

Тема: Итерационные методы решения СЛАУ

(Метод простой итерации. Метод Зейделя)

1. Основные понятия

$$A \cdot x = b$$

- Итерационные методы используются, если порядок системы (n) велик и когда достаточно большое количество коэффициентов $a_{ij} = 0$.
- Методы требуют задания начального приближения $x^{(0)}$.
- Итерационные методы по заданному правилу (**итерационной формуле**) позволяют построить некоторую последовательность приближенных решений $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$, начиная с начального приближения $x^{(0)}$.

Сходимость и скорость сходимости

последовательности к точному решению зависят от выбора нач. приближения и свойств матрицы A.

Итерация – это переход от одного приближенного реш. к другому: $x^{(k)} \rightarrow x^{(k+1)}$, где k – номер итер., $k=1,2,\dots$

Метод сходится, если построенная послед-ть значений стремится в пределе к точному значению:

$$x^{(k)} \rightarrow x^*, k=1,2,\dots$$

где x^* - точное решение (оно неизвестно).

На практике процесс вычислений останавливают, если выполняется **условие остановки**:

$$\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\| \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число (параметр метода, выбирается заранее, например, $\varepsilon = 10^{-4}$).

Если условие остановки выполняется, то $x^* = x^{(k+1)}$ принимают за **решение задачи с точностью ε** .

Для справки: Норма вектора может быть вычислена по-разному. Например,

1. $\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n z_i^2}$ – евклидова норма.

Тогда условие остановки принимает вид:

$$\sqrt{\left(x_1^{(k)} - x_1^{(k+1)}\right)^2 + \left(x_2^{(k)} - x_2^{(k+1)}\right)^2 + \left(x_3^{(k)} - x_3^{(k+1)}\right)^2} \leq \varepsilon$$

2. $\max_{1 \leq i \leq m} |x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}| \leq \varepsilon,$

2. Метод простой итерации

СЛАУ: $Ax=b$

Нужно привести к виду: $x=Gx+g$

Итерационная формула метода простой итерации:

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + g, \quad k=0,1,2,\dots,$$

Метод простой итерации сходится не всегда.

Известно, что метод сходится для любого начального приближения $x^{(0)}$ со скоростью геометрической прогрессии, если норма матрицы G меньше единицы.

Например, $\|G\|_1 = \max_j \sum_i |g_{ij}|$
– максимальная из сумм модулей элементов в столбце (или в строке).

Достаточное условие сходимости к решению системы: матрица A должна иметь **диагональное преобладание**

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

В качестве начального вектора $x^{(0)}$ рекомендуется брать вектор g .

Алгоритм метода простых итераций

1. Преобразовать систему $Ax=b$ к виду $x=Gx+g$.
2. Задать начальное приближение решения $x^{(0)}$ произвольно или положить $x^{(0)}=g$, задать малое положительное число ε (точность приближения). Положить $k=0$.
3. Вычислить следующее приближение
$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + g$$
4. Проверить условие остановки:
если $\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\| \leq \varepsilon$, то процесс завершить и в качестве приближенного решения задачи принять $x^* = x^{(k+1)}$.
Иначе положить $k = k + 1$ и перейти к пункту 3 алгоритма.

Пример 1.

Методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0,01$ решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение. 1. Так как

$|2| < |2| + |10|$, $|1| < |10| + |1|$, $|1| < |2| + |10|$, то ни одно уравнение системы не имеет диагонального преобладания. Переставим уравнения:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

$$|10| > |1| + |1|, \quad |10| > |2| + |1|, \quad |10| > |2| + |2|$$

Исх. СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

$$x = Gx + g$$

Выразим из первого уравнения x_1 , из второго x_2 , из третьего x_3 :

$$\begin{cases} x_1 = -0,1 \cdot x_2 - 0,1 \cdot x_3 + 1,2, \\ x_2 = -0,2 \cdot x_1 - 0,1 \cdot x_3 + 1,3, \\ x_3 = -0,2 \cdot x_1 - 0,2 \cdot x_2 + 1,4; \end{cases} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}.$$

Так как $\|G\| = \max \{0,2; 0,3; 0,4\} = 0,4 < 1$ (в стр.), то метод будет сходиться для любого нач. приближения.

2. Зададим

$$x^{(0)} = \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

Пусть $\varepsilon = 0,01$

3. Выполним расчеты по итерац. формуле :

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots \text{ или}$$
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0,1 \cdot x_2^{(k)} - 0,1 \cdot x_3^{(k)} + 1,2, \\ x_2^{(k+1)} = -0,2 \cdot x_1^{(k)} - 0,1 \cdot x_3^{(k)} + 1,3, \\ x_3^{(k+1)} = -0,2 \cdot x_1^{(k)} - 0,2 \cdot x_2^{(k)} + 1,4. \end{cases}$$

до выполнения условия останова.

Таблица результатов

| k | $x_1^{(k)}$ | $x_2^{(k)}$ | $x_3^{(k)}$ | $\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _1$ |
|-----|-------------|-------------|-------------|-----------------------------|
| 0 | 1,2000 | 1,3000 | 1,4000 | — |
| 1 | 0,9300 | 0,9200 | 0,900 | 0,5 |
| 2 | 1,0180 | 1,0240 | 1,0300 | 0,13 |
| 3 | 0,9946 | 0,9934 | 0,9916 | 0,0384 |
| 4 | 1,0015 | 1,0020 | 1,0024 | 0,0108 |
| 5 | 0,9996 | 0,9995 | 0,9993 | $0,0027 < \varepsilon$ |

4. Расчет закончен, поскольку выполнено условие окончания

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = 0,0027 < \varepsilon = 0,01$$

Приближенное решение задачи:

$$x_* \cong (0,9996 \quad 0,9995 \quad 0,9993)^T$$

Очевидно, точное решение: $x_* = (1 \quad 1 \quad 1)^T$

Приведем результаты расчетов для другого начального приближения $x^{(0)} = (1,2 \quad 0 \quad 0)^T$ и $\varepsilon = 0,001$

| k | $x_1^{(k)}$ | $x_2^{(k)}$ | $x_3^{(k)}$ | $\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _1$ |
|-----|-------------|-------------|-------------|-----------------------------|
| 0 | 1,2000 | 0 | 0 | — |
| 1 | 1,2000 | 1,0600 | 1,1600 | 1,1600 |
| 2 | 0,9780 | 0,9440 | 0,9480 | 0,2220 |
| 3 | 1,0108 | 1,0096 | 1,0156 | 0,0676 |
| 4 | 0,9975 | 0,9963 | 0,9959 | 0,0133 |
| 5 | 1,0008 | 0,0009 | 1,0012 | 0,0053 |
| 6 | 0,9998 | 0,9997 | 0,9997 | 0,0015 |
| 7 | 1,0001 | 1,0001 | 1,0001 | $0,0004 < \varepsilon$ |

Приближенное решение задачи:

$$x_* \cong (1,0001 \quad 1,0001 \quad 1,0001)^T$$

2. Метод Зейделя

Итерационный процесс задается формулой:

$$x^{(k+1)} = P x^{(k+1)} + Q x^{(k)} + g, \quad k=0,1,2,\dots$$

Матрицы P и Q строятся по матрице G:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & \dots & \dots & g_{n,n-1} & \dots \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & \dots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

Метод Зейделя – частный случай метода простой итерации (см. материал)

Метод Зейделя начинает работу с любого начального приближения. Условия сходимости метода те же, что и для метода простой итерации, но проверять их нужно для матрицы

$$\bar{G} = (E - P)^{-1} \times Q$$

Расчетные формулы методов в покомпонентной записи (общий случай, нелинейный)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \phi_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), i = 1, \\ x_2^{(k+1)} = \phi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), i = 2, \\ x_3^{(k+1)} = \phi_3(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), i = 3, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \phi_n(x_1^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}), i = n. \end{array} \right.$$

- **Метод простой итерации**

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \phi_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), i = 1, \\ x_2^{(k+1)} = \phi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), i = 2, \\ x_3^{(k+1)} = \phi_3(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), i = 3, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \phi_n(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}), i = n. \end{array} \right.$$

- **Метод Зейделя**

Если для некоторой СЛАУ сходятся оба метода, то известно, что предпочтительнее метод Зейделя. Можно привести примеры, когда один метод сходится к точному решению, а другой – нет (методы имеют разные области сходимости).

Если выполняется достаточное условие сходимости для метода простой итерации по строкам, то в методе Зейделя выгодно расположить уравнения в порядке возрастания суммы модулей коэффициентов.

Обсуждение

- В приближенных методах можно обеспечить практически любую точность, если итерационный процесс сходится.
- Недостаток приближенных методов: они часто расходятся, достаточные условия сходимости (преобладание диагональных элементов) можно обеспечить только для небольших систем из 3 – 6 уравнений.