}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha v_x^2) d v_x = 1.$

- Интеграл вида $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx$ называется интегралом Пуассона. В математическом анализе показано, что его значение равно

-

- $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$

Распределение Максвелла

- Отсюда получаем для Z_0

- $Z_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

- Между Z и Z_0 существует простая связь

-

$$Z = Z_0^3$$

Распределение Максвелла

- Окончательно получаем для функций распределения следующие выражения

$$\bullet f(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp(-\alpha v_x^2),$$

$$\bullet f(v_y) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp(-\alpha v_y^2),$$

$$\bullet f(v_z) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp(-\alpha v_z^2).$$

$$\bullet g(v) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \exp(-\alpha v^2).$$

Распределение Максвелла

- Перейдем теперь к определению константы α . В лекции 16 мы показали, что давление идеального газа на стенку сосуда равно
-
- $$P = mn\langle v_x^2 \rangle = nkT.$$
-
- Чтобы найти α , нужно вычислить $\langle v_x^2 \rangle$ и подставить в это выражение

Распределение Максвелла

- В соответствии с теорией вероятностей

-

- $\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dW(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp(-\alpha v_x^2) dv_x = \frac{1}{2\alpha}$.

- В итоге получаем

-

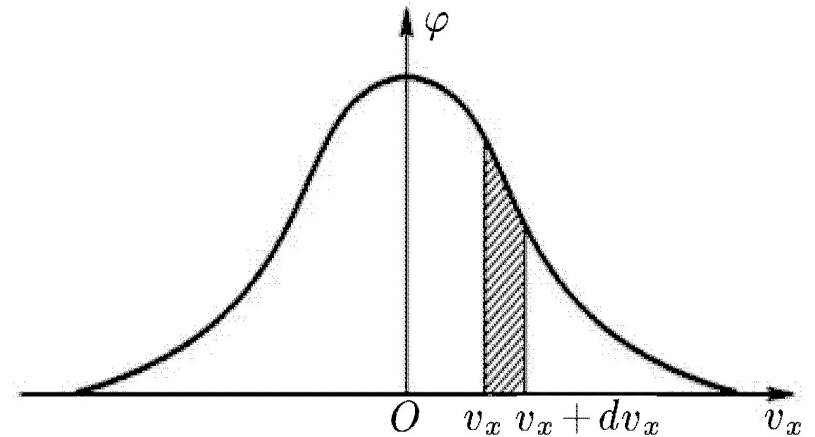
- $\alpha = \frac{m}{2kT}$.

Средняя скорость молекул

- Вероятность молекул газа иметь компонент скорости (например, v_x) в интервале $[v_x, v_x + dv_x]$

- $$dW(v_x) = f(v_x)dv_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp(-\alpha v_x^2) dv_x$$

- График зависимости функции распределения $f(v_x)$ от v_x

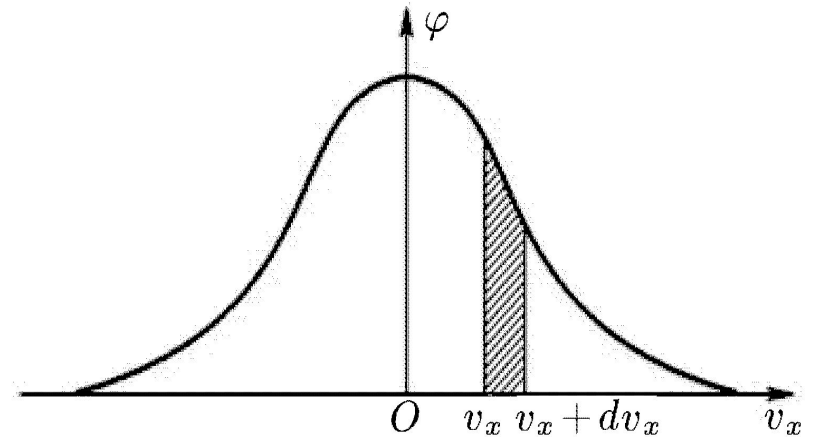


Средняя скорость молекул

- Среднее значение компоненты скорости можно вычислить по формуле

- $$\langle v_x \rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x \exp(-\alpha v_x^2) dv_x = 0$$

- Максимум функции распределения по компоненте скорости приходится на 0.
- Наиболее вероятной является нулевая компонента скорости молекулы.

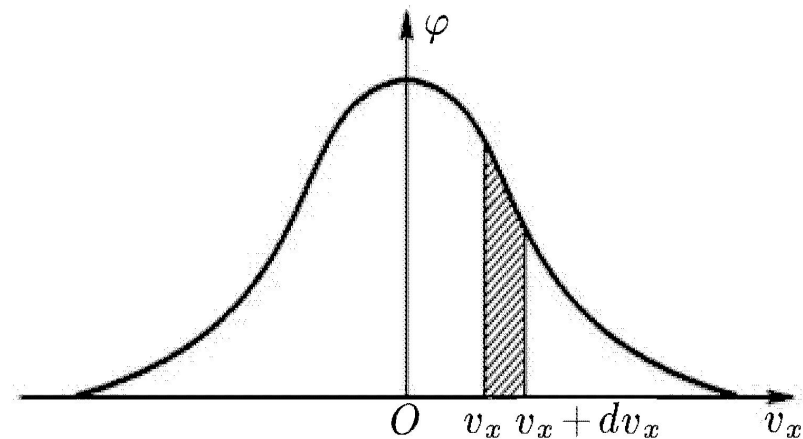


Средняя скорость молекул

- В соответствии с
- $\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dW(v_x) =$
 $\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp(-\alpha v_x^2) dv_x = \frac{1}{2\alpha}$
- для среднего квадрата компоненты скорости получаем

•

- $\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}.$



Средняя скорость молекул

- Отсюда легко получить выражение для средней энергии движения по выделенному направлению

-

- $\langle E_x \rangle = \frac{m\langle v_x^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2}$

- И полную среднюю кинетическую энергию молекул

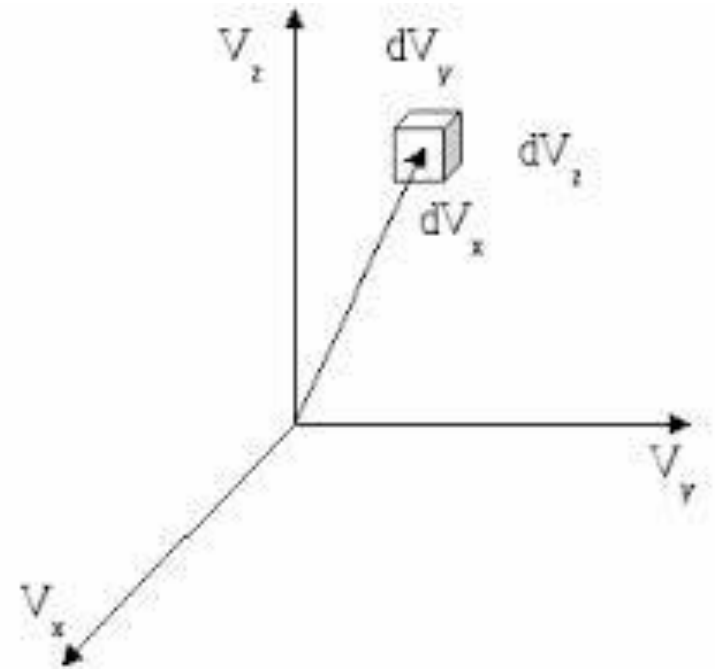
-

- $\langle E \rangle = \langle E_x \rangle + \langle E_y \rangle + \langle E_z \rangle = \frac{3}{2} kT.$

Средняя скорость молекул

- Вероятность найти в газе молекулу со скоростью \vec{v} равна

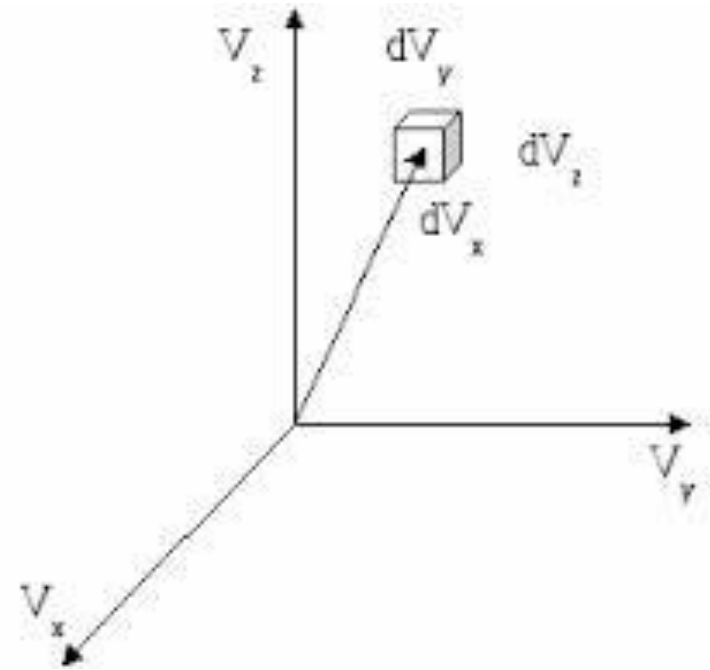
- $dW(\vec{v}) =$
 $\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right) d\vec{v} =$
 $\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z.$



Средняя скорость молекул

- Нашей дальнейшей задачей является нахождения среднего модуля скорости молекул
- Для этого необходимо перейти к распределению по скоростям в сферических координатах.
- В свою очередь, для этого нужно записать выражение для элемента объема в сферических координатах
-

- $d\vec{v} = v^2 \sin \theta d\theta d\varphi dv$



Средняя скорость молекул

- Распределение по скоростям в сферических координатах

-

- $$dW(v, \theta, \varphi) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 \sin \theta d\theta d\varphi dv. \quad (17.24)$$

-

- Это не что иное, как вероятность двигаться со скоростью v по направлению, задаваемому углами θ и φ .

- В задаче о нахождении средней скорости молекул направление не важно, поэтому мы можем проинтегрировать это выражение по углам

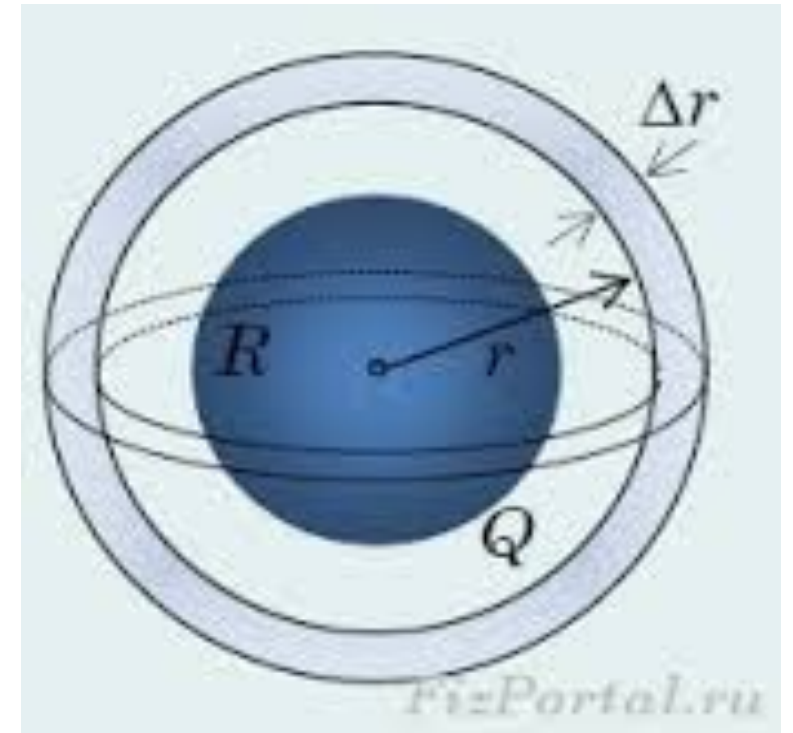
-

Средняя скорость молекул

- $\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi.$
-
- В итоге мы получаем вероятность найти в газе молекулу с модулем скорости, лежащим в интервале $[v, v + dv]$.
- $dW(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv.$

Средняя скорость молекул

- В геометрическом смысле это выражение определяет вероятность того, что в пространстве скоростей конец вектора скорости попадает в сферический слой между
 - v и $v + dv$
- объемом
 - $4\pi v^2 dv$



Средняя скорость молекул

- Теперь мы можем найти средний модуль скорости (среднюю скорость) молекул

- $\langle v \rangle = 4 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$.

- А также средний квадрат модуля скорости

- $\langle v^2 \rangle = 4 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv = \frac{3kT}{m}$

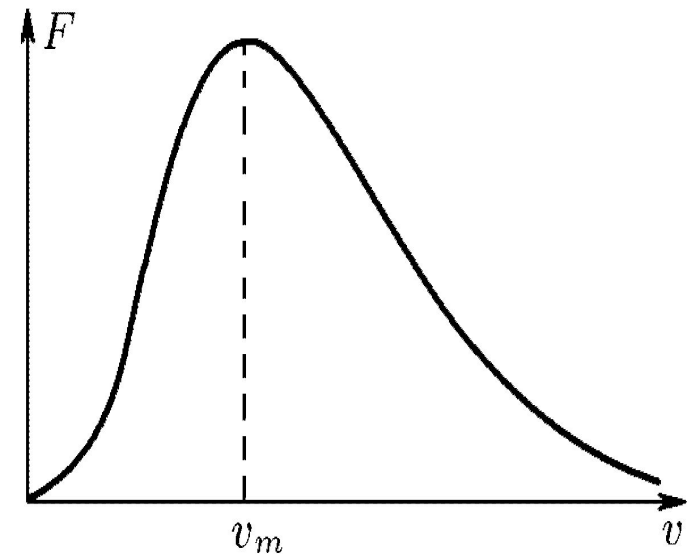
- Величину $\sqrt{\frac{3kT}{m}}$ называют среднеквадратичной скоростью молекул

Наиболее вероятная скорость

- Эта функция имеет максимум. Соответствующая ей скорость называется наиболее вероятной скоростью молекул v_B .
- Ее можно найти с помощью стандартного метода математического анализа: приравняв нулю первую производную

-

- $$\frac{d}{dv} \left(v^2 \exp \left(\frac{-mv^2}{2kT} \right) \right) = 0$$



Наиболее вероятная скорость

- или

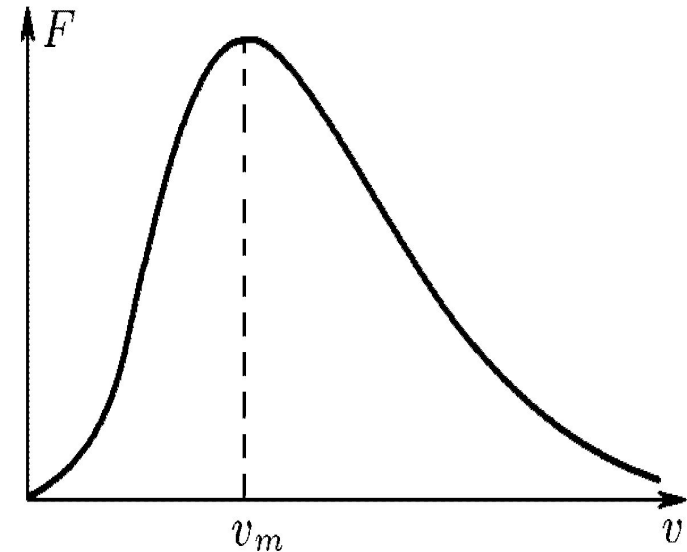
- $2v \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right) -$
 $2v^3 \frac{m}{2kT} \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right) = 0.$

-

- Отсюда получаем выражение для v_B .

-

- $v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$



Наиболее вероятная скорость

- Введя относительную скорость $u_{\text{от}} = \frac{v}{v_B}$, как отношение скорости молекулы к наиболее вероятной получим распределение по абсолютной величине скорости в виде

-

$$dW(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) u^2 du.$$

- Отсюда доля молекул, скорость которых больше u будет определяться интегралом $\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} \exp(-u^2) u^2 du$ В таблице 1 приведены некоторые значения этого интеграла.

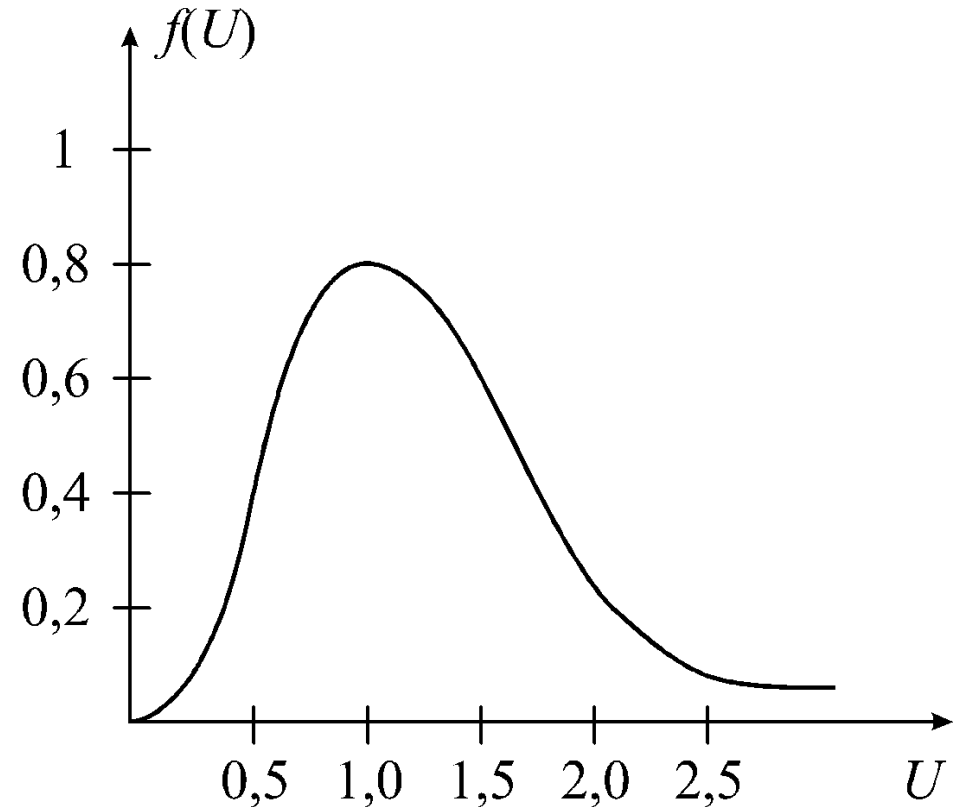
-

Наиболее вероятная скорость

u	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,5	1,8	2
	0,994	0,96	0,87	0,73	0,57	0,41	0,21	0,09	0,046

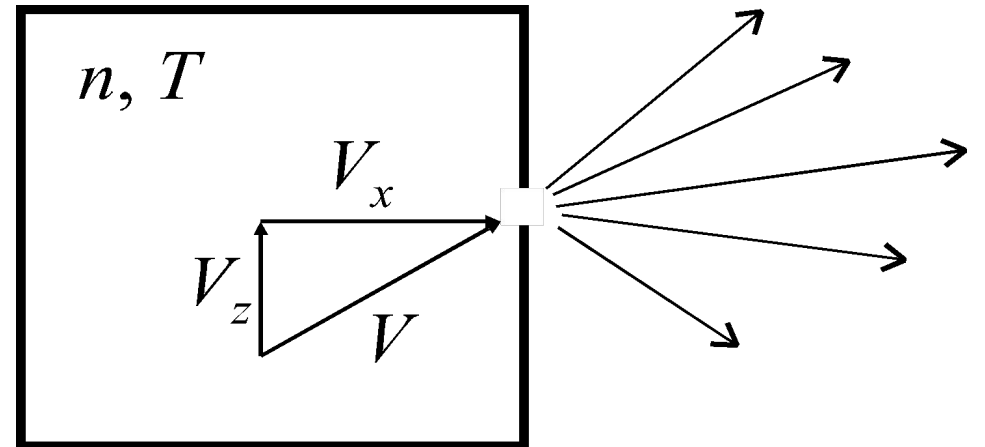
Наиболее вероятная скорость

- Из таблицы следует, что только около 20% молекул имеют скорость превышающую $1,5 \cdot v_B$ и только 5% превышающую $2v_B$.
- Распределение вероятности обнаружения частицы в зависимости от величины относительной скорости u .
- Из рисунка видно, что основная часть молекул имеет скорости в диапазоне $0,5 < u < 2$.



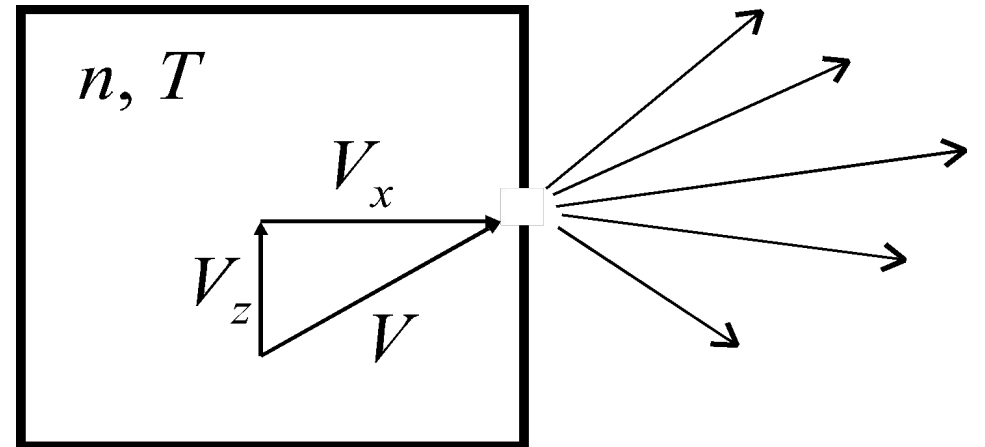
Молекулярные пучки (потоки)

- Надем поток молекул в вакуум через малое отверстие в стенке сосуда. Если размер отверстия много меньше длины свободного пробега молекул, то столкновений в отверстии не будет, а концентрация молекул будет возмущена в области порядка размера отверстия.



Молекулярные пучки (потоки)

- Если отверстие находится в стенке лежащей в плоскости Z, Y то попадание на стенку и соответственно в отверстие будет определяться молекулами имеющими не нулевую компоненту скорости v_x



Молекулярные пучки (потоки)

- Количество молекул dj , имеющих компоненту скорости от v_x до $v_x + dv_x$ и пролетающих через отверстие в единицу времени равно

-

- $$dj = nv_x S dW(v_x),$$

-

- где n – концентрация молекул, S – площадь отверстия.

Молекулярные пучки (потоки)

- Полный поток через отверстие J можно получить, интегрируя по компоненте скорости. Поскольку нас интересуют только молекулы летящие к отверстию, а не в противоположную сторону, интеграл берется от 0 до ∞ .

-

$$J = \int_0^{\infty} n v_x S dW(v_x) = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp(-\alpha v_x^2) dv_x = \frac{1}{4} n \langle v \rangle S.$$

Молекулярные пучки (потоки)

- Распределение молекул в потоке по скоростям отличается от распределения в по скоростям в замкнутом объеме. Дело в том, что в объеме молекулы постоянно сталкиваются друг с другом, а в потоке вероятность их столкновения крайне мала. Поэтому отличаются от «объемных»
- средние величины скоростей $\langle v_j \rangle, \langle v_j^2 \rangle$
- и средняя энергия молекул в потоке $\langle E_j \rangle$.

Молекулярные пучки (потоки)

-

- $\langle v_j \rangle = \sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}},$

- $\langle v_j^2 \rangle = \frac{4kT}{m},$

- $\langle E \rangle = 2kT.$

Молекулярные пучки (потоки)

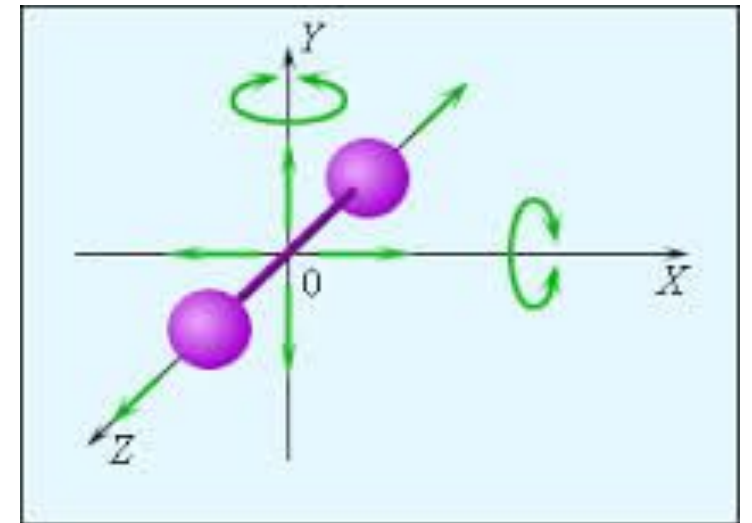
- Значения средних величин в потоке больше, чем у соответствующих им величин в объеме. Например, средняя энергия в потоке на $\frac{1}{2}kT$ больше, чем средняя энергия в объеме. Это связано с тем, что более быстрые молекулы чаще сталкиваются со стенкой и соответственно чаще вылетают из отверстия. Поэтому их вклад в среднюю энергию больше, чем у медленных молекул

Закон равнораспределения энергии по степеням свободы

- Как мы уже отмечали, средняя энергия поступательного движения $\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT$. Учитывая независимость распределения по скоростям движения по различным осям мы приходим к выводу, что на каждую поступательную степень свободы приходится энергия $\frac{1}{2} kT$. Заметим, что средняя энергия не зависит от массы молекулы. Это означает, что в смеси газов молекулы с различной массой будут иметь разные скорости, но одинаковую кинетическую энергию.

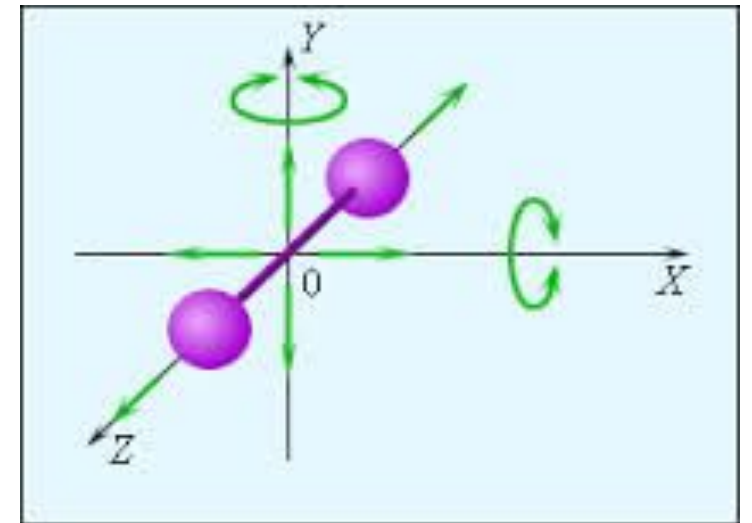
Закон равнораспределения энергии по степеням свободы

- Если молекула состоит из нескольких атомов, появляется энергия связанная с её вращением и колебаниями атомов относительно равновесного положения. С этими движениями также будет связана соответствующая энергия.
- Рассмотрим эту ситуацию на примере двухатомной молекулы



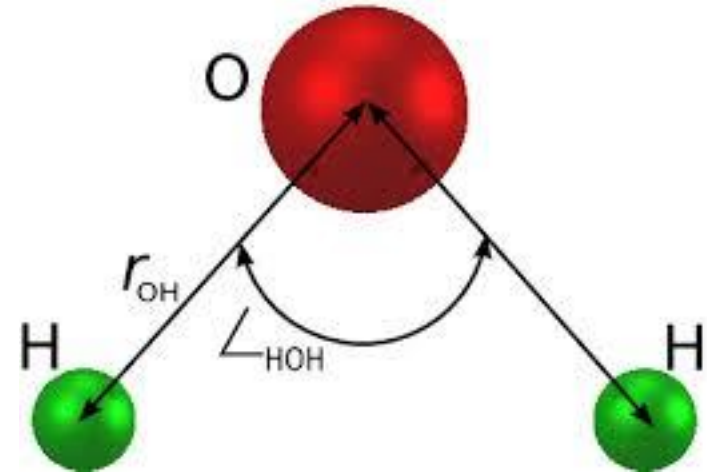
Закон равнораспределения энергии по степеням свободы

- Момент инерции $I_z = 0$ и энергия вращения вокруг этой оси равна нулю. Можно показать, что средняя энергия связанная с вращениями по осям X и Y будет $kT/2$ на каждую ось. Для двухатомной молекулы, энергия вращения равна kT . Тот же самый результат мы получим для трехатомной линейной молекулы (молекула CO_2)



Закон равнораспределения энергии по степеням свободы

- В случае объемной молекулы, когда все три момента инерции не равны нулю (молекула воды H_2O), мы получим, как и для поступательных движений $\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT$.



Закон равнораспределения энергии по степеням свободы

- При колебаниях атомов в молекуле энергия будет состоять из потенциальной энергии связанной с смещением молекул относительно положения равновесия и кинетической энергией их движения в этот момент. Учитывая это в мы получим, что на каждую колебательную степень свободы приходится энергия

$$\bullet E_{\text{кол}} = \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} = kT.$$

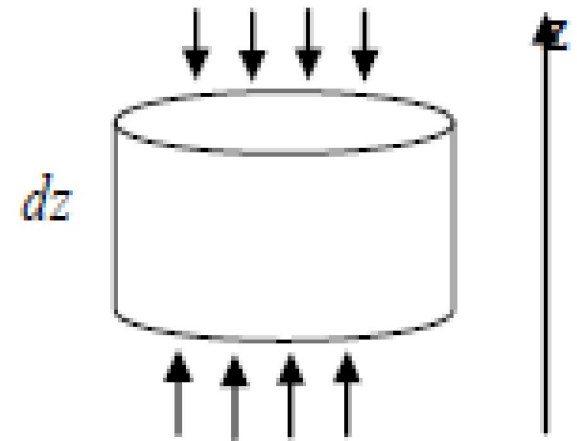
Закон равнораспределения энергии по степеням свободы

- Квантовая природа молекулярных движений вносит коррективы в эту простую картину. Энергия может изменяться дискретными порциями – квантами. Поэтому когда температура мала – $kT \approx \Delta E_{\text{вр}}$ меньше первого уровня изменения энергии, соответствующая степень свободы не возбуждена и не вносит вклад в энергию хаотического движения. Поступательные степени свободы появляются при очень низких температурах, затем при повышении температуры начинают возбуждаться вращательные степени свободы. При дальнейшем повышении температуры, когда $kT \approx \Delta E_{\text{кол}}$, возбуждаются колебательные степени свободы. Соответственно теплоемкость газов будет увеличиваться с увеличением температуры, достигая максимума, когда возбуждены все степени свободы.

Барометрическая формула

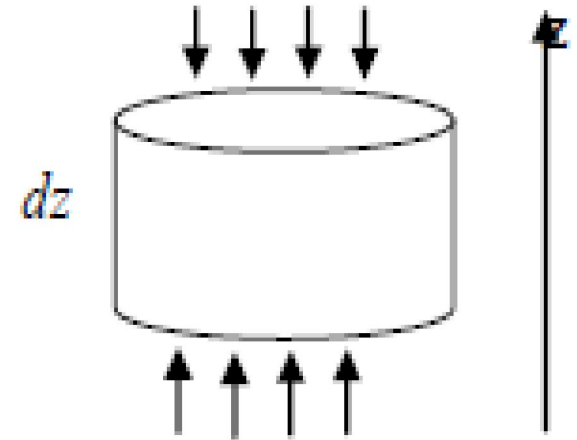
- На практике часто приходится иметь дело с газом, находящимся в потенциальном внешнем поле. Важным примером такого поля является поле тяжести. Пусть ось z системы координат направлена вертикально вверх. Молекула газа в этом поле обладает потенциальной энергией, равной

- $U = mgz.$



Барометрическая формула

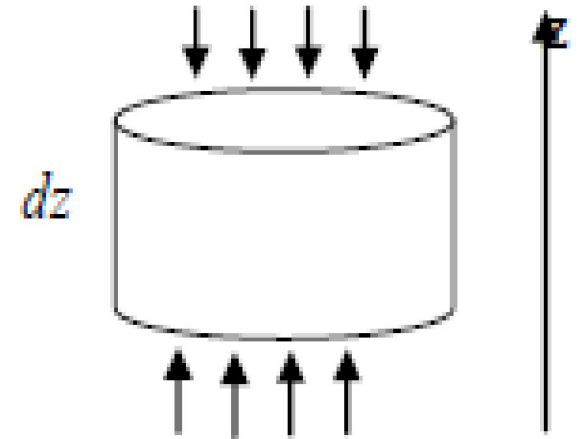
- Будем рассматривать газ в сосуде высотой h , с температурой, одинаковой во всех точках.
- Выберем в сосуде некоторый горизонтальный слой малой толщины dz
- Вес P этого слоя компенсируется разностью давлений, действующих снизу и сверху:
 - $P = (p(z) - p(z + dz))S = -Sdp$.



Барометрическая формула

- С другой стороны, вес газа равен просто весу всех его молекул. Введем плотность газа $n(z)$, которая может зависеть от z . Если слой тонкий, можно пренебречь изменением $n(z)$ в его пределах. Тогда вес определяется формулой:

- $P = mgn(z)Sdz.$



Барометрическая формула

- Приравнивая получим

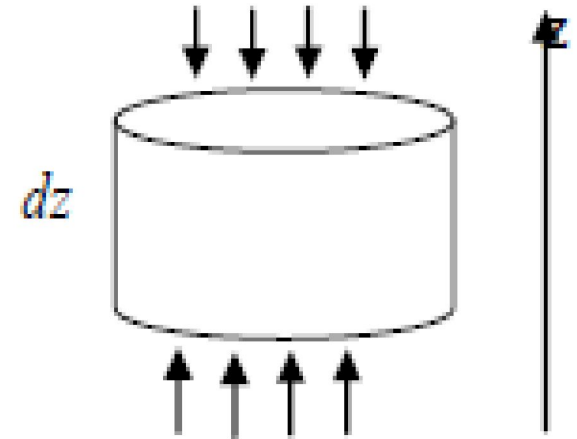
-

- $dp = -mgndz.$

- Если газ идеальный, то $p = nkT$, и

-

- $\frac{dn}{n} = -\frac{m}{kT} dz.$



Барометрическая формула

- Интегрируя, получаем зависимость плотности от высоты:

-

- $n(z) = n(0) \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)$.

- Полное число молекул N при этом есть

-

- $N = \int_0^h n(z) S dz = n(0) S \frac{kT}{mg} \left(1 - \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)\right)$

-

- Отсюда определяется $n(0)$:

-

- $n(0) = \frac{Nmg}{SkT} \left(1 - \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)\right)$.

Барометрическая формула

- Для условий земной атмосферы $h_0 \approx 10$ км. Сооружаемые емкости имеют значительно меньшие габариты, поэтому неоднородность распределения паров в них не наблюдается. Лишь при подъеме в горы или с помощью авиации обнаруживается влияние поля тяжести на распределение воздуха в атмосфере.

Барометрическая формула

- Необходимо подчеркнуть, что формула применима только к изотермической "тонкой" атмосфере. Из нее следует барометрическая формула

-

$$\bullet p(z) = p(0) \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right).$$

Барометрическая формула

- Воздух представляет собой смесь газов, молекулы которых имеют различную массу. Состав атмосферы должен резко изменяться с высотой. Относительная концентрация легких газов должна увеличиваться с высотой. Измерения состава воздуха на разных высотах не подтвердили этого вывода. Интенсивная конвекция в пределах тропосферы приводит к известному выравниванию состава воздуха по высоте. Общеизвестно также падение температуры с высотой.

Распределение Больцмана

- Распределению молекул по высоте можно придать несколько иной вид. Вероятность обнаружить молекулу в слое толщиной dz на высоте z определяется долей $dW(z)$ таких молекул от общего числа:
-
- $$dW(z) = \frac{dN(z)}{N} = \frac{n(z)Sdz}{N} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{U(z)}{kT}\right) Sdz,$$
- где $U(z)$ – потенциальная энергия молекулы во внешнем поле; $Z = N / n(0)$ – нормировочный множитель

Распределение Больцмана

- В произвольной системе координат распределение (17.42) будет иметь вид

- $dW(\vec{r}) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{U(\vec{r})}{kT}\right) d\vec{r}$

- где $d\vec{r}$ – элемент объема пространства.

- в декартовой системе координат

- $d\vec{r} = dx dy dz,$

- в сферической

- $d\vec{r} = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi,$

- в цилиндрической

- $d\vec{r} = r dr d\varphi dz.$

Распределение Больцмана

- Это распределение может использоваться для произвольного типа взаимодействия (то есть не обязательно гравитационного) и для любого вида пространственной зависимости потенциальной энергии (то есть не обязательно приводящей к однородному внешнему полю).
- Единственным ограничением является консервативный характер действующих сил – то есть это такие силы, для которых их работа при движении по замкнутому контуру равняется нулю. Только для таких сил можно ввести потенциальную энергию, которая зависит только от положения в пространстве.

Распределение Больцмана

- Это распределение называется распределением Больцмана.
- Нормировочная постоянная в Z находится из условия, что полная вероятность обнаружить молекулу $\int dW(\vec{r})$ равна единице и, следовательно
-
- $Z = \int \exp\left(-\frac{U(\vec{r})}{kT}\right) d\vec{r}.$



Центрифугирование, разделение ИЗОТОПОВ

- Центрифугирование нашло широкое применение в химии и биологии как эффективный способ разделения близких по молекулярному весу или плотности веществ. В системе отсчета, связанной с центрифугой, объект исследования находится в равновесии, и к нему можно применить распределение Больцмана.



Центрифугирование, разделение ИЗОТОПОВ

- на частицы действует центробежная сила. Соответствующая потенциальная энергия частицы равна
-
- $U = - \int_0^r m\omega^2 r dr = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2.$
- Распределение Больцмана с учетом цилиндрической симметрии имеет вид
-
- $dW(\vec{r}) = \frac{1}{Z} \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) 2\pi r l dr,$
-
- где l – длина барабана центрифуги.



Центрифугирование, разделение ИЗОТОПОВ

- Для концентрации частиц получается формула

-

- $$n(r) = \frac{NdW(r)}{2\pi r l dr} = n(0) \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right).$$



Центрифугирование, разделение ИЗОТОПОВ

- Из формулы следует, что концентрация тяжелых частиц у боковой стенки центрифуги относительно выше, что используется для разделения смесей. Сейчас особенно активно центрифугирование используется для разделения составляющих различных биологических препаратов. Также центрифугирование было использовано для обогащения урана. Уран состоит в основном из двух изотопов ^{238}U (99,28 % природного содержания) и ^{235}U (0,71 %). Способностью к ядерным реакциям деления обладает только изотоп ^{235}U . Возникающая задача обогащения урана решалась путем его фторирования, с образованием газообразного соединения UF_6 , и последующего многократного центрифугирования

До следующей лекции

