Математические методы в биологии

Блок 2. Случайные величины

Лекция 3

Козлова Ольга Сергеевна
89276755130, olga-sphinx@yandex.ru

Дискретная случайная величина

- Случайная величина – величина, которая в результате испытания принимает одно и только одно возможное значение, наперёд не известное и зависящее от случайных обстоятельств, которые заранее не могут быть учтены.

Пример. Выпадение определённого числа очков на игральной кости (от 1 до 6). Число очков – случайная величина.

- Дискретная случайная величина – случайная величина, которая может принимать конечные, изолированные значения из некоторого числового промежутка
- Непрерывная случайная величина – случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка

Пример. Содержание какого-либо фермента в крови

- Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины – это сопоставление всех возможных значений случайной величины и их вероятностей.

Тривиальный пример. Случайная величина – сторона монетки. Она принимает два изолированных значения – либо «орёл», либо «решка» и подчинена следующе

Название случайной величины

Вектор вероятностей

X	«Орёл» (0)	«Решка» (1)	Контроль
P	0,5	0,5	0,5+0,5=1

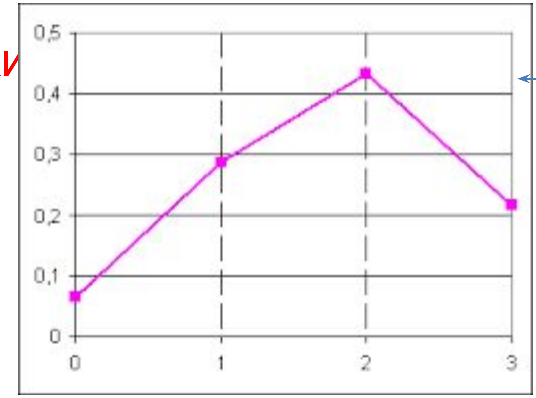
Способы задания распределения вероятностей дискретной случайной величины

- Таблично

Из ящика, в котором лежат 2 белых и 8 чёрных шаров, последовательно вынимают шары до тех пор, пока не появится чёрный шар. Число вынутых шаров – есть дискретная случайная величина X, которая может принимать изолированные значения на промежутке от 1 до 3. Зададим закон её распределения таблично.

X	1	2	3	Контроль
P	8/10 (уже первый шар – чёрный)	2/10*8/9=8/45 (первый – белый, второй – чёрный)	2/10*1/9*8/8=1/45 (два первых – белые, третий – чёрный)	8/10+8/45+1/45=1

- Графически
- Аналитически



Многоугольник распределения дискретной случайной величины, принимающей изолированные значения на промежутке от 0 до 3.

Биномиальное распределение

- n независимых испытаний
- Событие А появляется в каждом из них с вероятностью p
- Дискретная случайная величина X – число испытаний, в которых появилось событие А

ВОПРОС: Можем ли мы задать закон распределения дискретной случайной величины X?

ОТВЕТ: Да, для этого нужно знать:

a) Возможные значения случайной величины X

b) Вероятности того, что X примет каждое из этих возможных значений

Найдём a): X=0,1,2,…,n (всего n+1 значений)

Найдём b): $P(X=k)=C_n^k * p^k(1-p)^{n-k}$, где k=X=0,1,2,…,n (формула Бернулли)

Бином Ньютона для $(p+(1-p))^n$

Аналитическое выражение закона распределения д.с.в.

> Определение. <u>Биномиальное распределение</u> – это то распределение, которое определяется формулой Бернулли с заданными n и p.

Биномиальное распределение. Пример.

Монета брошена 5 раз. Задать распределение случайной величины X – числа выпадения «гербов» аналитически, таблично и графически.

Решение. n=5, X=0,1,2,…,5 (всего 6 возможных значений).

Аналитически: $P(X = X_i) = C_5^{X_i} * 0.5^{X_i}(1-0{,}5)^{5-X_i}, i = \overline{1,6}$

Таблично: i=1, X_i=0 $P_5(0) = C_5^0 * 0{,}5^0(1-0{,}5)^{5-0} = \frac{5!}{0!\,5!} * 1 * 0{,}5^5 = 0{,}03125$

i=2, X_i=1. $P_5(1) = C_5^1 * 0{,}5^1(1-0{,}5)^{5-1} = \frac{5!}{1!\,4!} * 0{,}5 * 0{,}5^4 = 0{,}15625$

i=3, X_i=2. $P_5(2) = C_5^2 * 0{,}5^2(1-0{,}5)^{5-2} = \frac{5!}{2!\,3!} * 0{,}5^2 * 0{,}5^3 = 0{,}3125$

$$\sum P_5(i) = 1$$

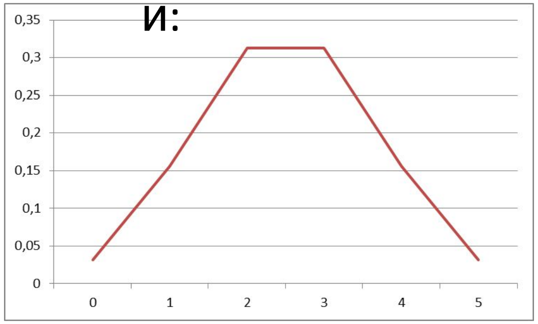
i=4, X_i=3. $P_5(3) = C_5^3 * 0{,}5^3(1-0{,}5)^{5-3} = \frac{5!}{3!\,2!} * 0{,}5^3 * 0{,}5^2 = 0{,}3125$

i=5, X_i=4. $P_5(4) = C_5^4 * 0{,}5^4(1-0{,}5)^{5-4} = \frac{5!}{4!\,1!} * 0{,}5^4 * 0{,}5^1 = 0{,}15625$

i=6, X_i=5. $P_5(5) = C_5^5 * 0{,}5^5(1-0{,}5)^{5-5} = \frac{5!}{5!\,0!} * 0{,}5^5 * 0{,}5^0 = 0{,}03125$

X	0	1	2	3	4	5
P	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Графически:



Геометрическое распределение

- Событие А появляется в каждом из независимых испытаний с вероятностью p
- Пусть испытания заканчиваются, как только появляется событие А
- X – дискретная случайная величина – число событий до первого появления А (включая само событие, в котором А появилось)

ВОПРОС: Можем ли мы задать закон распределения дискретной случайной величины X?

ОТВЕТ: Да, для этого для каждого номера испытания k надо задать вероятность того, что в предыдущих (k-1) испытаниях событие не наступило, а наступило оно только в k-ом испытании!

Так как все испытания независимы в совокупности, по формуле умножения вероятностей $P(X = k) = \underline{(1-p)^{k-1}p}$

Геометрическая прогрессия – степени числа (1-p)

Определение. <u>Геометрическое распределение</u> – это то распределение, которое определяется формулой геометрической прогрессии со знаменателем (1-p) и первым членом p

Геометрическое распределение. Пример.

- Стрелок стреляет по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель = 0,6. Задать распределение дискретной случайной величины X – числа выстрелов до первого попадания.

<u>Решение.</u> $P(X=1)=(1-0{,}6)^{1-1}0{,}6=0{,}6$

$$P(X=2)=(1-0{,}6)^{2-1}0{,}6=0{,}24$$
$$P(X=3)=(1-0{,}6)^{3-1}0{,}6=0{,}096$$
$$P(X=4)=(1-0{,}6)^{4-1}0{,}6=0{,}0384$$
$$P(X=5)=(1-0{,}6)^{5-1}0{,}6=0{,}01536$$
$$\ldots$$

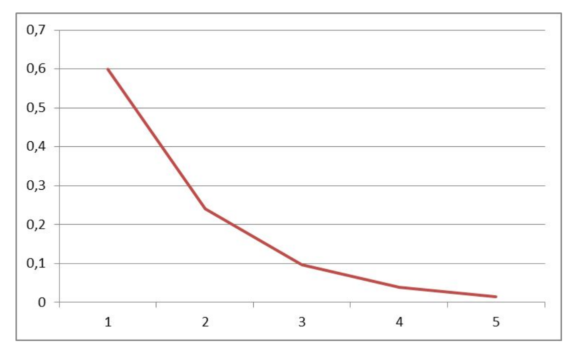
X	P
1	0,6
2	0,24
3	0,096
4	0,0384
5	0,01536

Сходимость ряда вероятностей. По признаку Даламбера, если существует такое 0<c<1, что, начиная с некоторого n $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le c$, то ряд сходится.

Действительно, $\frac{(1-p)^{(n+1)-1}*p}{(1-p)^{n-1}*p}=1-p\le c$

Чему равна сумма ряда? Для геометрической прогрессии со знаменателем |a|< 1

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\frac{1}{1-a}}$ => $\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}*p=p*\frac{1}{1-(1-p)}=1$



Гипергеометрическое распределение

- Есть N деталей, из них M – без брака (M<N)
- Случайным образом отбираем n деталей
- X – дискретная случайная величина – число деталей без брака среди n

ВОПРОС: Можем ли мы задать распределение дискретной случайной величины X?

ОТВЕТ: Да, для этого нужно знать:

a) Возможные значения случайной величины

b) Вероятности того, что X примет каждое из этих возможных значений

Найдём a): X=0,1,2,…,min(n,M)

Вероятность того, что среди n деталей будет ровно m без брака

Найдём b): по классическому определению вероятности $P(X=m)=\frac{C_M^m * C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

(число эл. исходов, благоприятствующих событию / общее число эл.исх.)

C_M^m - сколькими способами можно выбрать m деталей из M без брака

C_{N-M}^{n-m} - сколькими способами можно выбрать n-m деталей из N-M с браком

<u>Гипергеометрическое распределение </u>определяется тремя параметрами –
N, M и n.

Гипергеометрическое распределение. Пример.

Среди 50 деталей 20 окрашенных. Задать распределение дискретной случайной величины X – числа окрашенных деталей среди наудачу извлечённых пяти?

<u>Решение.</u> N=50, M=20, n=5. Д.с.в. X принимает значения 0,1,2,…,min(5,20), т.е. $X = 0{,}5$ (всего 6 значений).

Аналитически: $P(X=m) = \dfrac{C_{20}^{m} * C_{30}^{5-m}}{C_{50}^{5}}$

Таблично: $P(X=0) = \dfrac{C_{20}^{0} * C_{30}^{5-0}}{C_{50}^{5}} = \dfrac{1 * \frac{30!}{5! * 25!}}{\frac{50!}{5!45!}} = \dfrac{142506}{2118760} \approx 0{,}067$

$$P(X=1) = \frac{C_{20}^{1} * C_{30}^{5-1}}{C_{50}^{5}} = \frac{20 * \frac{30!}{4! * 26!}}{\frac{50!}{5!45!}} = \frac{548100}{2118760} \approx 0{,}259$$

$$P(X=2) = \frac{C_{20}^{2} * C_{30}^{5-2}}{C_{50}^{5}} = \frac{\frac{20!}{2! * 18!} * \frac{30!}{3! * 27!}}{\frac{50!}{5!\,45!}} = \frac{190 * 4060}{2118760} \approx 0{,}36$$

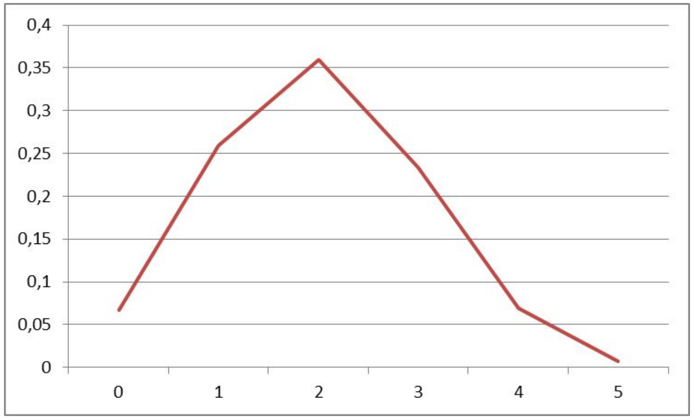
$$P(X=3) = \frac{C_{20}^{3} * C_{30}^{5-3}}{C_{50}^{5}} = \frac{\frac{20!}{3! * 17!} * \frac{30!}{2! * 28!}}{\frac{50!}{5!45!}} = \frac{1140 * 435}{2118760} \approx 0{,}234$$

$$P(X=4) = \frac{C_{20}^{4} * C_{30}^{5-4}}{C_{50}^{5}} = \frac{\frac{20!}{4! * 16!} * \frac{30!}{1! * 29!}}{\frac{50!}{5!45!}} = \frac{4845 * 30}{2118760} \approx 0{,}069$$

$$P(X=5) = \frac{C_{20}^{5} * C_{30}^{5-5}}{C_{50}^{5}} = \frac{\frac{20!}{5! * 15!} * 1}{\frac{50!}{5!45!}} = \frac{15504}{2118760} \approx 0{,}0073$$

Контроль: 0,067+0,259+0,36+0,234+0,069+0,0073≈1

X	P
0	0,067
1	0,013
2	0,36
3	0,234
4	0,069
5	0,0073



Числовые характеристики дискретной случайной величины

Математическое ожидание д.с.в.- сумма произведений всех её возможных значений на их вероятности. $M(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i * P(X = X_i)$

Пример. Биномиальное распределение числа выпадения гербов в 5 подбросах.

X	0	1	2	3	4	5
P	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

$$M(X) = 0 * 0{,}03125 + 1 * 0{,}15625 + 2 * 0{,}3125 + 3 * 0{,}3125 + 4 * 0{,}15625 + 5 * 0{,}03125 = 2{,}5$$

ВАЖНО:

- С увеличением числа испытаний среднее арифметическое значений д.с.в. стремится к математическому ожиданию.
- Мат.ожидание числа появлений события в одном испытании равно его вероятности.

СВОЙСТВА МАТ.ОЖИДАНИЯ:

Независ.д.с.в. – те д.с.в., закон распределения которых не зависит от значений др. д.с.в.

- $M(C) = C$
- $M(C * X) = C * M(X)$
- Для независимых случайных величин X и Y $M(XY) = M(X) * M(Y)$
- Для n независимых случайных величин $M(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} M(X_i)$
- $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$
- $M(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i)$

Доказательства свойств М.с

Распределение такой «случайной» величины в табл. форме

X	C
P	1

1. $M(C) = C$ $\Rightarrow M(X = C) = C * 1 = C$

2. $M(C * X) = C * M(X)$

X	X_1	X_2	…	X_n
P	p_1	p_2	…	p_n

X'	$C*X_1$	$C*X_2$	…	$C*X_n$
P	p_1	p_2	…	p_n

$$\Rightarrow M(X') = C * X_1 * p_1 + C * X_2 * p_2 + \cdots + C * X_n * p_n = C(X_1 p_1 + \ldots + X_n p_n) = C * M(X)$$

3. $M(XY) = M(X) * M(Y)$

X	X_1	X_2
P	p_1	p_2

$*$

Y	Y_1	Y_2
P	q_1	q_2

$=$

XY	X_1Y_1	X_1Y_2	X_2Y_1	X_2Y_2
P	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2

$$\Rightarrow M(XY) = X_1 Y_1 * p_1 q_1 + X_1 Y_2 * p_1 q_2 + X_2 Y_1 * p_2 q_1 + X_2 Y_2 * p_2 q_2$$
$$= X_1 p_1 (Y_1 q_1 + Y_2 q_2) + X_2 p_2 (Y_1 q_1 + Y_2 q_2) = (Y_1 q_1 + Y_2 q_2) * (X_1 p_1 + X_2 p_2)$$
$$= MX * MY$$

4. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$

X	X_1	X_2
P	p_1	p_2

$+$

Y	Y_1	Y_2
P	q_1	q_2

$=$

X+Y	X_1+Y_1	X_1+Y_2	X_2+Y_1	X_2+Y_2
P	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}

$$\Rightarrow M(X + Y) = (X_1 + Y_1) * p_{11} + (X_1 + Y_2) * p_{12} + (X_2 + Y_1) * p_{21} + (X_2 + Y_2) * p_{22}$$
$$= X_1 \underbrace{(p_{11} + p_{12})}_{p_1} + X_2 \underbrace{(p_{21} + p_{22})}_{p_2} + Y_1 \underbrace{(p_{11} + p_{21})}_{q_1} + Y_2 \underbrace{(p_{12} + p_{22})}_{q_2}$$

$X = X_1 \Rightarrow X + Y = X_1 + Y_1$ или $X + Y = X_1 + Y_2$. $P(X + Y = X_1 + Y_1) = p_{11}, P(X + Y = X_1 + Y_2) = p_{12} \Rightarrow p_1 = p_{11} + p_{12}$

Математическое ожидание числа появления события в независимых испытаниях

- n независимых испытаний
- Событие А появляется в каждом из них с вероятностью p
- Дискретная случайная величина X – число появления события А в этих испытаниях

ВОПРОС: Чему равно среднее число (математическое ожидание случайной величины X) появлений события А в испытаниях?

ОТВЕТ: Математическое ожидание числа появлений события А в n испытаниях равно произведению n на p: $M(X)=n*p$

<u>Доказательство.</u> Пусть X_1 – число появления события А в первом испытании, X_2 – во втором и.т.д, X_n – в n-ом. Всего событие А появилось $X_1+X_2+\ldots+X_n$ раз. По свойству математического ожидания суммы, $M(X)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)$. Так как математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно его вероятности, $M(X_1)=M(X_2)=\ldots=M(X_n)=p$. Отсюда $M(X)=n*p$.

*Данная случайная величина X распределена по биномиальному закону, поэтому можно сказать, что МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ N И P РАВНО ПРОИЗВЕДЕНИЮ N*P.*

Резюме

- $P(X = k) = C_n^k * p^k(1 - p)^{n-k}$ - формула биномиального распределения с параметрами n и p
- $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$ – формула геометрического распределения с параметром p
- $P(X = m) = \frac{C_M^m * C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ - формула гипергеометрического распределения с параметрами N, M и n
- $M(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i * P(X = X_i)$ - формула математического ожидания дискретной случайной величины