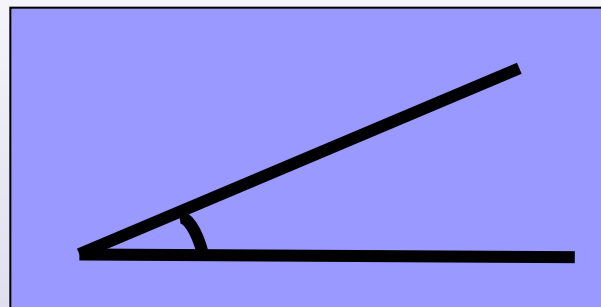


# ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ



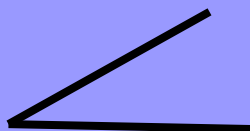
# 1. Что называют углом?

*Вспомним!*

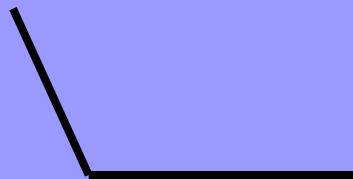


## 2. Классифицируйте углы по градусной мере.

1) острые



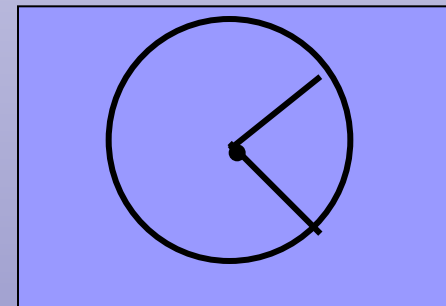
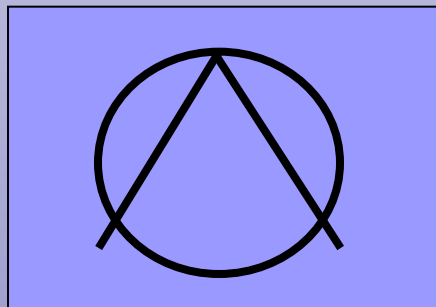
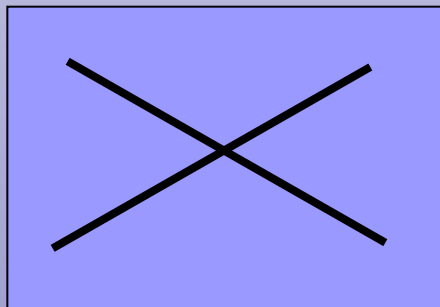
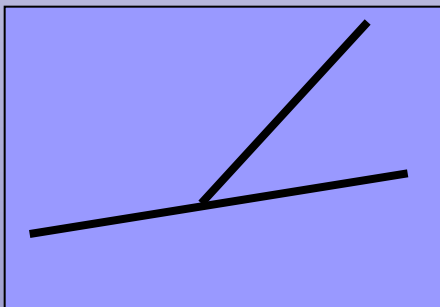
2) тупые



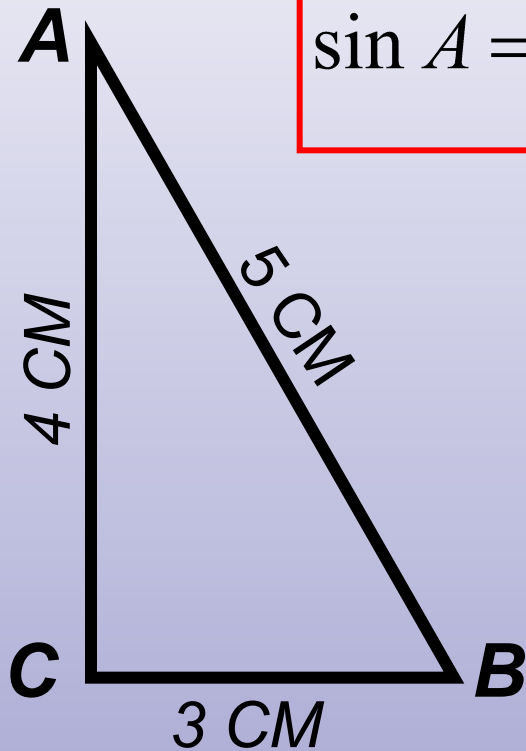
3) прямые



## 3. Как называются углы, на рисунках?



4. Что называют синусом, косинусом, тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?



$$\sin A = \frac{CB}{AB}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{CB}{AC}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

5. Найдите:

$$\cos B = 0,6$$

$$\sin B = 0,8$$

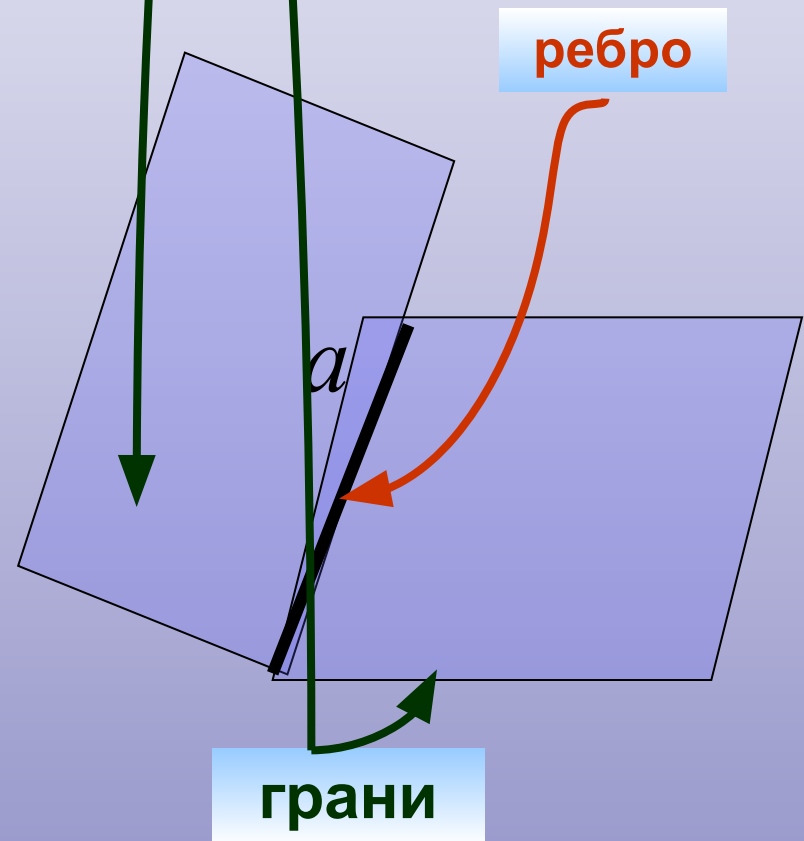
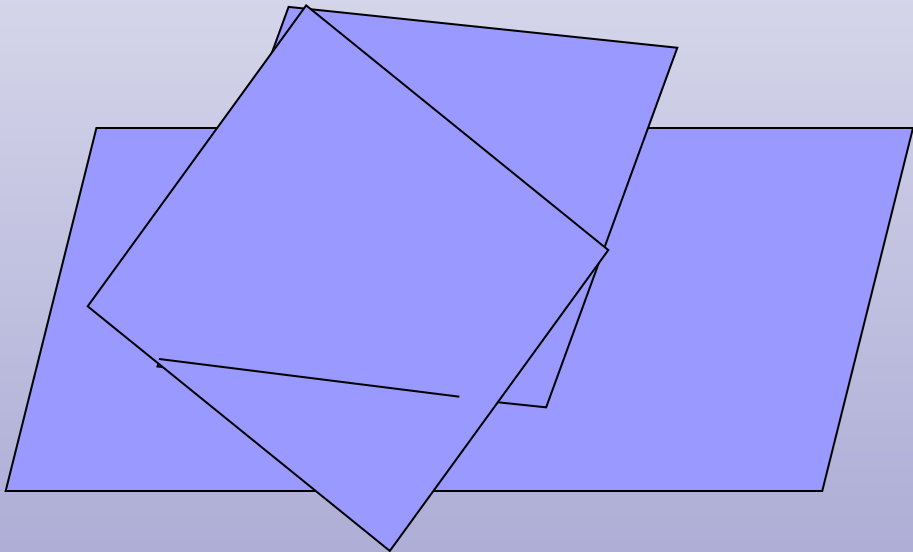
$$\operatorname{tg} B = 4/3$$

# Определение двугранного угла

**Двугранным углом** называется фигура, образованная двумя не принадлежащим одной плоскости полуплоскостями, имеющими общую границу – прямую  $a$ .

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его **гранями**.

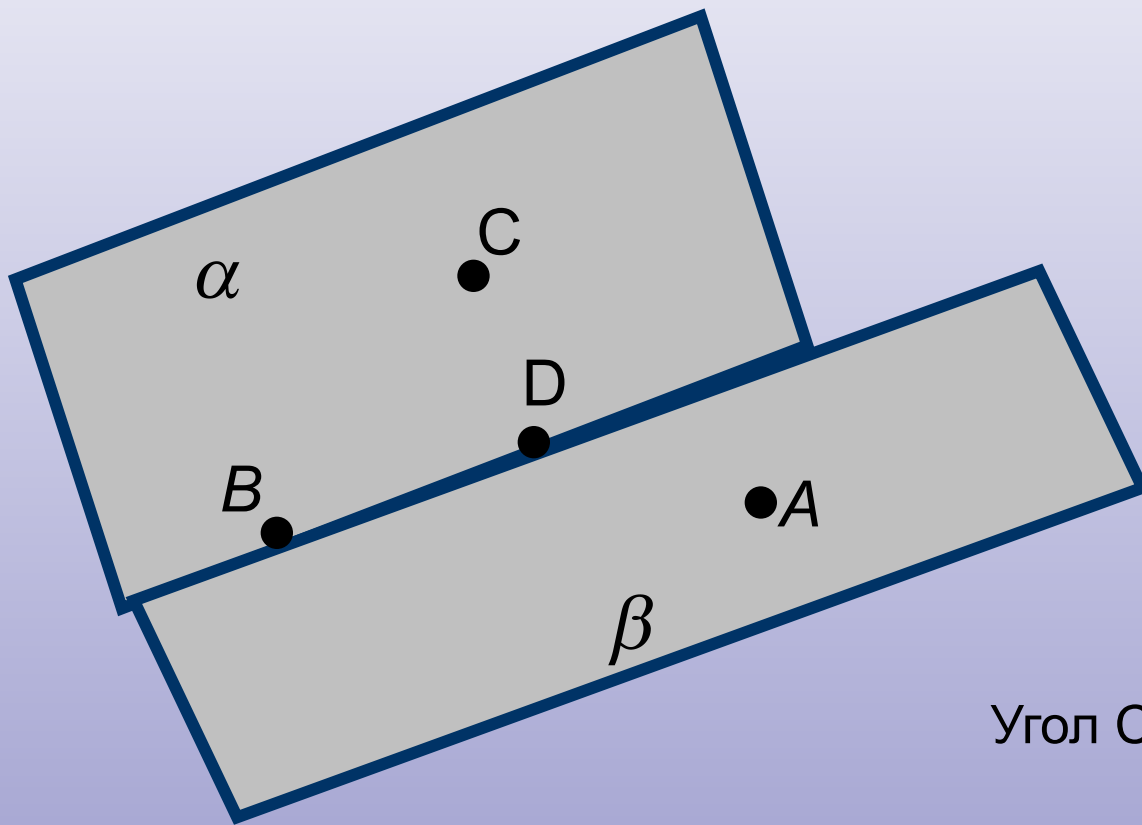
Общая граница этих полуплоскостей – **ребром** двугранного угла.



*В обыденной жизни, форму двугранного угла имеют*



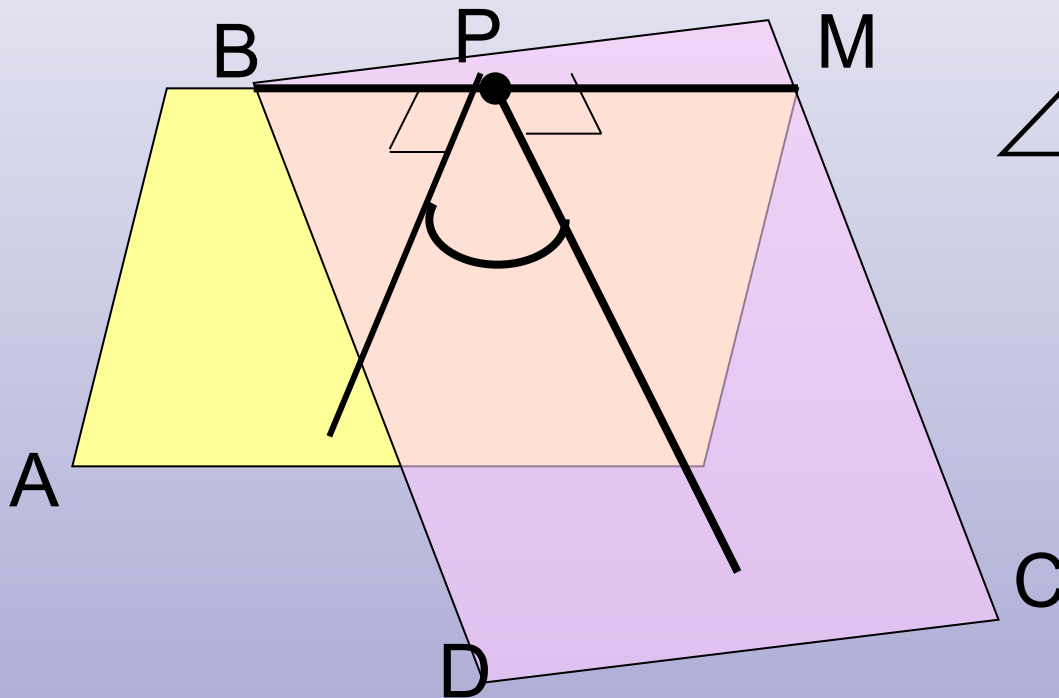
*Обозначение двугранного угла.*



Угол  $CBDA$

## Измерение двугранных углов. Линейный угол.

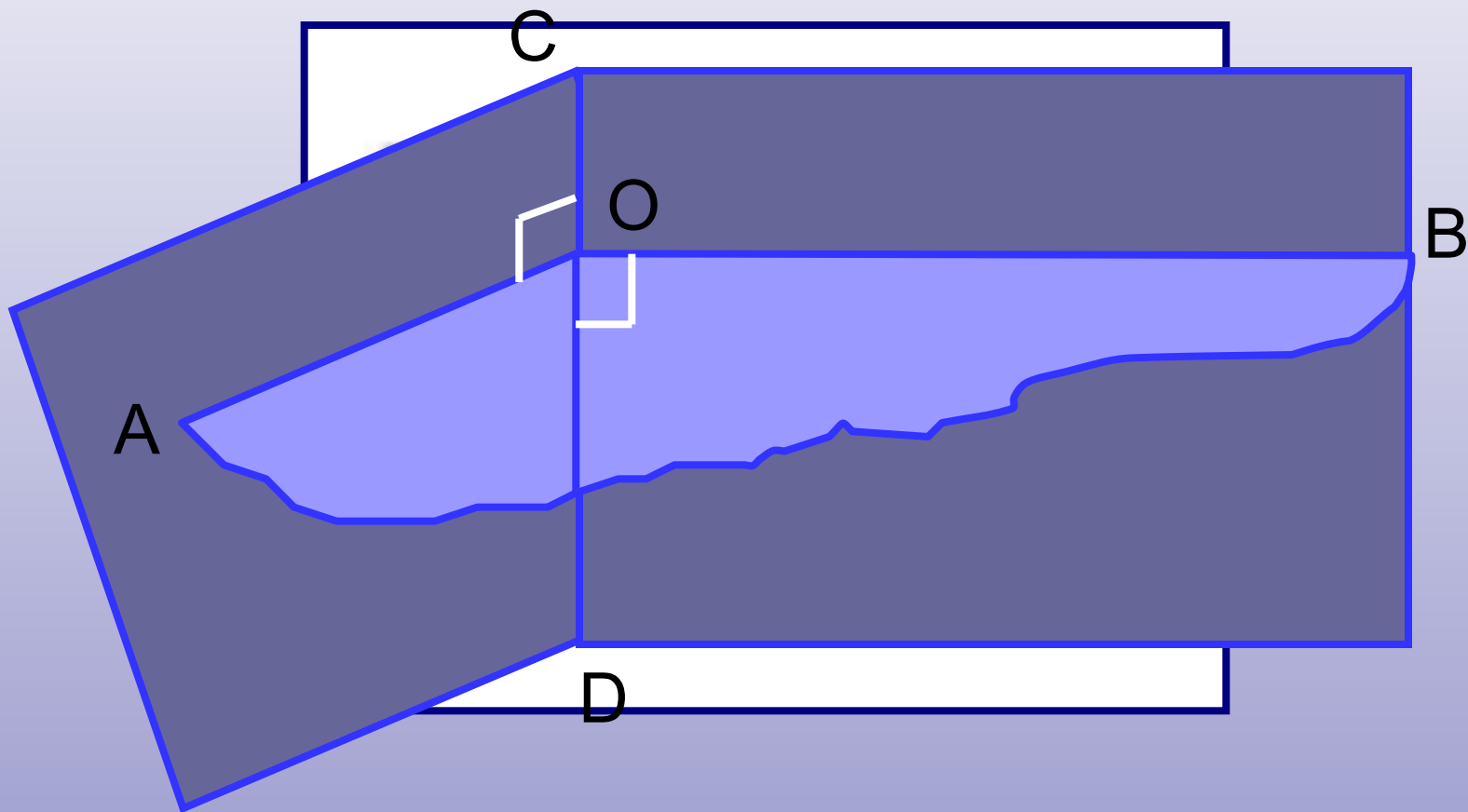
Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.



$$\angle ABMC = \angle P$$

Угол P – линейный угол двугранного угла ABMC

**Линейным углом двугранного угла**  
называется сечение двугранного угла  
плоскостью, перпендикулярной ребру.





## *Способ нахождения (построения) линейного угла.*

*1. Найти (увидеть) ребро и грани двугранного угла*

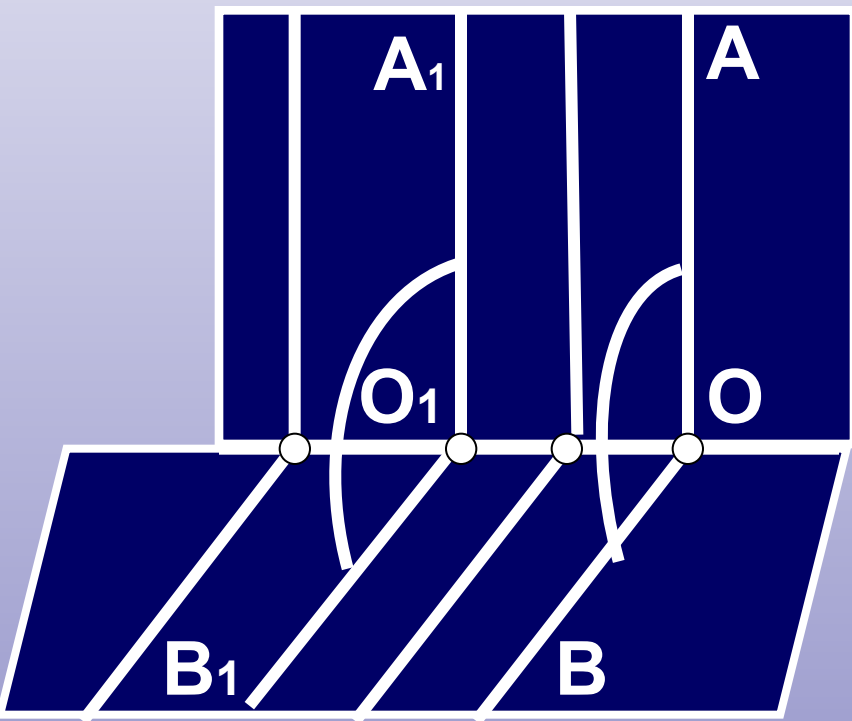
*2. В гранях найти направления (прямые) перпендикулярные ребру*

*3. (при необходимости) заменить выбранные направления параллельными им лучами с общим началом на ребре двугранного угла*

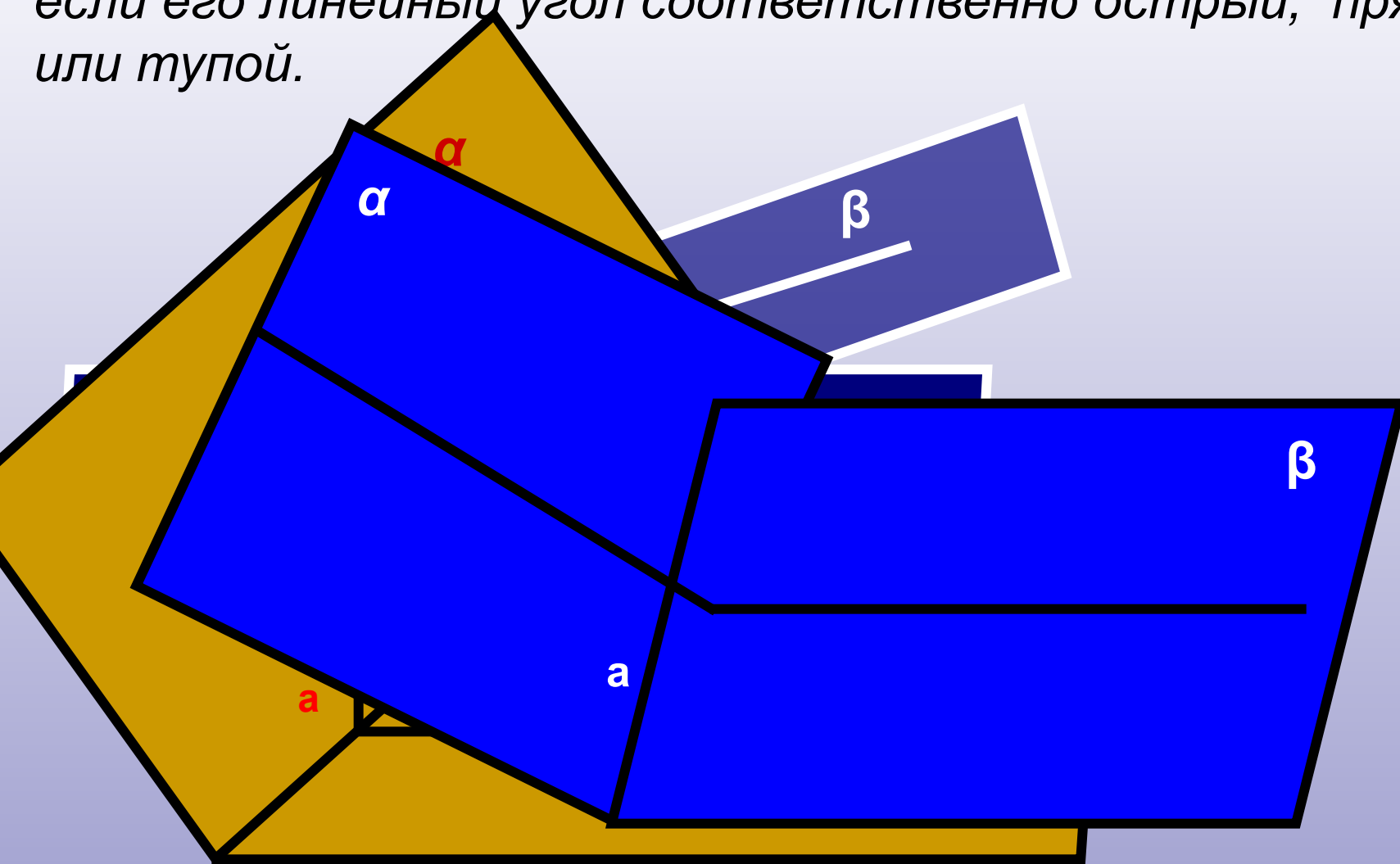
При изображении сохраняется **параллельность и отношение длин параллельных отрезков**



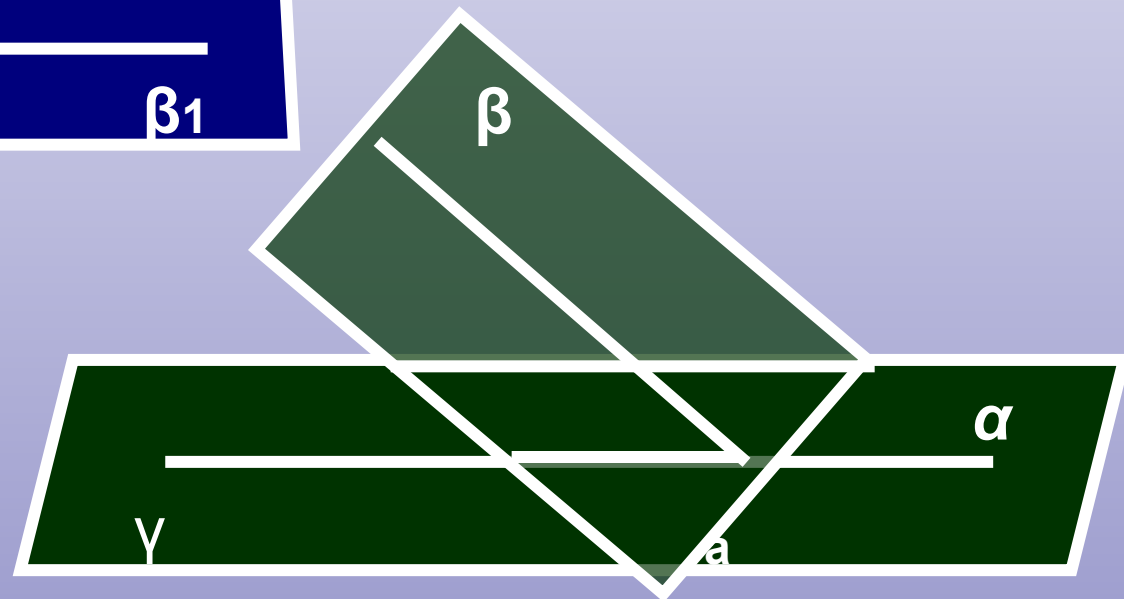
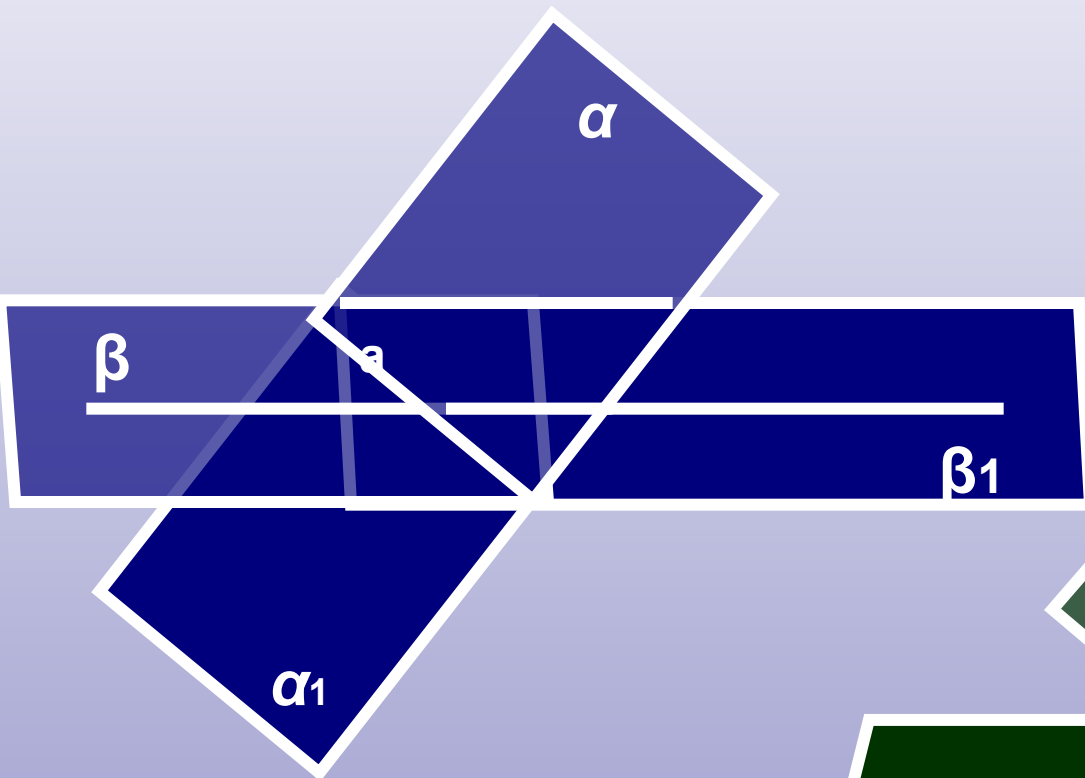
***Величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.***



*Двугранный угол является острым , прямым или тупым, если его линейный угол соответственно острый, прямой или тупой.*



Аналогично тому , как и на плоскости , в пространстве определяются смежные и вертикальные двугранные углы.

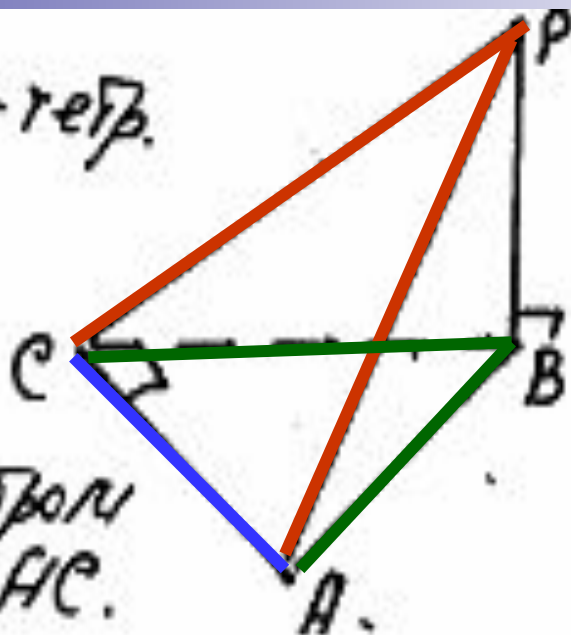


Задача 1 Дано:  $РАВС$ -тетр.

$$\angle ACB = 90^\circ$$

$$PB \perp ABC.$$

Указать: лин.  $\angle$  для  
двугранного ребром  
 $AC$ .



Решение

Ребро  $AC$  ....., грани  $ACP$  .. и  $ACB$

1. В грани  $ACB$  прямая  $CB$  перпендикулярна ребру  
 $CA$  ( по условию)

2. В грани  $ACP$  .. прямая  $CP$  перпендикулярна ребру  $CA$   
( по теореме о трех перпендикулярах)

Значит, угол  $PCB$  - линейный для двугранного .....  
угла с ребром  $AC$

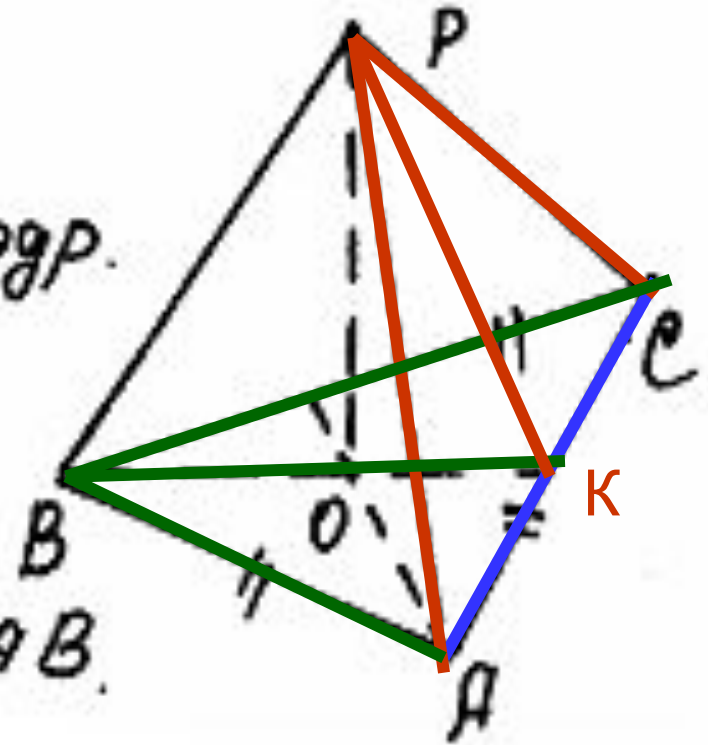
Задача 2. Дано  $PAVC$ -тетраэдр.

$\triangle ABC$  - правильный

$O$  - центр  $\triangle ABC$ .

$PO \perp ABC$ .

Указать: лин.  $\angle$  для  $\angle PCAV$ .



Решение

Ребро  $AC$ , грани  $ACP$  и  $ACB$

1. В грани  $ACB$  прямая  $BO$  перпендикулярна ребру  $CA$   
(по свойству равностороннего треугольника)

2. В грани  $ACP$  прямая  $PK$  перпендикулярна ребру  $CA$   
(по теореме о трех перпендикулярах)

Значит, Угол  $PKV$  - линейный для двугранного угла с  $PCAV$

## Задача №3

**Дано:**

КМРТ – тетраэдр

$\angle TMK = 90^\circ$

$MK = MT$

$RT \perp MKT$

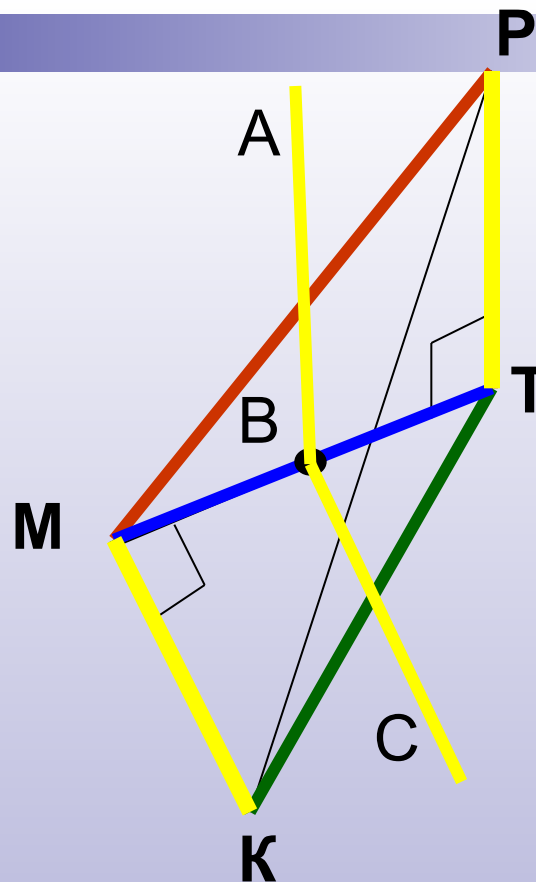
**Указать:**

линейные углы для  
двугранных углов

а).  $\angle PTMK$ ,

б).  $\angle PMKT$ ,

в).  $\angle PКТМ$



А) Двугранный угол **РТМК**:

(1) ребро **MT**, грани **MTR** и **MTK**

(2) В грани **MTR** прямая **TR** перпендикулярна ребру **MT**  
( по определению прямой, перпендикулярной плоскости)

В грани **MTK** прямая **MK** перпендикулярна ребру **MT**  
( по условию)

### Задача №3

**Дано:**

КМРТ – тетраэдр

$\angle TMK = 90^\circ$

$MK = MT$

$PT \perp MKT$

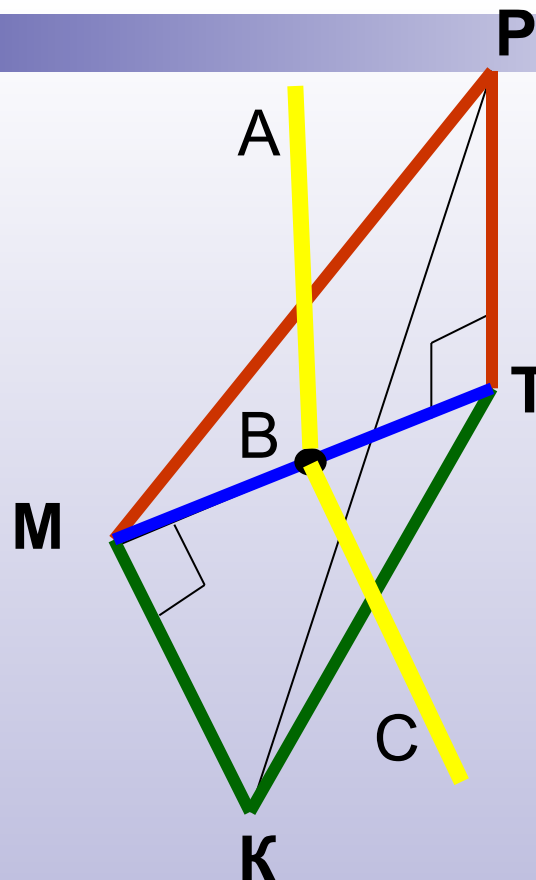
**Указать:**

линейные углы для  
двугранных углов

а).  $PTMK$ ,

б).  $PMKT$ ,

в).  $PKTM$



AB параллельна PT (по построению), а так как PT перпендикулярна ребру MT (по доказанному), то AB перпендикулярна ребру MT (по лемме о связи параллельности и перпендикулярности) Аналогично BC перпендикулярна ребру MT. Значит, угол ABC – искомый



### Задача №3

**Дано:**

КМРТ – тетраэдр

$\angle TMK = 90^\circ$

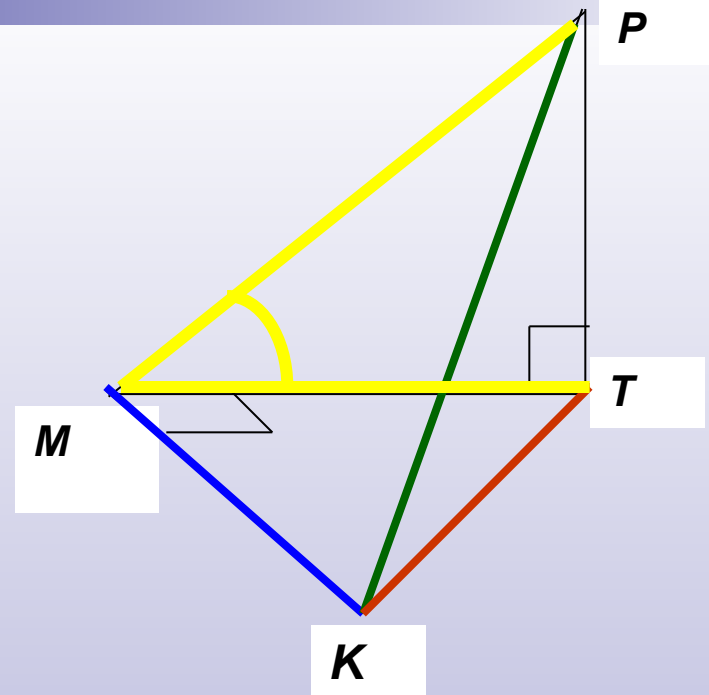
$MK = MT$

$PT \perp MKT$

**Указать:**

линейные углы для  
двугранных углов

- а). РТМК,
- б). РМКТ,
- в). РКТМ



б) Двугранный угол **РМКТ**:

(1) ребро **МК**, грани **МКР** и **МКТ**

(2) В грани **МТК** прямая **МТ** перпендикулярна ребру **МК**  
( по условию)

В грани **МКР** прямая **МР** перпендикулярна ребру **МК**  
( по теореме о трех перпендикулярах)

**Ответ.** Угол **РМТ** - линейный для двугранного угла с РМКТ

### Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$\angle ТМК = 90^\circ$

$МК = МТ$

$РТ \perp МКТ$

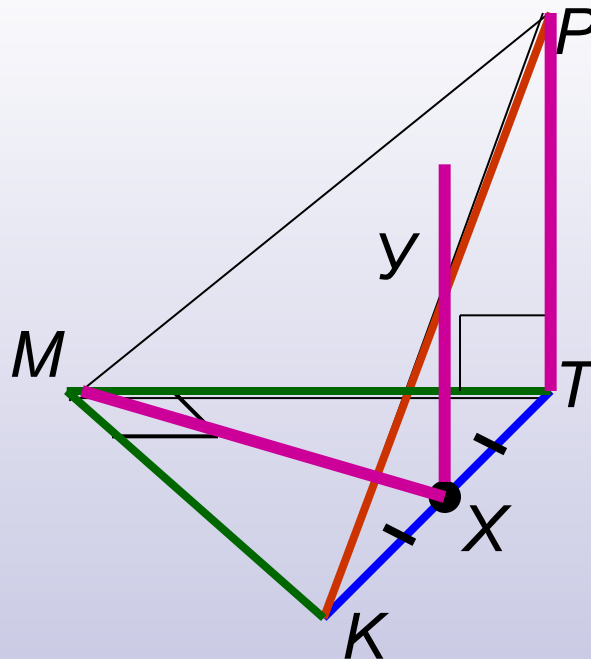
Указать:

линейные углы для  
двугранных углов

а).  $РТМК$ ,

б).  $РМКТ$ ,

в).  $РКТМ$



в) Двугранный угол  $РТКМ$ :

(1) ребро  $ТК$ , грани  $ТКМ$  и  $ТКР$

(2) В грани  $МТК$  прямая  $МХ$ , где  $Х$  – середина  $КТ$ , перпендикулярна ребру  $КТ$  ( по свойству равнобедренного треугольника)

В грани  $КРТ$  прямая  $РТ$  перпендикулярна ребру  $КТ$   
( по определению прямой перпендикулярной плоскости)

## Задача №3

**Дано:**

КМРТ – тетраэдр

$\angle TMK = 90^\circ$

$MK = MT$

$PT \perp MKT$

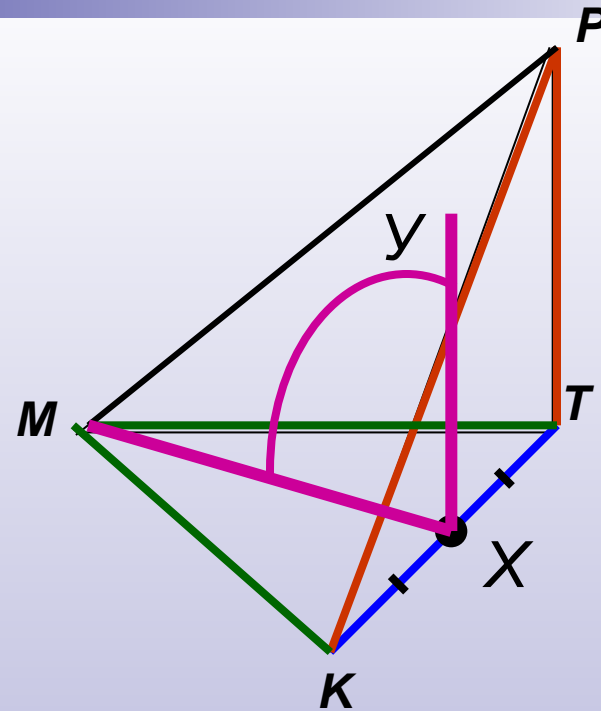
**Указать:**

линейные углы для  
двугранных углов

а). РТМК,

б). РМКТ,

в). РКТМ

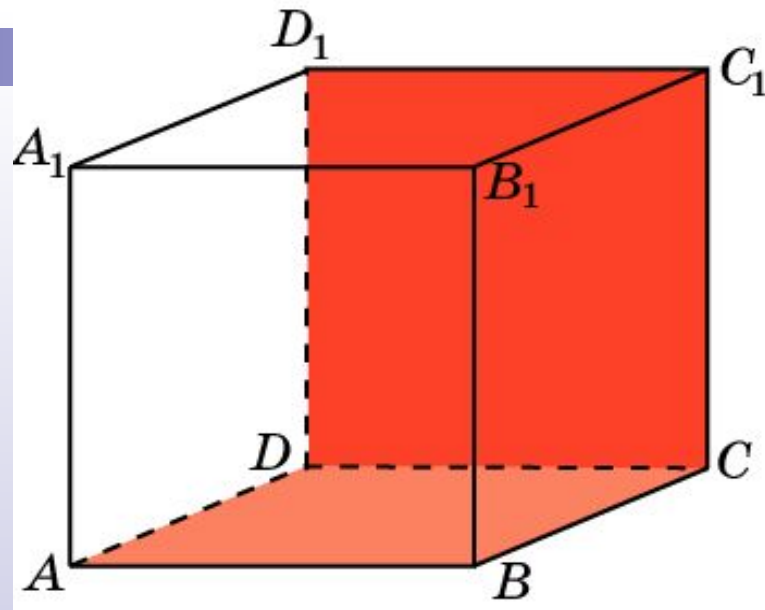


в) Двугранный угол **РТКМ**:

3) Построим прямую **УХ** параллельно прямой **РТ**, она будет лежать в плоскости **РКТ** (почему?) получим, что прямая **ХУ** перпендикулярно ребру **КТ**  
(по лемме о связи параллельности и перпендикулярности)

Значит, искомый **угол УХМ**

**ПОДУМАЙ!**



1. В кубе  $A...D1$  найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $CDD1$ .

Ответ:  $90^\circ$

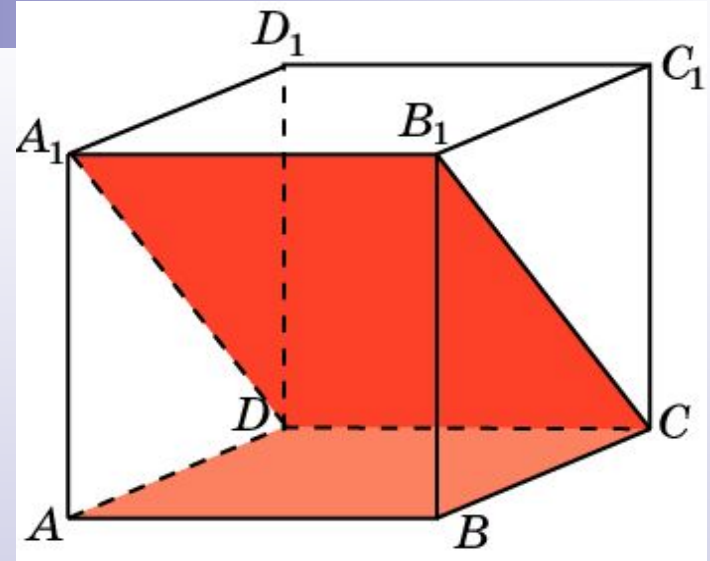
**ПРАВИЛЬНО!**



**ПОДУМАЙ!**



2. В кубе  $A...D_1$  найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $CD_1A_1$ .



**ПРАВИЛЬНО!**

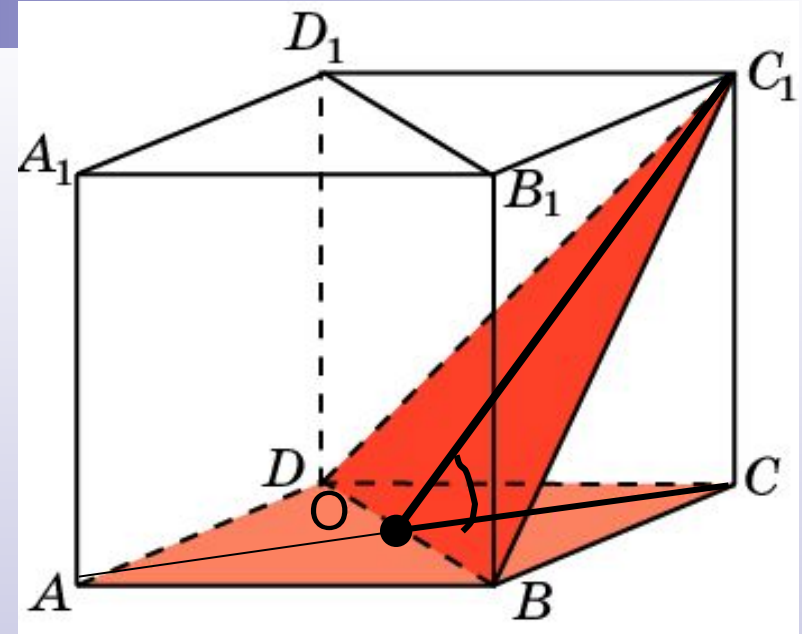
Ответ:  $45^\circ$



ПОДУМАЙ!

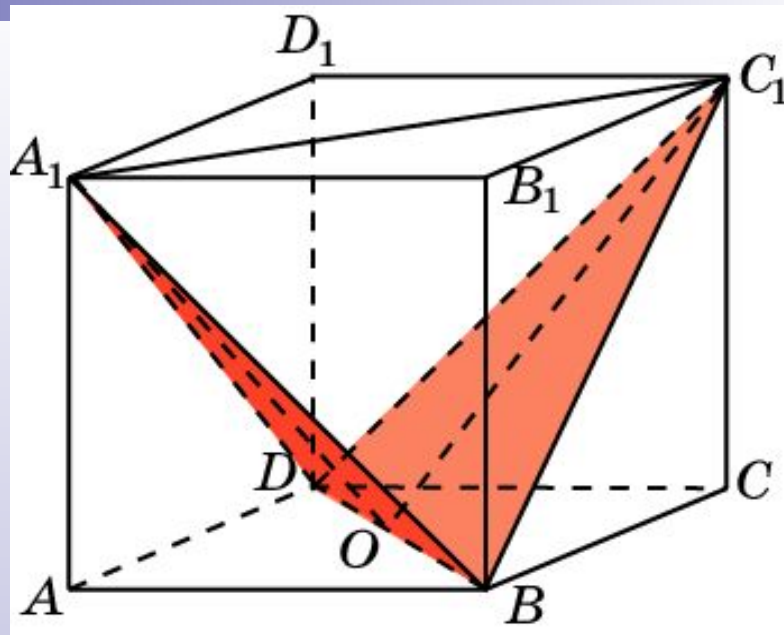


3. В кубе  $A...D_1$  найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BC_1D$ .



Ответ:  $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}$ .

4. В кубе  $A...D_1$  найдите угол между плоскостями  $BC_1D$  и  $BA_1D$ .

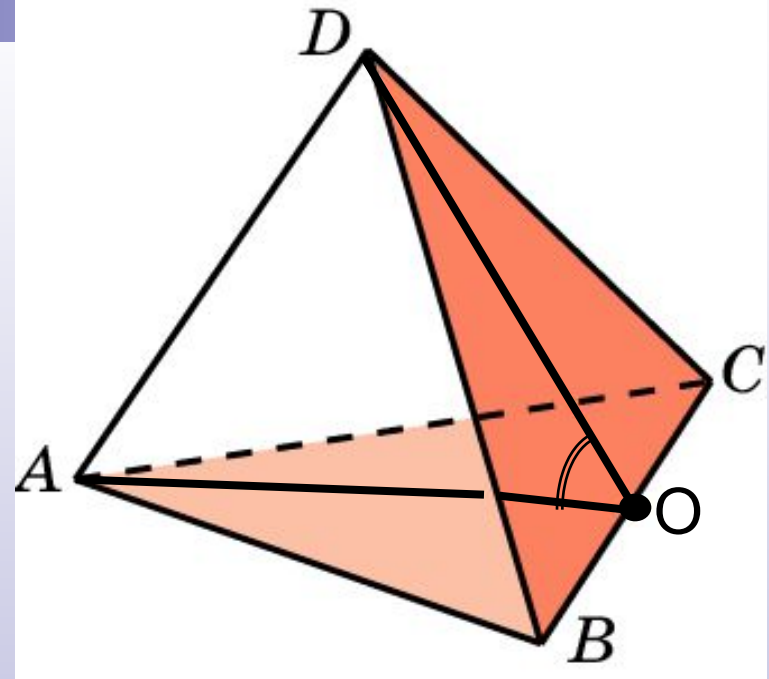


Ответ:  $\cos \varphi = \frac{1}{3}$ .

**ПОДУМАЙ!**



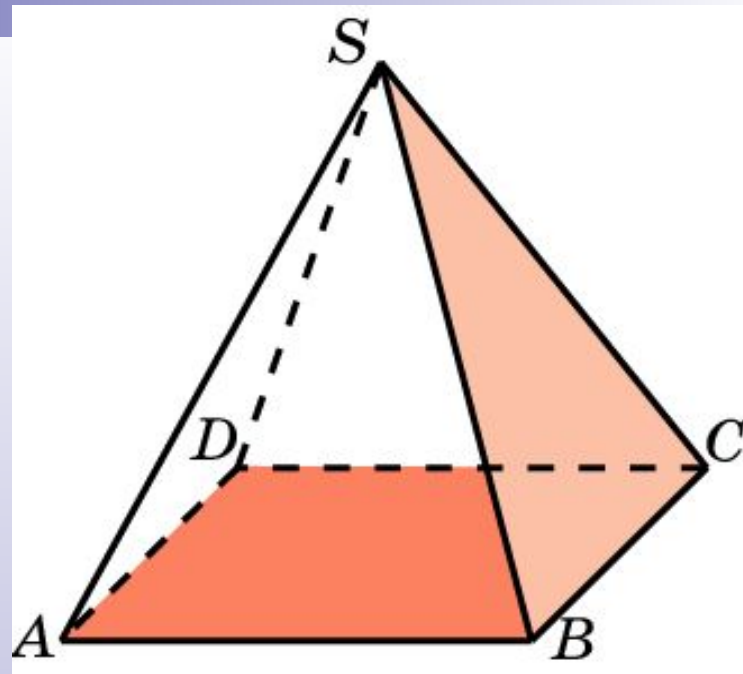
*В тетраэдре  $ABCD$ ,  
ребра которого равны 1,  
найдите угол между  
плоскостями  $ABC$  и  $BCD$ .*



Ответ:  $\cos \varphi = \frac{1}{3}$ .



ПОДУМАЙ



В правильной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями  $SBC$  и  $ABC$ .