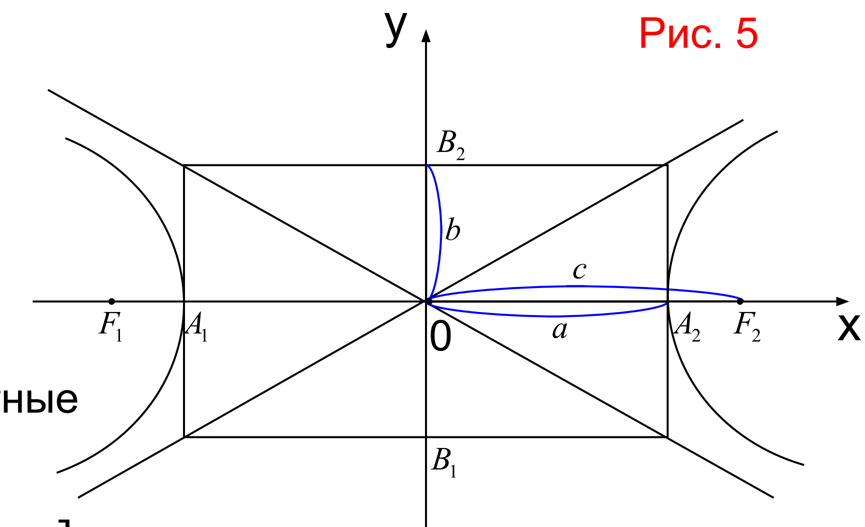
ГИПЕРБОЛА

Гиперболой называется множество точек, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (2a), меньшая, чем расстояние между фокусами (2c).

Простейшее уравнение гиперболы получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2 а за ось Oy перпендикуляр в середине отрезка $[F_1F_2]$ (рис. 5)



Тогда уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$

Гипербола имеет две оси симметрии (координатные оси), с одной из которых (осью абсцисс) она пересекается в двух точках A_1 и A_2 называемых вершинами гиперболы. Отрезок $[A_1A_2]$ длиной 2a называется действительной осью гиперболы, а отрезок $[B_1B_2]$ длиной 2b – мнимой осью гиперболы. Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение гиперболы, равны ее полуосям.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к ее действительной оси:

$$e = c/a \qquad (2)$$

Очевидно, что e > 1.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x \qquad (3)$$

Если мнимая ось гиперболы направлена по оси Ox и имеет длину 2a, а действительная ось длиной 2b направлена по оси Oy (рис. 6)

то уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4)$$

Эксцентриситет такой гиперболы вычисляется по формуле:

$$e = c/b \qquad (2')$$

Ее асимптоты те же, что и у гиперболы (1).

Гиперболы (1) и (4) называются сопряженными.

Гипербола называется равносторонней, если ее действительная и мнимая оси равны, т. е. $a = b$. Простейшее уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (5)$$

или

$$-x^2 + y^2 = a^2. \qquad (5')$$

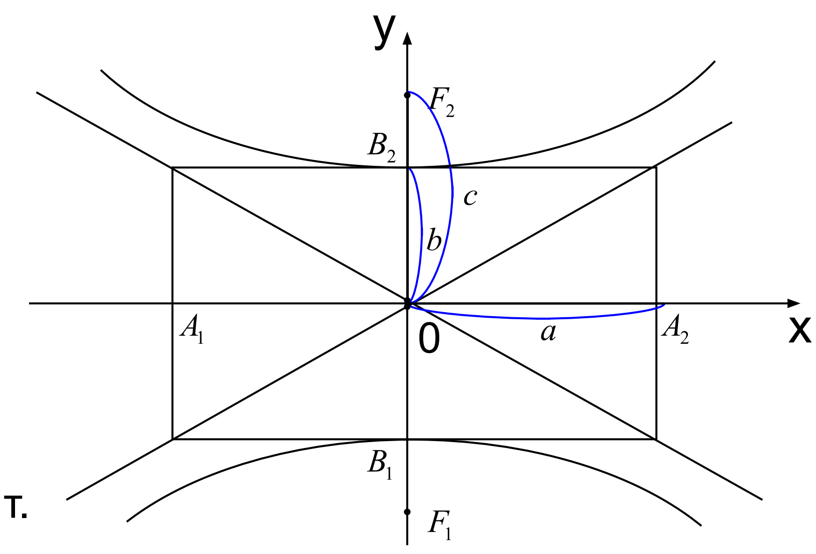


Рис. 6

Задание 1. Найти оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0.$

Решение. Перенесем свободный член вправо и разделим на него все члены данного уравнения. В результате получим простейшее уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1), имеем a = 3, b = 4. Таким образом, действительная ось гиперболы 2a = 6, а мнимая ось 2b = 8; координаты вершин

$$A_1(-3;0) \text{ и } A_2(3;0).$$

Далее, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16 = 5;}$

следовательно, фокусами гиперболы служат точки

$$F_1(-5;0) \text{ и } F_2(5;0).$$

Эксцентриситет гиперболы вычисляем по формуле (2): e = c/a = 5/3. Наконец, подставляя значения a = 3, b = 4 в формулы (3), получаем уравнения асимптот гиперболы: y = 4x/3 и y = –4x/3.

Задание 2. Показать, что уравнение $5x^2 - 4y + 30x + 8y + 21 = 0$

Представляет собой уравнение гиперболы. Найти центр, оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты этой гиперболы.

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду

$$5(x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) - 45 + 4 + 21 = 0;$$

$$5(x+3)^2 - 4(y-1)^2 = 20; \quad \frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1.$$

Обозначим $x' = x + 3$, и $y' = y - 1$.

Таким образом, мы производим преобразование параллельного переноса осей координат в точку О (–3;1). В новой системе координат данное уравнение принимает вид $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{5} = 1$, т.е. определяет гиперболу с центром в точке $O'(-3;1)$

и полуосями $a = 2$ и $b = \sqrt{5}$ (рис. 7)

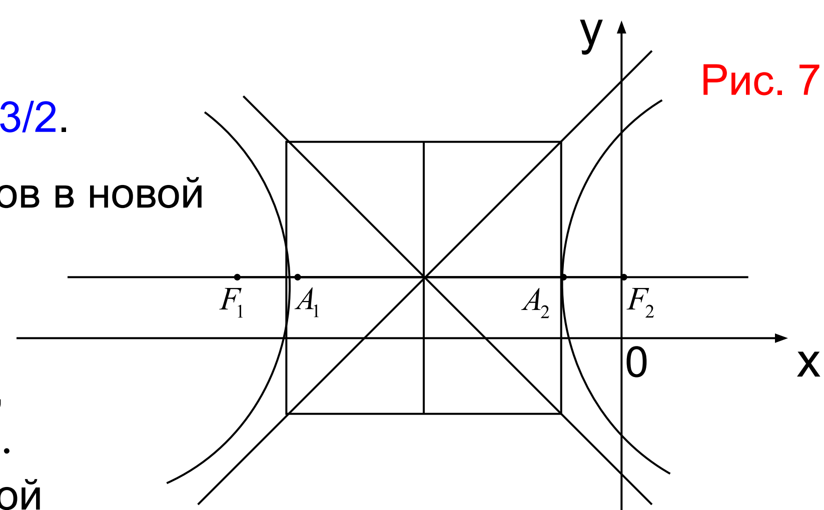


Рис. 7

Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+5} = 3$, то е = с/а = 3/2.

Нетрудно найти координаты вершин и фокусов в новой координатной системе:

$A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$, $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$.

Так как $x = x' - 3$, $y = y' + 1$,

то, возвращаясь к старой системе координат, получим $A_1(-5;1)$, $A_2(-1;1)$, $F_1(-6;1)$, $F_2(0;1)$.

Остается найти асимптоты гиперболы. В новой системе координат уравнения асимптот имеют вид $y' = \pm bx'/a$, т.е. $y' = \pm\sqrt{5}x'/2$.

Заменяя теперь x' на х + 3, а y' на у – 1, получим уравнения асимптот в первоначальной системе координат:

$$y - 1 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x+3).$$

ПАРАБОЛА

Параболой называется множество точек, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой параболы.

Величина p, равная расстоянию от фокуса до директрисы, называется параметром параболы; прямая, проходящая через фокус параболы перпендикулярно ее директрисе, называется осью, а точка пересечения параболы с ее осью – вершиной параболы.

Простейшее уравнение параболы получается, если координатная система расположена следующим образом: за одну из координатных осей берется ось параболы, а за другую – прямая, перпендикулярная оси параболы и проведенная посредине между фокусом и директрисой.

Тогда уравнение параболы примет вид:

$y^2 = 2px$ (рис. 8) (1) $y^2 = -2px$ (рис. 9) (2) $x^2 = 2py$ (рис. 10) (3) $x^2 = -2py$ (рис. 11) (4)

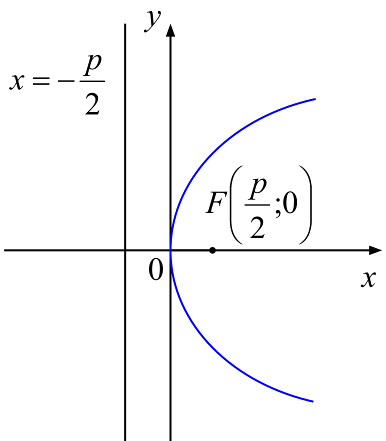


Рис. 8

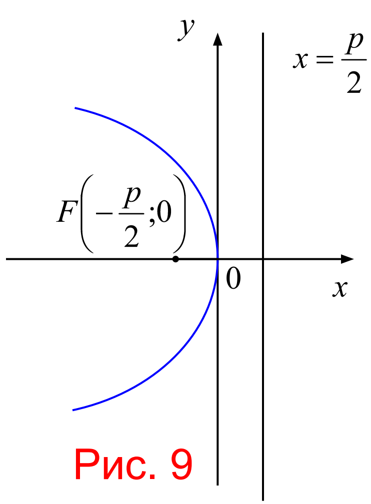


Рис. 9

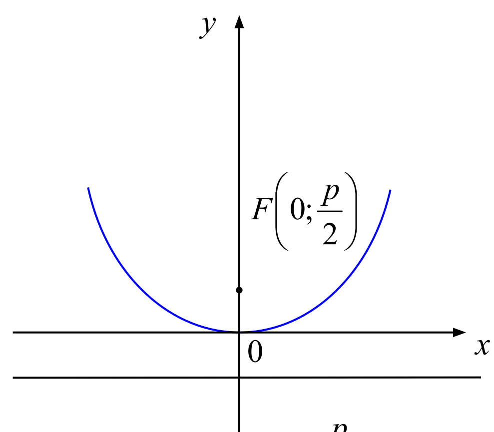


Рис. 10

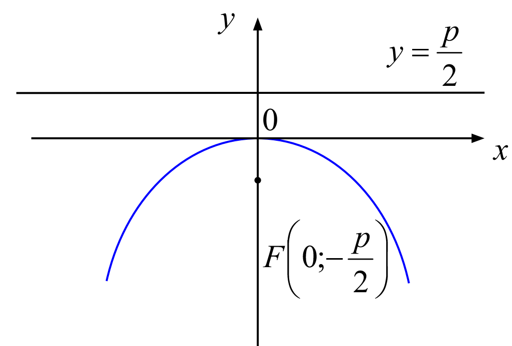


Рис. 11

Уравнение $y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0) \qquad (5)$

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси абсцисс.
Аналогично, уравнение

$$x = my^2 + ny + p \qquad (m \neq 0) \qquad (6)$$

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси ординат.
Уравнения (5) и (6) приводятся к простейшему виду (1) – (4) путем тождественных преобразований с последующим параллельным переносом координатной системы.

Задание 1. Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы параболы $y^2 = 4x$

Решение. Сравнивая это уравнение с уравнением (1), находим, что $2p = 4$, откуда $p/2 = 1$. Таким образом, точка $F(1; 0)$ – фокус параболы, а прямая $x + 1 = 0$ – ее директриса.

Задание 2. Показать, что уравнение $2x^2 - 12x + y + 13 = 0$

Представляет собой уравнение параболы. Найти вершину, фокус, ось и директрису этой параболы.

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду. Для этого выразим у через х и в полученном выражении выделим полный квадрат:

$$y = -2x^2 + 12x - 13, \text{ или } y = -2\left(x^2 - 6x + \frac{12}{2}\right),$$

т.е. $y = -2\left[(x^2 - 2\cdot 3x + 9) - 9 + \dfrac{13}{2}\right],$

Откуда $y = -2(x-3)^2 + 5.$

Следовательно, $y - 5 = -2(x-3)^2,$ или $-\dfrac{1}{2}(y-5) = (x-3)^2.$

Положим теперь $y' = y - 5, \quad x' = x - 3.$

тем самым мы производим преобразование параллельного переноса координатных осей без изменения их направления в точку $O'(3;5)$.

В новой системе координат уравнение параболы примет вид:

$$-\frac{1}{2}y' = x'^2$$

Отсюда 2p = 1/2, т.е. p/2 = 1/8. таким образом, в новой системе координат данная парабола имеет фокус F(0; –1/8), осью параболы является ось $O'y'$ (ее уравнение $x' = 0$), а уравнение директрисы $y' = 1/8$ (рис. 12)

Возвращаясь к старой системе координат, получим:
вершину параболы $O'(3;5)$;

координаты фокуса:

$$xF = x'F + 3 = 0 + 3 = 3,$$

$$yF = y'F + 5 = -1/8 + 5 = 39/8,$$

т.е. $F(3;39/8)$;

уравнение оси параболы x – 3 = 0

уравнение директрисы y – 5 = 1/8, или 8y – 41 = 0.

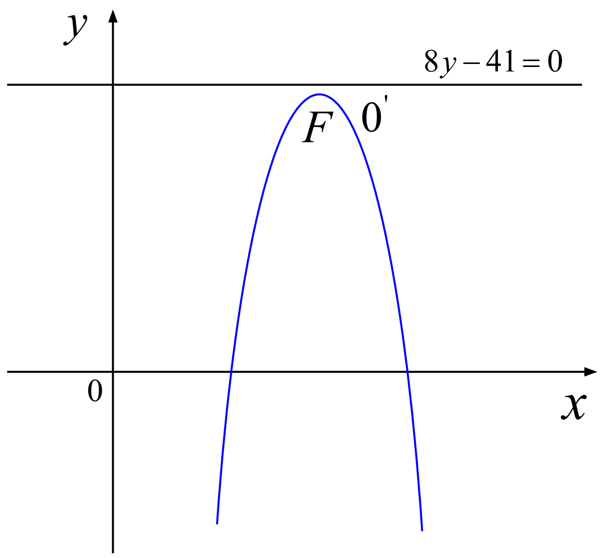


Рис. 12