Тема: Итерационные методы решения СЛАУ

(Метод простой итерации. Метод Зейделя)

1. Основные понятия

$$\boxed{A \cdot x = b}$$

- **Итерационные методы используются, если порядок системы (n) велик и когда достаточно большое количество коэффициентов $a_{ij} = 0$.**
- **Методы требуют задания начального приближения $x^{(0)}$.**
- **Итерационные методы по заданному правилу (*итерационной формуле*) позволяют построить некоторую последовательность приближенных решений $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$, начиная с начального приближения $x^{(0)}$.**

Сходимость и скорость сходимости ***последовательности к точному решению*** ***зависят*** ***от выбора*** ***нач. приближения*** ***и*** ***свойств матрицы А.***

Итерация **– это переход от одного приближенного реш. к другому: $x^{(к)} \rightarrow x^{(к+1)}$, где к – номер итер., к=1,2,…**

Метод *сходится*, если построенная послед-ть значений стремится в пределе к точному значению:

$$x^{(к)} \rightarrow x^*, \quad к=1,2,\ldots$$

где x* - точное решение (оно неизвестно).

На практике процесс вычислений останавливают, если выполняется *условие остановки*:

$$||x^{(k)} - x^{(k+1)}|| \leq \varepsilon ,$$

где ε>0 – достаточно малое число (параметр метода, выбирается заранее, например, $\varepsilon=10^{-4}$).

Если условие остановки выполняется, то $x^*=x^{(к+1)}$ принимают за ***решение задачи с точностью ε.***

<u>**Для справки:**</u> **Норма вектора может быть вычислена по-разному. Например,**

1. $||z|| = \sqrt{\sum_{i=1} z_i^2}$ – евклидова норма.

Тогда условие остановки принимает вид:

$$\sqrt{\left(x_1^{(k)} - x_1^{(k+1)}\right)^2 + \left(x_2^{(k)} - x_2^{(k+1)}\right)^2 + \left(x_3^{(k)} - x_3^{(k+1)}\right)^2} \le \varepsilon$$

2. $\max\limits_{1\le i\le m} |\, x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)} \,| \le \varepsilon,$

2. Метод простой итерации

СЛАУ: $Ax=b$

Нужно привести к виду: $x=G\,x + g$

Итерационная формула метода простой итерации:

$$x^{(k+1)} = G\,x^{(k)} + g, \qquad k=0,1,2,\ldots ,$$

Метод простой итерации сходится не всегда.

Известно, что метод сходится для *<u>любого начального приближения</u>* $x^{(0)}$ со скоростью геометрической прогрессии, если норма матрицы G меньше единицы.

Например, $\|G\|_1 = \max_j \sum_i |g_{ij}|$

– максимальная из сумм модулей элементов в столбце (или в строке).

Достаточное условие сходимости к решению системы: матрица *A* должна иметь *диагональное преобладание*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

В качестве начального вектора $x^{(0)}$ рекомендуется брать вектор *g*.

Алгоритм метода простых итераций

1. **Преобразовать систему Ax=b к виду x=G x + g.**
2. **Задать начальное приближение решения $x^{(0)}$ произвольно или положить $x^{(0)}$ =g , задать малое положительное число ε (точность приближения). Положить k=0.**
3. **Вычислить следующее приближение**

$$x^{(k+1)} = G\,x^{(k)} + g$$

4. **Проверить условие остановки:**

если $\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\| \le \varepsilon$, то процесс завершить и в качестве приближенного решения задачи принять $x^* = x^{(k+1)}$.

Иначе положить k = k + 1 и перейти к пункту 3 алгоритма.

Пример 1.

Методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ **решить систему линейных алгебраических уравнений:**

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение. **1. Так как**

$|2| < |2| + |10|,\ |1| < |10| + |1|,\ |1| < |2| + |10|$ **, то ни одно уравнение системы не имеет диагонального преобладания. Переставим уравнения:**

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

$$|10| > |1| + |1|,\ |10| > |2| + |1|,\ |10| > |2| + |2|$$

Исх. СЛАУ: $\boxed{\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13. \end{cases}}$

$x = G\,x + g$

Выразим из первого уравнения x_1, из второго x_2, из третьего x_3 :

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}1 \cdot x_2 - 0{,}1 \cdot x_3 + 1{,}2, \\ x_2 = -0{,}2 \cdot x_1 - 0{,}1 \cdot x_3 + 1{,}3, \\ x_3 = -0{,}2 \cdot x_1 - 0{,}2 \cdot x_2 + 1{,}4; \end{cases} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}!1 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}3 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}.$$

Так как $\|G\| = \max \{0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4\} = 0{,}4 < 1$ (в стр.), то метод будет сходиться для любого нач. приближения.

2. Зададим $x^{(0} =$ g= $\begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}3 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}$

Пусть $\varepsilon = 0{,}01$

3. Выполним расчеты по итерац. формуле :

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}3 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}, \; k = 0, 1, \ldots \text{ или}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0{,}1 \cdot x_2^{(k)} - 0{,}1 \cdot x_3^{(k)} + 1{,}2\,, \\ x_2^{(k+1)} = -0{,}2 \cdot x_1^{(k)} - 0{,}1 \cdot x_3^{(k)} + 1{,}3\,, \\ x_3^{(k+1)} = -0{,}2 \cdot x_1^{(k)} - 0{,}2 \cdot x_2^{(k)} + 1{,}4\,. \end{cases}$$

до выполнения условия остановки.

Таблица результатов

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|_1$
0	1,2000	1,3000	1,4000	–
1	0,9300	0,9200	0,900	0,5
2	1,0180	1,0240	1,0300	0,13
3	0,9946	0,9934	0,9916	0,0384
4	1,0015	1,0020	1,0024	0,0108
5	0,9996	0,9995	0,9993	$0{,}0027 < \varepsilon$

4. Расчет закончен, поскольку выполнено условие окончания

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| = 0{,}0027 < \varepsilon = 0{,}01$$

Приближенное решение задачи:

$$x_* \cong \begin{pmatrix}0{,}9996 & 0{,}9995 & 0{,}9993\end{pmatrix}^T$$

Очевидно, точное решение: $x_* = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$

Приведем результаты расчетов для другого начального приближения $x^{(0)} = \begin{pmatrix}1{,}2 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ и $\varepsilon = 0{,}001$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\lVert x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\rVert_1$
0	1,2000	0	0	–
1	1,2000	1,0600	1,1600	1,1600
2	0,9780	0,9440	0,9480	0,2220
3	1,0108	1,0096	1,0156	0,0676
4	0,9975	0,9963	0,9959	0,0133
5	1,0008	0,0009	1,0012	0,0053
6	0,9998	0,9997	0,9997	0,0015
7	1,0001	1,0001	1,0001	$0{,}0004 < \varepsilon$

Приближенное решение задачи:

$$x_* \cong \begin{pmatrix} 1{,}0001 & 1{,}0001 & 1{,}0001 \end{pmatrix}^T$$

2. Метод Зейделя

Итерационный процесс задается формулой:

$$x^{(k+1)} = P\,x^{(k+1)} + Q\,x^{(k)} + g, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Матрицы P и Q строятся по матрице G:

$$P = \begin{bmatrix} 0 \ldots \ldots \ldots \ldots 0 \\ g_{21} \ldots \ldots \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ g_{n1} \cdots g_{n,n-1} \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \ldots & \ldots \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots \ldots & \ldots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

Метод Зейделя – частный случай метода простой итерации (см. материал)

Метод Зейделя начинает работу с любого начального приближения. Условия сходимости метода те же, что и для метода простой итерации, но проверять их нужно для матрицы

$$\bar{G} = (E - P)^{-1} \times Q$$

Расчетные формулы методов в покомпонентной записи (общий случай, нелинейный)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \phi_1(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)}), i=1, \\ x_2^{(k+1)} = \phi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\dots,x_n^{(k)}), i=2, \\ x_3^{(k+1)} = \phi_3(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\dots,x_n^{(k)}), i=3, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \phi_n(x_1^{(k)},\dots,x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}), i=n. \end{cases}$$

- Метод простой итерации

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \phi_1(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)}), i=1, \\ x_2^{(k+1)} = \phi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}\dots,x_n^{(k)}), i=2, \\ x_3^{(k+1)} = \phi_3(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\dots,x_n^{(k)}), i=3, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \phi_n(x_1^{(k+1)},\dots,x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}), i=n. \end{cases}$$

- Метод Зейделя

Если для некоторой СЛАУ сходятся оба метода, то известно, что предпочтительнее метод Зейделя. Можно привести примеры, когда один метод сходится к точному решению, а другой – нет (методы имеют разные области сходимости).

Если выполняется достаточное условие сходимости для метода простой итерации по строкам, то в методе Зейделя выгодно расположить уравнения в порядке возрастания суммы модулей коэффициентов.

Обсуждение

- В приближенных методах можно обеспечить практически любую точность, если итерационный процесс сходится.
- Недостаток приближенных методов: они часто расходятся, достаточные условия сходимости (преобладание диагональных элементов) можно обеспечить только для небольших систем из 3 – 6 уравнений.