Решение систем линейных уравнений. Правило Крамера. Матричный метод решения системы линейных уравнений. Метод Гаусса.

Рассмотрим систему уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = в_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = в_3 \end{cases}$$

Из данной системы надо выписать цифры и вычислить определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} в_1 & a_{12} & a_{13} \\ в_2 & a_{22} & a_{23} \\ в_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 & a_{13} \\ a_{21} & в_2 & a_{23} \\ a_{31} & в_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & в_2 \\ a_{31} & a_{32} & в_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Например

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\cancel{4} + 8 + \cancel{4} + \cancel{8} - \cancel{8} - 2 = 6 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \cancel{4} - \cancel{4} - 8 - 4 + 16 + 2 = 6$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -16 - 8 - 8 + 32 + 8 + 4 = 12$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \cancel{2} - 16 - \cancel{2} - \cancel{4} + \cancel{4} + 4 = -12$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1; \quad x_2 = \frac{12}{6} = 2; \quad x_3 = \frac{-12}{6} = -2$$

$$(1; 2; -2)$$

Рассмотрим систему уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = в_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = в_3 \end{cases}$$

Матричный метод решения систем линейных уравнений (СЛУ)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ в_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ в_3 \end{pmatrix}}$$

Например

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \cancel{-4} + 8 + \cancel{4} + 8 - 8 - 2 = 6$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (-4-2) = -6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = + (2+4) = +6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-2) = -2$$

Продолжение примера

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4-8 = -4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1-4) = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+2 = 4$$

$$A_{32} = (-1)^{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6+8-8 \\ 0+16-4 \\ -6-12+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

Выписав все цифры из СЛУ составляем расширенную матрицу и приводим данную матрицу к ступенчатому виду (применяя свойства матриц).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) (-2)\ (-4) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) (-1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ -3x_2 - 2x_3 = -2 \\ -2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_3 = 4 : (-2)$$

$$\boxed{x_3 = -2}$$

$$-3x_2 - 2\cdot(-2) = -2$$

$$-3x_2 + 4 = -2$$

$$-3x_2 = -2 - 4$$

$$-3x_2 = -6$$

$$x_2 = -6 : (-3)$$

$$\boxed{x_2 = 2}$$

$$x_1 + 2 + 2\cdot(-2) = -1$$

$$x_1 + 2 - 4 = -1$$

$$\boxed{x_1 = 1}$$

$$(1; 2; -2)$$