

Теория вероятностей

2.2. Законы распределения дискретных случайных величин. Законы распределения непрерывных случайных величин.

Некоторые законы распределения

1. Равномерное распределение вероятностей случайной величины X , принимающей n значений, задается формулой

$$P_n(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad (2.26)$$

где x_1, \dots, x_n – все возможные значения случайной величины.

Говорят, что *распределение вероятностей непрерывной случайной величины X равномерно на интервале (a, b)* , если ее плотность вероятности постоянна на этом интервале и равна нулю вне его:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } a < x \leq b, \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases} \quad (2.27)$$

В этом случае вероятность того, что значение величины принадлежит части (c, d) интервала (a, b) , равна отношению длин этих интервалов:

$$P(x \in (c, d)) = \frac{d-c}{b-a}. \quad (2.28)$$

2. Биномиальное распределение вероятностей случайной величины X , значениями которой являются возможные значения числа m появления события A при проведении n повторных независимых испытаний, задается формулой

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (2.29)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq. \quad (2.30)$$

3. Геометрическое распределение вероятностей случайной величины X , значениями которой являются возможные значения числа m проведенных испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли (причем опыт прекращается после первого же испытания, в котором рассматриваемое событие появилось), задается формулой

$$P_n(X = m) = pq^{m-1}, \quad (2.31)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$

Если случайная величина X имеет геометрическое распределение вероятностей, то

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2}. \quad (2.32)$$

4. Показательное (экспоненциальное) распределение Пуассона

задается формулой

$$P_n(X = m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}, \quad (2.33)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$

Если случайная величина X имеет пуассоновское распределение вероятностей, то

$$M(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda. \quad (2.34)$$

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \quad (2.35)$$

где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

Вероятность попадания в интервал (a, b) непрерывной случайной величины X , распределенной по показательному закону,

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Найдем математическое ожидание показательного распределения

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0); \quad f(x) = 0 \quad (x < 0).$$

Используем формулу

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Учитывая, что $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$, получим

$$M(X) = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Интегрируя по частям, положив $u = x$, $dv = e^{-\lambda x} dx$ и выполнив необходимые выкладки, окончательно получим $M(X) = 1/\lambda$.

Итак, математическое ожидание показательного распределения равно обратной величине параметра λ .

Найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения. Учитывая, что $f(x) = 0$ при $x < 0$,

$M(X) = 1/\lambda$, получим

$$D(X) = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - [1/\lambda]^2.$$

Интегрируя дважды по частям, найдем

$$\lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Следовательно, искомая дисперсия

$$D(X) = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2.$$

Т. е. дисперсия показательного распределения равна величине, обратной λ^2 .

Найдем среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1/\lambda^2} = 1/\lambda.$$

Т. е. среднее квадратическое отклонение показательного распределения равно величине, обратной λ .

Таким образом, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.

5. Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , плотность которого имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}. \quad (2.37)$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение X .

Заметим, что при $a = 0, \sigma = 1$ нормальную кривую $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

называют *нормированной*.

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) ,

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \quad (2.38)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$ – функция Лапласа.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ ,

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma). \quad (2.39)$$

В частности, при $a = 0$ справедливо равенство $P(|X| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma)$.

Если в (39) положить $\delta = \sigma; \delta = 2\sigma; \delta = 3\sigma$, то

$$P(|X - a| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0,6826,$$

$$P(|X - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0,9544,$$

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973.$$

Таким образом, практически достоверно, что распределенная по нормальному закону случайная величина X принимает свои значения в интервале $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$ (*правило трех сигм*).

Оценка отклонения теоретического распределения от нормального.

Эмпирическим называют распределение относительных частот. *Теоретическим* называют распределение вероятностей. При изучении распределений, отличных от нормального, возникает необходимость количественно оценить это различие. С этой целью вводят специальные характеристики, в частности асимметрию и эксцесс.

Асимметрией теоретического распределения называют отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического отклонения: $A_s = \mu_3 / \sigma^3$.

Эксцессом теоретического распределения называют характеристику, которая определяется равенством $E_k = (\mu^4 / \sigma^4) - 3$.

Асимметрия, эксцесс, мода и медиана нормального распределения соответственно равны:

$$A_s = 0, E_k = 0, M_0 = a, M_e = a, \text{ где } a = M(X).$$

Пример 1. Случайная величина X задана следующей таблицей распределения вероятностей:

X	2	5	8	9
p	0,1	0,4	0,3	0,2

Найдем $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Так как известен закон (таблица) распределения вероятностей, то по формуле (2.9)

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,2 = 6,4.$$

Для вычисления $D(X)$ найдем сначала $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,4 + 64 \cdot 0,3 + 81 \cdot 0,2 = 45,8.$$

По формуле (2.15)

$$D(X) = 45,8 - 6,4^2 = 4,84.$$

И, наконец, по формуле (2.19)

$$\sigma(X) = \sqrt{4,84} = 2,2.$$

Пример 2. Найдем математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение. Пусть X – число лотерейных билетов, на которые выпали выигрыши. Случайная величина X имеет биномиальное распределение, так как испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. Поэтому

$$M(X) = 100 \cdot 0,05 = 5, \quad D(X) = 100 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 4,75.$$

Пример 3. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по одной-цели. Вероятность попадания первого стрелка в цель равна 0,7, второго – 0,8 и третьего – 0,9. Найдите математическое ожидание числа попаданий в цель.

Решение. Пусть случайная величина X_1 – число попаданий в цель для первого стрелка, X_2 – число попаданий в цель для второго стрелка, X_3 – число попаданий в цель для третьего стрелка. Тогда случайная величина $Z = X_1 + X_2 + X_3$ – число попаданий в цель трех стрелков. Но математическое ожидание суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их математических ожиданий. Следовательно,
 $M(Z) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3)$.

Таблица распределения вероятностей случайной величины X_1

X	0	1
p	0,3	0,7

Следовательно, $M(X_1) = 0,7$. Аналогично $M(X_2) = 0,8$ и $M(X_3) = 0,9$.
Значит, $M(Z) = 0,7 + 0,8 + 0,9 = 2,4$.

Пример 4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3
p	0,4	0,6

Найти начальные моменты первого, второго и третьего порядков.

Решение. Найдем начальный момент первого порядка:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,6 = 2,2.$$

Напишем закон распределения величины X^2 :

X^2	1	9
p	0,4	0,6

Найдем начальный момент второго порядка:

$$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,6 = 5,8.$$

Напишем закон распределения величины X^3 :

X^3	1	27
p	0,4	0,6

Найдем начальный момент третьего порядка:

$$\nu_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0,4 + 27 \cdot 0,6 = 16,6.$$

Пример 5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6

Найти центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Решение. Центральный момент первого порядка равен нулю: $\mu_1 = 0$.

Для вычисления центральных моментов удобно пользоваться формулами, выражающими центральные моменты через начальные, поэтому предварительно найдем начальные моменты:

$$v_1 = M(X) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,6 = 3,1;$$

$$v_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 16 \cdot 0,6 = 10,9;$$

$$v_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,3 + 64 \cdot 0,6 = 40,9;$$

$$v_4 = M(X^4) = 1 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,3 + 256 \cdot 0,6 = 158,5.$$

Найдем центральные моменты:

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2 = 10,9 - 3,1^2 = 1,29;$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3 = 40,9 - 3 \cdot 3,1 \cdot 10,9 + 2 \cdot 3,1^3 = -0,888;$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4 = 158,5 - 4 \cdot 40,9 \cdot 3,1 + 6 \cdot 10,9 \cdot 3,1^2 - 3 \cdot 3,1^4 = 2,7777$$

Пример 6. Плотность вероятности случайной величины имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{2} \sin x & \text{при } 0 < x \leq \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Построить график функции $f(x)$ и на основе исследования графика показать, что вероятности попадания случайной величины в $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$ равны между собой, а математическое ожидание случайной величины равно $\frac{\pi}{2}$

Решение. График функции $y = f(x)$ изображен на рисунке 16.

Так как этот график симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, то

1) $M(X) = \frac{\pi}{2}$;

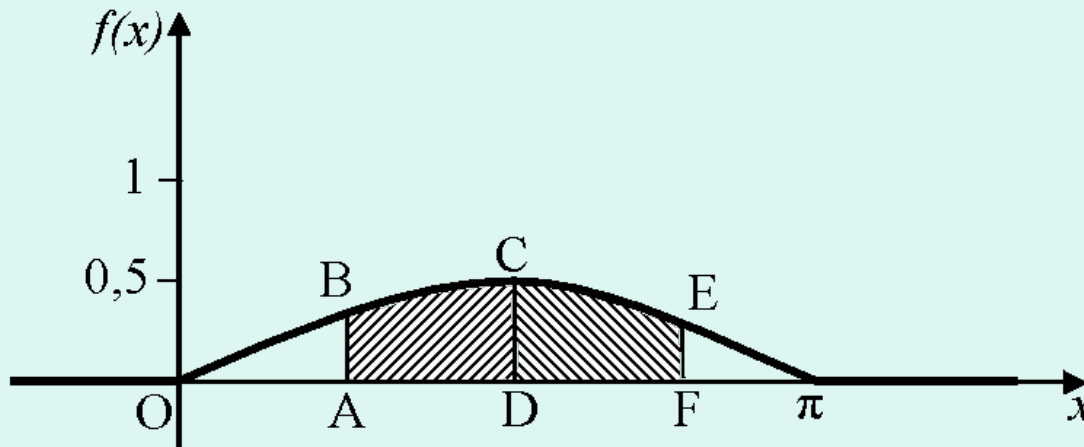


Рис. 16

2) площади криволинейных трапеций $ABCD$ и $DCEF$ равны между собой. А площадь криволинейной трапеции равна вероятности попадания случайной величины в интервал,

являющийся основанием этой трапеции. Следовательно,

$$P\left(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}\right) = P\left(\frac{\pi}{2} < X < \frac{3\pi}{4}\right).$$

Пример 7. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$ в интервале $(10; 12)$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

Решение. Найдем математическое ожидание, используя формулу (2.11):

$$M(X) = \int_{10}^{12} x \left(\frac{1}{2}x - 5 \right) dx = 11 \frac{1}{3}.$$

Дисперсию случайной величины найдем по формуле (2.18):

$$D(X) = \int_{10}^{12} x^2 \left(\frac{1}{2}x - 5 \right) dx - (M(X))^2 = \frac{1}{3}.$$

Зная дисперсию, найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,526.$$

Пример 8. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2\cos 2x$ в интервале $(0, \pi/4)$ вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти:
а) моду; б) медиану X .

Решение. а) Легко убедиться, что функция $f(x) = 2\cos 2x$ в открытом интервале $(0, \pi/4)$ не имеет максимума, поэтому X моду не имеет.

б) Найдем медиану $M_e(X) = m_e$, исходя из определения медианы:

$P(X < m_e) = P(X > m_e)$, или, что то же, $P(X < m_e) = 1/2$. Учитывая, что по условию возможные значения X положительны, перепишем это равенство так:

$$P(0 < X < m_e) = 1/2 \text{ или } 2 \int_0^{m_e} \cos 2x dx = \sin 2m_e = 1/2.$$

Отсюда $2m_e = \arcsin 1/2 = \pi/6$. Следовательно, искомая медиана $m_e = \pi/12$.

Пример 9. Случайная величина X в интервале $(2, 4)$ задана плотностью распределения $f(x) = -(3/4)x^2 + (9/2)x - 6$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду, математическое ожидание и медиану величины X .

Решение. Представим плотность распределения в виде $f(x) = -(3/4)(x-3)^2 + 3/4$. Отсюда видно, что при $x=3$ плотность распределения достигает максимума; следовательно, $M_0(X) = 3$. (Разумеется, можно было найти максимум методами дифференциального исчисления.)

Кривая распределения симметрична относительно прямой $x=3$, поэтому $M(X) = 3$ и $M_e(X) = 3$.

Пример 10. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 0,5x$ в интервале $(0, 2)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Решение. По формуле

$$\nu_k = \int_0^2 x^k f(x) dx$$

найдем начальные моменты:

$$\nu_1 = \int_0^2 x(0,5x) dx = \frac{4}{3}; \quad \nu_2 = \int_0^2 x^2(0,5x) dx = 2;$$

$$\nu_3 = \int_0^2 x^3(0,5x) dx = 3,2; \quad \nu_4 = \int_0^2 x^4(0,5x) dx = \frac{16}{3}.$$

Найдем центральные моменты. Центральный момент первого порядка любой случайной величины $\mu_1 = 0$. Воспользуемся формулами, выражающими центральные моменты через начальные:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2; \quad \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3; \quad \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

Подставив в эти формулы ранее найденные начальные моменты, получим: $\mu_2 = 2/9$, $\mu_3 = -8/135$, $\mu_4 = 16/135$.

Пример 11. Поезда метро идут с интервалом в 2 минуты. Пассажир появляется на перроне в произвольный момент времени. Время ожидания поезда есть случайная величина X , имеющая равномерное распределение вероятностей. Найдем плотность вероятности, интегральную функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Из условия задачи $a = 0, b = 2$. Тогда, применяя формулу (2.27), получим:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ 0, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Формула (5) позволяет найти интегральную функцию распределения.

$$\text{При } x \leq 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

$$\text{При } 0 < x \leq 2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}x.$$

$$\text{При } x > 2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^2 \frac{1}{2} dx + \int_2^x 0 dx = 1.$$

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Так как график функции $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $x = 1$, то $M(X) = 1$. Дисперсию случайной величины X найдем по формуле (2.18):

$$D(X) = \int_0^2 x^2 \frac{1}{2} dx - (M(X))^2 = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 - 1 = \frac{1}{3}$$

Пример 12. Событие, состоящее из мгновенного сигнала, должно произойти между одним и пятью часами. Время ожидания сигнала есть случайная величина X , имеющая равномерное распределение. Какова вероятность того, что сигнал будет зафиксирован в течение 20 мин после двух часов?

Решение. Случайная величина X имеет равномерное распределение в интервале $(1; 5)$. Найдем вероятность того, что при испытании ее возможное значение попадет в интервал $\left(2; 2\frac{1}{3}\right)$. По формуле (2.28)

$$P\left(2 < X < 2\frac{1}{3}\right) = \frac{1/3}{4} \approx 0,083.$$

Пример 13. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(12, 14)$.

Решение. Воспользуемся формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Подставив $\alpha = 12$, $\beta = 14$, $a = 10$ и $\sigma = 2$, получим $P(12 < X < 14) = \Phi(2) - \Phi(1)$. По таблице приложения 2 находим: $\Phi(2) = 0,4772$, $\Phi(1) = 0,3413$. Искомая вероятность $P(12 < X < 14) = 0,1359$.

Пример 14. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,4$ мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

Решение. Так как X – отклонение (диаметра шарика от проектного размера), то $M(X) = a = 0$.

Воспользуемся формулой $P(|X| < \delta) = 2\Phi(\delta / \sigma)$. Подставив $\delta = 0,7$, $\sigma = 0,4$, получим

$$P(|X - a| < 0,7) = 2\Phi(0,7/0,4) = 2\Phi(1,75) = 2 \cdot 0,4599 = 0,92.$$

Таким образом, вероятность отклонения, меньшего 0,7 мм, равна 0,92. Отсюда следует, что примерно 92 шарика из 100 окажутся годными.

Пример 15. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания X в интервал $(10, 20)$ равна $0,3$. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(0, 10)$?

Решение. Так как нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = a = 10$, то площади, ограниченные сверху нормальной кривой и снизу – интервалами $(0, 10)$ и $(10, 20)$, равны между собой. Поскольку эти площади численно равны вероятностям попадания X в соответствующий интервал, то
 $P(0 < X < 10) = P(10 < X < 20) = 0,3$.

Пример 16. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 5$.

Решение. Подставив $\lambda = 5$ в соотношения (2.35) и (2.36), получим

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 5e^{-5x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-5x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Пример 17. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$; при $x < 0$ $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал $(0,13; 0,7)$.

Решение. Используем формулу

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Учитывая, что, по условию, $a = 0,13$, $b = 0,7$, $\lambda = 3$, получим

$$P(0,13 < X < 0,7) = e^{-3 \cdot 0,13} - e^{-3 \cdot 0,7} = 0,677 - 0,122 = 0,555.$$

Пример 18. Найти: а) дисперсию; б) среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного плотностью вероятности: $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$; $f(x) = 0$ при $x < 0$.

Решение. а) Используем формулу

$$D(X) = 1/\lambda^2 = 1/9.$$

б) Найдем среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1/\lambda^2} = 1/\lambda = 1/3.$$

2.3. Законы больших чисел и предельные теоремы теории вероятностей.

Пусть имеется n попарно независимых СВ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, дисперсии которых ограничены одной и той же постоянной C . Обозначим $\bar{\xi}_n = \frac{1}{n} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)$.

Сформулируем теорему Чебышева, которую называют законом больших чисел.

Теорема: Если для независимых СВ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ дисперсии $D(\xi_i) \leq C$,

$i = \overline{1, n}$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\bar{\xi}_n - M(\bar{\xi}_n)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Сущность теоремы Чебышева заключается в том, что хотя каждая из независимых СВ $\xi_i, i = \overline{1, n}$, может принять значение, далекое от $M(\xi_i)$, среднее арифметическое $\bar{\xi}_n$ при достаточно большом n с большой вероятностью будет весьма близко к $M(\bar{\xi}_n)$. Практическое значение этого факта заключается в том, что можно принять в качестве искомого значения некоторой измеряемой величины среднее арифметическое результатов нескольких измерений.

Простейшей формой закона больших чисел является утверждение в теореме Бернулли.

Теорема: Пусть m — число наступлений события A в n независимых испытаниях, $p = p(A)$ — вероятность наступления A в каждом из

испытаний. Тогда для любого $\varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$

Большое значение для практики имеет также теорема Ляпунова, которую называют центральной предельной теоремой. Приведем ее в упрощенном виде.

Теорема: Если независимые СВ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеют один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 , то при неограниченном увеличении n закон распределения нормированной

СВ
$$\bar{\xi}_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{\sigma\sqrt{n}}$$

$(M(\bar{\xi}_n) = 0, D(\bar{\xi}_n) = 1)$ как угодно мало отличается от нормального:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{\xi}_n < x) = \Phi(x).$$

Общая теорема Ляпунова обобщает данный вывод на случай различных распределений независимых СВ $\xi_i, i = 1, n$, если роль

каждой из них в образовании нормированной СВ $\bar{\xi}_n$ мала.