Теория вероятностей

2.2. Законы распределения дискретных случайных величин. Законы распределения непрерывных случайных величин.

Некоторые законы распределения

1. *Равномерное распределение* вероятностей случайной величины X, принимающей n значений, задается формулой

$$P_n(X = x_i) = \frac{1}{n} \qquad (2.26)$$

где $x_1,...,x_n$ – все возможные значения случайной величины.

Говорят, *что распределение вероятностей непрерывной случайной величины X равномерно на интервале* (a, b), если ее плотность вероятности постоянна на этом интервале и равна нулю вне его:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a < x \le b, \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases} \qquad (2.27)$$

В этом случае вероятность того, что значение величины принадлежит части (c, d) интервала (a, b), равна отношению длин этих интервалов:

$$P(x \in (c, d)) = \frac{d-c}{b-a}. \qquad (2.28)$$

2. *Биномиальное распределение* вероятностей случайной величины X, значениями которой являются возможные значения числа m появления события A при проведении n повторных независимых испытаний, задается формулой

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (2.29)$$

где $m = 0, 1, 2, ..., n$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq. \qquad (2.30)$$

3. *Геометрическое распределение* вероятностей случайной величины X, значениями которой являются возможные значения числа m проведенных испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли (причем опыт прекращается после первого же испытания, в котором рассматриваемое событие появилось), задается формулой

$$P_n(X = m) = pq^{m-1}, \qquad (2.31)$$

где $m = 1, 2, 3...$.

Если случайная величина X имеет геометрическое распределение вероятностей, то

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2}. \qquad (2.32)$$

4. *Показательное (экспоненциальное) распределение Пуассона* задается формулой

$$P_n(X=m)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}, \qquad (2.33)$$

где $m=0,1,2,\ldots$.

Если случайная величина X имеет пуассоновское распределение вероятностей, то

$$M(X)=\lambda, \quad D(X)=\lambda. \qquad (2.34)$$

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & при\ x\ge 0,\end{cases} \qquad (2.35)$$

где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & при\ x\ge 0,\end{cases} \qquad (2.36)$$

Вероятность попадания в интервал (a, b) непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону,
$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Найдем математическое ожидание показательного распределения
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0); \quad f(x) = 0 \quad (x < 0)$.

Используем формулу

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Учитывая, что $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$, получим

$$M(X) = \lambda \int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Интегрируя по частям, положив $u = x, dv = e^{-\lambda x} dx$ и выполнив необходимые выкладки, окончательно получим $M(X) = 1/\lambda$.

Итак, математическое ожидание показательного распределения равно обратной величине параметра λ.

Найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения. Учитывая, что $f(x) = 0$ при $x < 0$, $M(X) = 1/\lambda$, получим

$$D(X) = \lambda \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - [1/\lambda]^2.$$

Интегрируя дважды по частям, найдем

$$\lambda\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Следовательно, искомая дисперсия

$$D(X) = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2.$$

Т. е. дисперсия показательного распределения равна величине, обратной λ^2.

Найдем среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1/\lambda^2} = 1/\lambda.$$

Т. е. среднее квадратическое отклонение показательного распределения равно величине, обратной λ.

Таким образом, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.

<u>*5. Нормальным*</u> называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}. \qquad (2.37)$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение X.

Заметим, что при $a=0, \sigma=1$ нормальную кривую $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ называют *нормированной*.

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β),

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (2.38)$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-x^2/2}dx$ – функция Лапласа.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ,

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma). \qquad (2.39)$$

В частности, при a = 0 справедливо равенство $P(|X|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma)$.

Если в (39) положить δ = σ; δ = 2σ; δ = 3σ, то

$$P(|X-a|<\sigma)=2\Phi(1)=0{,}6826,$$

$$P(|X-a|<2\sigma)=2\Phi(2)=0{,}9544,$$

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}9973.$$

Таким образом, практически достоверно, что распределенная по нормальному закону случайная величина X принимает свои значения в интервале $(a-3\sigma;\ a+3\sigma)$ (*правило трех сигм*).

Оценка отклонения теоретического распределения от нормального.

Эмпирическим называют распределение относительных частот. *Теоретическим* называют распределение вероятностей. При изучении распределений, отличных от нормального, возникает необходимость количественно оценить это различие. С этой целью вводят специальные характеристики, в частности асимметрию и эксцесс.

Асимметрией теоретического распределения называют отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического отклонения: $A_s = \mu_3 / \sigma^3$.

Эксцессом теоретического распределения называют характеристику, которая определяется равенством $E_k = (\mu^4 / \sigma^4) - 3$.

Асимметрия, эксцесс, мода и медиана нормального распределения соответственно равны:

$A_s = 0, E_k = 0, M_0 = a, M_e = a$, где $a = M(X)$.

Пример 1. Случайная величина X задана следующей таблицей распределения вероятностей:

X	2	5	8	9
p	0,1	0,4	0,3	0,2

Найдем $M(X), D(X), \sigma(X)$.

Решение. Так как известен закон (таблица) распределения вероятностей, то по формуле (2.9)

$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,2 = 6,4.$

Для вычисления $D(X)$ найдем сначала $M(X^2)$:

$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,4 + 64 \cdot 0,3 + 81 \cdot 0,2 = 45,8.$

По формуле (2.15)

$D(X) = 45,8 - 6,4^2 = 4,84.$

И, наконец, по формуле (2.19)

$\sigma(X) = \sqrt{4,84} = 2,2.$

Пример 2. Найдем математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение. Пусть X – число лотерейных билетов, на которые выпали выигрыши. Случайная величина X имеет биномиальное распределение, так как испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. Поэтому

$$M(X) = 100 \cdot 0{,}05 = 5, \; D(X) = 100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 4{,}75.$$

Пример 3. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по одной цели. Вероятность попадания первого стрелка в цель равна 0,7, второго – 0,8 и третьего – 0,9. Найдите математическое ожидание числа попаданий в цель.

Решение. Пусть случайная величина X_1 – число попаданий в цель для первого стрелка, X_2 – число попаданий в цель для второго стрелка, X_3 – число попаданий в цель для третьего стрелка. Тогда случайная величина $Z = X_1 + X_2 + X_3$ – число попаданий в цель трех стрелков. Но математическое ожидание суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их математических ожиданий. Следовательно,

$$M(Z) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3).$$

Таблица распределения вероятностей случайной величины X_1

X	0	1
p	0,3	0,7

Следовательно, $M(X_1) = 0{,}7$. Аналогично $M(X_2) = 0{,}8$ и $M(X_3) = 0{,}9$. Значит, $M(Z) = 0{,}7 + 0{,}8 + 0{,}9 = 2{,}4$.

Пример 4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3
p	0,4	0,6

Найти начальные моменты первого, второго и третьего порядков.

Решение. Найдем начальный момент первого порядка:
$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}6 = 2{,}2$.

Напишем закон распределения величины X^2:

X^2	1	9
p	0,4	0,6

Найдем начальный момент второго порядка:
$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}6 = 5{,}8$.

Напишем закон распределения величины X^3:

X^3	1	27
p	0,4	0,6

Найдем начальный момент третьего порядка:
$\nu_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0{,}4 + 27 \cdot 0{,}6 = 16{,}6$.

Пример 5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6

Найти центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Решение. Центральный момент первого порядка равен нулю: $\mu_1 = 0$.

Для вычисления центральных моментов удобно пользоваться формулами, выражающими центральные моменты через начальные, поэтому предварительно найдем начальные моменты:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}6 = 3{,}1;$$

$$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 + 16 \cdot 0{,}6 = 10{,}9;$$

$$\nu_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}3 + 64 \cdot 0{,}6 = 40{,}9;$$

$$\nu_4 = M(X^4) = 1 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}3 + 256 \cdot 0{,}6 = 158{,}5.$$

Найдем центральные моменты:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 10{,}9 - 3{,}1^2 = 1{,}29;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 40{,}9 - 3 \cdot 3{,}1 \cdot 10{,}9 + 2 \cdot 3{,}1^3 = -0{,}888;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 = 158{,}5 - 4 \cdot 40{,}9 \cdot 3{,}1 + 6 \cdot 10{,}9 \cdot 3{,}1^2 - 3 \cdot 3{,}1^4 = 2{,}7777$$

.

Пример 6. Плотность вероятности случайной величины имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ \frac{1}{2}\sin x & при\ 0<x\le\pi,\\ 1 & при\ x>\pi.\end{cases}$$

Построить график функции $f(x)$ и на основе исследования графика показать, что вероятности попадания случайной величины в $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$ равны между собой, а математическое ожидание случайной величины равно $\frac{\pi}{2}$

Решение. График функции $y = f(x)$ изображен на рисунке 16.

Так как этот график симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, то

1) $M(X) = \frac{\pi}{2}$;

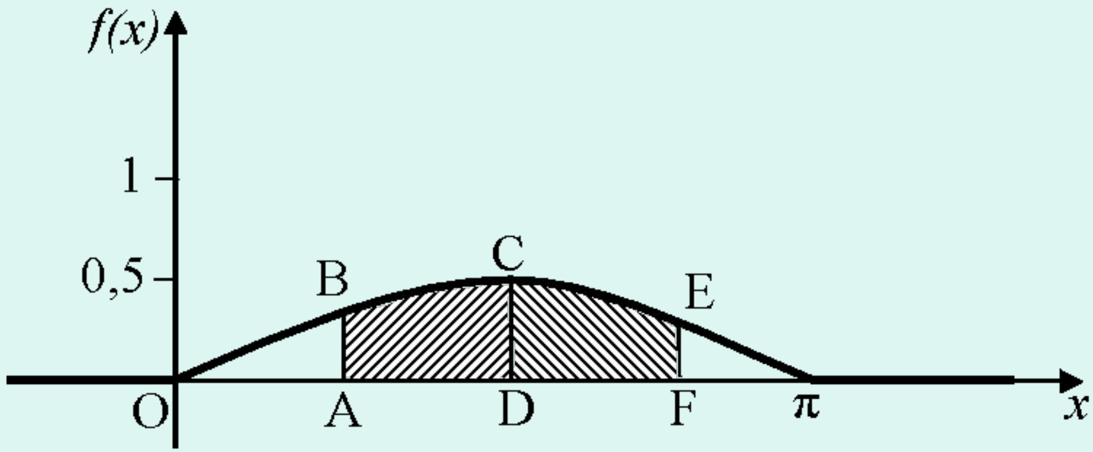

Рис. 16

2) площади криволинейных трапеций *ABCD* и *DCEF* равны между собой. А площадь криволинейной трапеции равна вероятности попадания случайной величины в интервал, являющийся основанием этой трапеции. Следовательно,

$$P\left(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}\right) = P\left(\frac{\pi}{2} < X < \frac{3\pi}{4}\right).$$

Пример 7. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=\frac{1}{2}x-5$ в интервале (10; 12), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. Найдем математическое ожидание, используя формулу (2.11):

$$M(X)=\int_{10}^{12}x\left(\frac{1}{2}x-5\right)dx=11\frac{1}{3}.$$

Дисперсию случайной величины найдем по формуле (2.18):

$$D(X)=\int_{10}^{12}x^2\left(\frac{1}{2}x-5\right)dx-(M(X))^2=\frac{1}{3}.$$

Зная дисперсию, найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{3}}\approx 0{,}526.$$

Пример 8. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2\cos 2x$ в интервале $(0, \pi/4)$ вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти: а) моду; б) медиану X.

Решение. а) Легко убедиться, что функция $f(x) = 2\cos 2x$ в открытом интервале $(0, \pi/4)$ не имеет максимума, поэтому X моду не имеет.

б) Найдем медиану $M_e(X) = m_e$, исходя из определения медианы: $P(X < m_e) = P(X > m_e)$, или, что то же, $P(X < m_e) = 1/2$. Учитывая, что по условию возможные значения X положительны, перепишем это равенство так:

$$P(0 < X < m_e) = 1/2 \text{ или } 2\int_0^{m_e} \cos 2x dx = \sin 2m_e = 1/2.$$

Отсюда $2m_e = \arcsin 1/2 = \pi/6$. Следовательно, искомая медиана $m_e = \pi/12$.

Пример 9. Случайная величина X в интервале (2, 4) задана плотностью распределения $f(x) = -(3/4)x^2 + (9/2)x - 6$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду, математическое ожидание и медиану величины X.

Решение. Представим плотность распределения в виде $f(x) = -(3/4)(x-3)^2 + 3/4$. Отсюда видно, что при $x = 3$ плотность распределения достигает максимума; следовательно, $M_0(X) = 3$. (Разумеется, можно было найти максимум методами дифференциального исчисления.)

Кривая распределения симметрична относительно прямой $x = 3$, поэтому $M(X) = 3$ и $M_e(X) = 3$.

Пример 10. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 0{,}5x$ в интервале $(0, 2)$; вне этого интервала $f(x)$ = 0. Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Решение. По формуле

$$\nu_k = \int_0^2 x^k f(x)dx$$

найдем начальные моменты:

$$\nu_1 = \int_0^2 x(0{,}5x)dx = \frac{4}{3}; \qquad \nu_2 = \int_0^2 x^2(0{,}5x)dx = 2;$$

$$\nu_3 = \int_0^2 x^3(0{,}5x)dx = 3{,}2; \qquad \nu_4 = \int_0^2 x^4(0{,}5x)dx = \frac{16}{3}.$$

Найдем центральные моменты. Центральный момент первого порядка любой случайной величины $\mu_1 = 0$. Воспользуемся формулами, выражающими центральные моменты через начальные:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2;\ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3;\ \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

Подставив в эти формулы ранее найденные начальные моменты, получим: $\mu_2 = 2/9$, $\mu_3 = -8/135$, $\mu_4 = 16/135$.

Пример 11. Поезда метро идут с интервалом в 2 минуты. Пассажир появляется на перроне в произвольный момент времени. Время ожидания поезда есть случайная величина X, имеющая равномерное распределение вероятностей. Найдем плотность вероятности, интегральную функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Из условия задачи $a=0$, $b=2$. Тогда, применяя формулу (2.27), получим:

$$f(x)=\begin{cases}0, & если\ x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}, & если\ 0<x\le 2,\\ 0, & если\ x>2.\end{cases}$$

Формула (5) позволяет найти интегральную функцию распределения.

При $x\le 0$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dx=0$.

При $0<x\le 2$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x$.

При $x>2$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{2}dx+\int\limits_{2}^{x}0dx=1$.

Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \textit{если } x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}x, & \textit{если } 0<x\le 2,\\ 1, & \textit{если } x>2.\end{cases}$$

Так как график функции $y=f(x)$ симметричен относительно прямой $x=1$, то $M(x)=1$. Дисперсию случайной величины X найдем по формуле (2.18):

$$D(X)=\int_0^2 x^2\frac{1}{2}dx-(M(X))^2=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2-1=\frac{1}{3}$$

Пример 12. Событие, состоящее из мгновенного сигнала, должно произойти между одним и пятью часами. Время ожидания сигнала есть случайная величина X, имеющая равномерное распределение. Какова вероятность того, что сигнал будет зафиксирован в течение 20 мин после двух часов?

Решение. Случайная величина X имеет равномерное распределение в интервале (1; 5). Найдем вероятность того, что при испытании ее возможное значение попадет в интервал $\left(2;\ 2\frac{1}{3}\right)$. По формуле (2.28)

$$P\left(2 < X < 2\frac{1}{3}\right) = \frac{1/3}{4} \approx 0{,}083.$$

Пример 13. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

Решение. Воспользуемся формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Подставив $\alpha = 12$, $\beta = 14$, $a = 10$ и $\sigma = 2$, получим $P\ (12 < X < 14) = \Phi(2) - \Phi(1)$. По таблице приложения 2 находим: $\Phi\ (2) = 0{,}4772$, $\Phi\ (1) = 0{,}3413$. Искомая вероятность $P\ (12 < X < 14) = 0{,}1359$.

Пример 14. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением σ = 0,4 мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

Решение. Так как X – отклонение (диаметра шарика от проектного размера), то $M(X) = a = 0$.

Воспользуемся формулой $P(|X| < \delta) = 2\Phi(\delta / \sigma)$. Подставив δ = 0,7, σ = 0,4, получим

$$P(|X - a| < 0{,}7) = 2\Phi(0{,}7 / 0{,}4) = 2\Phi(1{,}75) = 2 \cdot 0{,}4599 = 0{,}92.$$

Таким образом, вероятность отклонения, меньшего 0,7 мм, равна 0,92. Отсюда следует, что примерно 92 шарика из 100 окажутся годными.

Пример 15. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания X в интервал (10, 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (0, 10)?

Решение. Так как нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = a = 10$, то площади, ограниченные сверху нормальной кривой и снизу – интервалами (0, 10) и (10, 20), равны между собой. Поскольку эти площади численно равны вероятностям попадания X в соответствующий интервал, то

$P(0 < X < 10) = P(10 < X < 20) = 0{,}3.$

Пример 16. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 5$.

Решение. Подставив $\lambda = 5$ в соотношения (2.35) и (2.36), получим

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 5e^{-5x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-5x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Пример 17. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$; при $x < 0$ $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (0,13; 0,7).

Решение. Используем формулу

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Учитывая, что, по условию, $a = 0{,}13$, $b = 0{,}7$, $\lambda = 3$, получим

$$P(0{,}13 < X < 0{,}7) = e^{-3\cdot 0{,}13} - e^{-3\cdot 0{,}7} = 0{,}677 - 0{,}122 = 0{,}555.$$

Пример 18. Найти: а) дисперсию; б) среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного плотностью вероятности: $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$; $f(x) = 0$ при $x < 0$.

Решение. а) Используем формулу

$$D(X) = 1/\lambda^2 = 1/9.$$

б) Найдем среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1/\lambda^2} = 1/\lambda = 1/3.$$

2.3. Законы больших чисел и предельные теоремы теории вероятностей.

Пусть имеется n попарно независимых СВ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, дисперсии которых ограничены одной и той же постоянной С. Обозначим $\overline{\xi_n} = \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$.

Сформулируем теорему Чебышева, которую называют законом больших чисел.

Теорема: Если для независимых СВ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ дисперсии $D(\xi_i) \le C$,

$i = \overline{1,n}$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\overline{\xi_n} - M\left(\overline{\xi_n}\right)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Сущность теоремы Чебышева заключается в том, что хотя каждая из независимых СВ $\xi_i,\ i=\overline{1,n},$ может принять значение, далекое от $M(\xi_i)$, среднее арифметическое $\overline{\xi_n}$ при достаточно большом n с большой вероятностью будет весьма близко к $M(\overline{\xi_n})$. Практическое значение этого факта заключается в том, что можно принять в качестве искомого значения некоторой измеряемой величины среднее арифметическое результатов нескольких измерений.

Простейшей формой закона больших чисел является утверждение в теореме Бернулли.

Теорема: Пусть m — число наступлений события А в n независимых испытаниях, p = p(A) — вероятность наступления А в каждом из испытаний. Тогда для любого $\varepsilon > 0\ \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$

Большое значение для практики имеет также теорема Ляпунова, которую называют центральной предельной теоремой. Приведем ее в упрощенном виде.

Теорема: Если независимые СВ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, то при неограниченном увеличении n закон распределения нормированной СВ $\overline{\xi_n} = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{\sigma\sqrt{n}}$

$\left(M\left(\overline{\xi_n}\right) = 0,\ D\left(\overline{\xi_n}\right) = 1\right)$ как угодно мало отличается от нормального: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\overline{\xi_n} < x\right) = \Phi(x).$

Общая теорема Ляпунова обобщает данный вывод на случай различных распределений независимых СВ $\xi_i, i = \overline{1,n},$ если роль

каждой из них в образовании нормированной СВ $\overline{\xi_n}$ мала.