# Тема: Итерационные методы решения СЛАУ

## (Метод простой итерации. Метод Зейделя)

## 1. Основные понятия

$$\boxed{A \cdot x = b}$$

- **Итерационные методы используются, если порядок системы (n) велик и когда достаточно большое количество коэффициентов $a_{ij} = 0$.**
- **Методы требуют задания начального приближения $x^{(0)}$.**
- **Итерационные методы по заданному правилу (*итерационной формуле*) позволяют построить некоторую последовательность приближенных решений $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$, начиная с начального приближения $x^{(0)}$.**

***Сходимость и скорость сходимости*** ***последовательности к точному решению зависят от выбора нач. приближения и свойств матрицы А.***

***Итерация*** **– это переход от одного приближенного реш. к другому:** $x^{(к)} \rightarrow x^{(к+1)}$**, где к – номер итер., к=1,2,…**

**Метод *сходится*, если построенная послед-ть значений стремится в пределе к точному значению*:***

$$x^{(к)} \rightarrow x^*,\ к=1,2,\dots$$

**где x* - точное решение (оно неизвестно).**

**На практике процесс вычислений останавливают, если выполняется *условие остановки*:**

$$||x^{(k)} - x^{(k+1)}|| \le \varepsilon\ ,$$

**где ε>0 – достаточно малое число (параметр метода, выбирается заранее, например,** $\varepsilon=10^{-4}$**).**

Если условие остановки выполняется, то *$x^*=x^{(к+1)}$* принимают за ***решение задачи с точностью ε.***

<u>**Для справки:**</u> **Норма вектора может быть вычислена по-разному. Например,**

**1. $||z|| = \sqrt{\sum_{i=1} z_i^2}$ – евклидова норма.**

**Тогда условие остановки принимает вид:**

$$\sqrt{\left(x_1^{(k)} - x_1^{(k+1)}\right)^2 + \left(x_2^{(k)} - x_2^{(k+1)}\right)^2 + \left(x_3^{(k)} - x_3^{(k+1)}\right)^2} \le \varepsilon$$

**2.** $\max\limits_{1\le i\le m} | x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)} | \le \varepsilon,$

# 2. Метод простой итерации

**СЛАУ:** $Ax=b$

**Нужно привести к виду:** $x=G\,x+g$

**Итерационная формула метода простой итерации:**

$$x^{(k+1)} = G\,x^{(k)} + g, \qquad k=0,1,2,\dots,$$

***Метод простой итерации сходится не всегда.***

**Известно, что метод сходится для *<u>любого начального приближения</u>* $x^{(0)}$ со скоростью геометрической прогрессии, если норма матрицы G меньше единицы.**

**Например,** $\|G\|_1 = \max_j \sum_i |g_{ij}|$

**– максимальная из сумм модулей элементов в столбце (или в строке).**

**Достаточное условие сходимости к решению системы: матрица *A* должна иметь *диагональное преобладание***

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

**В качестве начального вектора $x^{(0)}$ рекомендуется брать вектор *g*.**

# Алгоритм метода простых итераций

1. **Преобразовать систему $Ax=b$ к виду $x=Gx+g$.**
2. **Задать начальное приближение решения $x^{(0)}$ произвольно или положить $x^{(0)}=g$, задать малое положительное число $\varepsilon$ (точность приближения). Положить $k=0$.**
3. **Вычислить следующее приближение**

$$x^{(k+1)} = G x^{(k)} + g$$

4. **Проверить условие остановки:**

   **если $\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\| \le \varepsilon$, то процесс завершить и в качестве приближенного решения задачи принять $x^* = x^{(к+1)}$ .**

   **Иначе положить $k = k + 1$ и перейти к пункту 3 алгоритма.**

# Пример 1.

**Методом простых итераций с точностью** $\varepsilon = 0{,}01$ **решить систему линейных алгебраических уравнений:**

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

*Решение.* 1. Так как

$|2| < |2| + |10|,\ |1| < |10| + |1|,\ |1| < |2| + |10|$ , то ни одно уравнение системы не имеет диагонального преобладания. Переставим уравнения:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

$$|10| > |1| + |1|,\ |10| > |2| + |1|,\ |10| > |2| + |2|$$

**Исх. СЛАУ:**

$$\boxed{\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13. \end{cases}}$$

$x = G\,x + g$

Выразим из первого уравнения $x_1$, из второго $x_2$, из третьего $x_3$ :

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}1 \cdot x_2 - 0{,}1 \cdot x_3 + 1{,}2\,, \\ x_2 = -0{,}2 \cdot x_1 - 0{,}1 \cdot x_3 + 1{,}3\,, \\ x_3 = -0{,}2 \cdot x_1 - 0{,}2 \cdot x_2 + 1{,}4\,; \end{cases} \quad G= \begin{pmatrix} 0 & -0,!1 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}, \quad g= \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}3 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}.$$

Так как $\|G\| = \max\{0{,}2;\, 0{,}3;\, 0{,}4\} = 0{,}4 < 1$ (в стр.), то метод будет сходиться для любого нач. приближения.

**2. Зададим** $x^{(0} =$ **g=** $\begin{pmatrix}1{,}2\\1{,}3\\1{,}4\end{pmatrix}$

**Пусть** $\varepsilon = 0{,}01$

**3. Выполним расчеты по итерац. формуле :**

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}3 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}, \; k = 0, 1, \ldots \text{ или}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0{,}1 \cdot x_2^{(k)} - 0{,}1 \cdot x_3^{(k)} + 1{,}2\,, \\ x_2^{(k+1)} = -0{,}2 \cdot x_1^{(k)} - 0{,}1 \cdot x_3^{(k)} + 1{,}3\,, \\ x_3^{(k+1)} = -0{,}2 \cdot x_1^{(k)} - 0{,}2 \cdot x_2^{(k)} + 1{,}4\,. \end{cases}$$

**до выполнения условия остановки.**

# Таблица результатов

| $k$ | $x_1^{(k)}$ | $x_2^{(k)}$ | $x_3^{(k)}$ | $\left\lVert x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\rVert_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,2000 | 1,3000 | 1,4000 | – |
| 1 | 0,9300 | 0,9200 | 0,900 | 0,5 |
| 2 | 1,0180 | 1,0240 | 1,0300 | 0,13 |
| 3 | 0,9946 | 0,9934 | 0,9916 | 0,0384 |
| 4 | 1,0015 | 1,0020 | 1,0024 | 0,0108 |
| 5 | 0,9996 | 0,9995 | 0,9993 | $0{,}0027 < \varepsilon$ |

4. Расчет закончен, поскольку выполнено условие окончания

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| = 0{,}0027 < \varepsilon = 0{,}01$$

Приближенное решение задачи:

$$x_* \cong \begin{pmatrix} 0{,}9996 & 0{,}9995 & 0{,}9993 \end{pmatrix}^T$$

Очевидно, точное решение: $x_* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$

Приведем результаты расчетов для другого начального приближения $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ и $\varepsilon = 0{,}001$

| $k$ | $x_1^{(k)}$ | $x_2^{(k)}$ | $x_3^{(k)}$ | $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,2000 | 0 | 0 | – |
| 1 | 1,2000 | 1,0600 | 1,1600 | 1,1600 |
| 2 | 0,9780 | 0,9440 | 0,9480 | 0,2220 |
| 3 | 1,0108 | 1,0096 | 1,0156 | 0,0676 |
| 4 | 0,9975 | 0,9963 | 0,9959 | 0,0133 |
| 5 | 1,0008 | 0,0009 | 1,0012 | 0,0053 |
| 6 | 0,9998 | 0,9997 | 0,9997 | 0,0015 |
| 7 | 1,0001 | 1,0001 | 1,0001 | $0,0004 < \varepsilon$ |

**Приближенное решение задачи:**

$$x_* \cong \begin{pmatrix} 1,0001 & 1,0001 & 1,0001 \end{pmatrix}^T$$

# 2. Метод Зейделя

**Итерационный процесс задается формулой:**

$$x^{(k+1)} = P\,x^{(k+1)} + Q\,x^{(k)} + g, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

**Матрицы P и Q строятся по матрице G:**

$$P = \begin{bmatrix} 0 \ldots \ldots \ldots \ldots 0 \\ g_{21} \ldots \ldots \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ g_{n1} \cdots g_{n,n-1} \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \ldots & \ldots \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \ldots \\ 0 & \ldots \ldots & \ldots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

**Метод Зейделя – частный случай метода простой итерации (см. материал)**

**Метод Зейделя начинает работу с любого начального приближения. Условия сходимости метода те же, что и для метода простой итерации, но проверять их нужно для матрицы**

$$\bar{G} = (E - P)^{-1} \times Q$$

# Расчетные формулы методов в покомпонентной записи (общий случай, нелинейный)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \phi_1(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)}), i = 1, \\ x_2^{(k+1)} = \phi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\dots,x_n^{(k)}), i = 2, \\ x_3^{(k+1)} = \phi_3(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\dots,x_n^{(k)}), i = 3, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \phi_n(x_1^{(k)},\dots,x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}), i = n. \end{cases}$$

- Метод простой итерации

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \phi_1(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)}), i = 1, \\ x_2^{(k+1)} = \phi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}\dots,x_n^{(k)}), i = 2, \\ x_3^{(k+1)} = \phi_3(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\dots,x_n^{(k)}), i = 3, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \phi_n(x_1^{(k+1)},\dots,x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}), i = n. \end{cases}$$

- Метод Зейделя

**Если для некоторой СЛАУ сходятся оба метода, то известно, что предпочтительнее метод Зейделя. Можно привести примеры, когда один метод сходится к точному решению, а другой – нет (методы имеют разные области сходимости).**

**Если выполняется достаточное условие сходимости для метода простой итерации по строкам, то в методе Зейделя выгодно расположить уравнения в порядке возрастания суммы модулей коэффициентов.**

## Обсуждение

- В приближенных методах можно обеспечить практически любую точность, если итерационный процесс сходится.
- Недостаток приближенных методов: они часто расходятся, достаточные условия сходимости (преобладание диагональных элементов) можно обеспечить только для небольших систем из 3 – 6 уравнений.