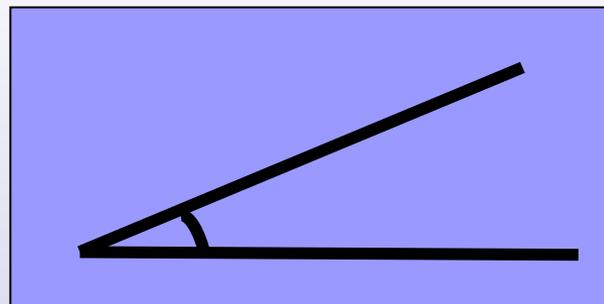


ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ



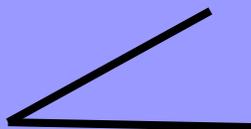
1. Что называют углом?

Вспомним!



2. Классифицируйте углы по градусной мере.

1) острые



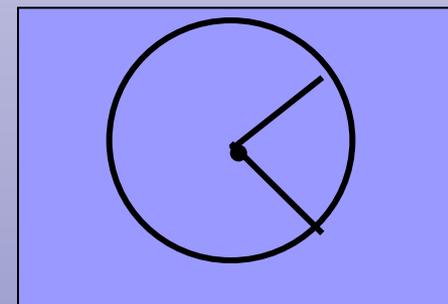
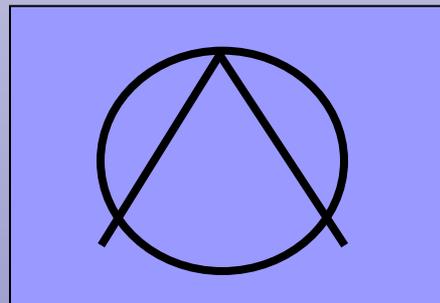
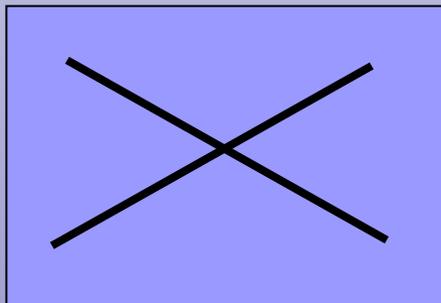
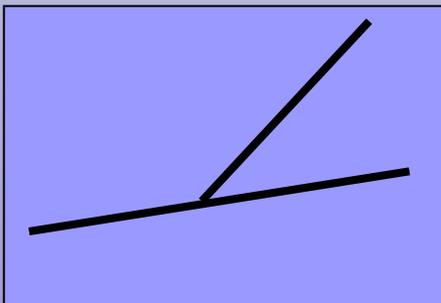
2) тупые



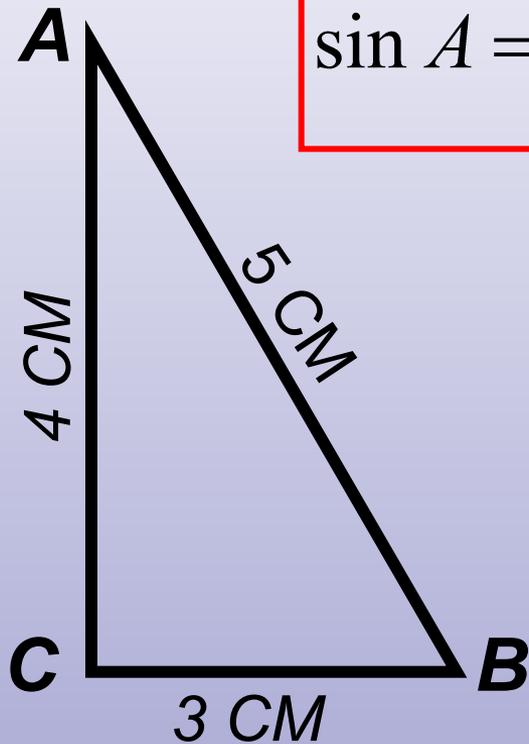
3) прямые



3. Как называются углы, на рисунках?



4. Что называют синусом, косинусом, тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?



$$\sin A = \frac{CB}{AB}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{CB}{AC}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

5. Найдите:

$$\cos B = 0,6$$

$$\sin B = 0,8$$

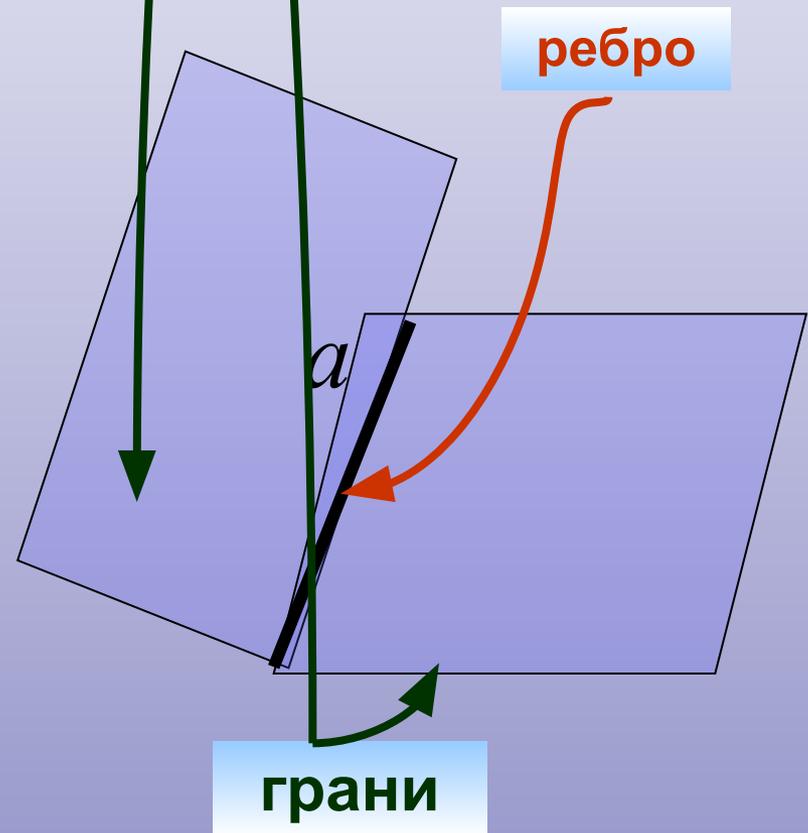
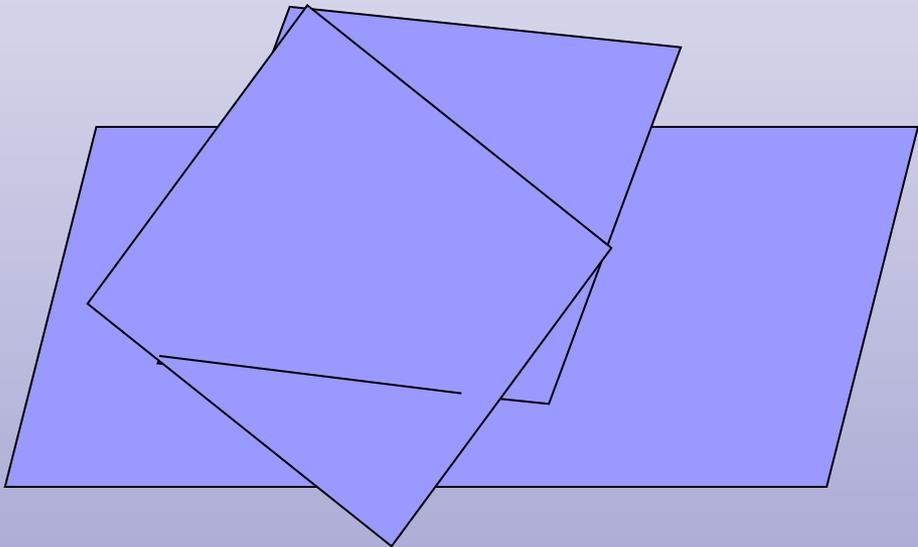
$$\operatorname{tg} B = 4/3$$

Определение двугранного угла

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя не принадлежащим одной плоскости полуплоскостями, имеющими общую границу – прямую a .

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его **гранями**.

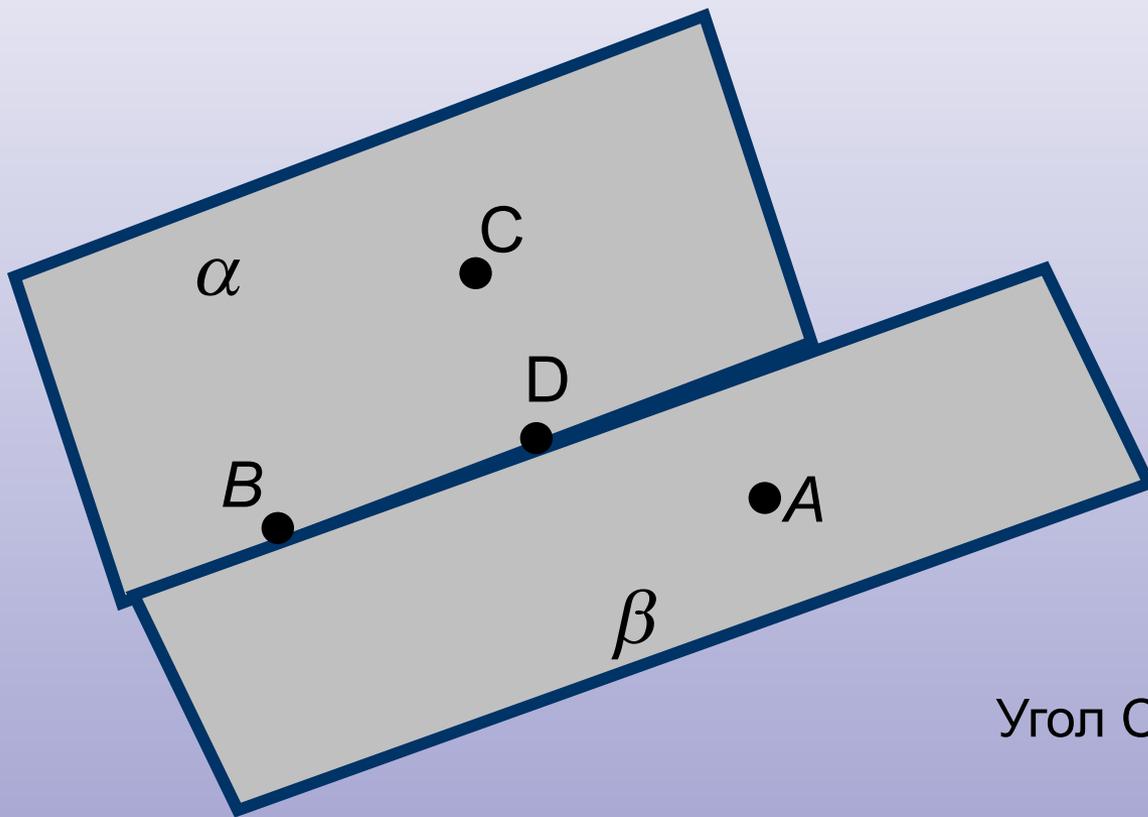
Общая граница этих полуплоскостей – **ребром** двугранного угла.



В обыденной жизни, форму двугранного угла имеют



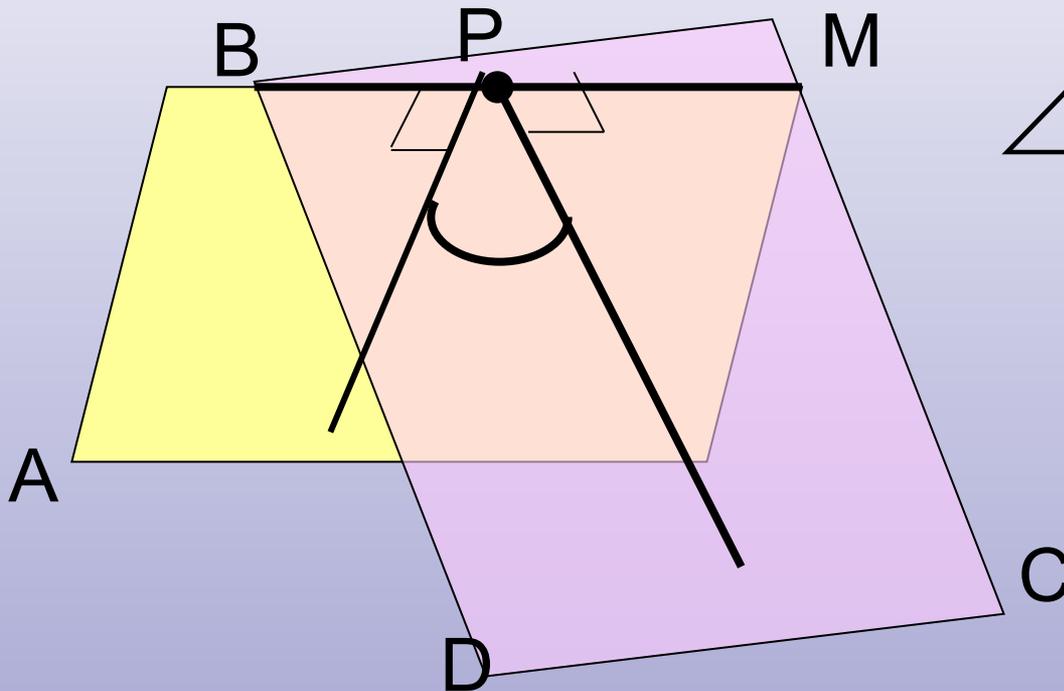
Обозначение двугранного угла.



Угол CBDA

Измерение двугранных углов. Линейный угол.

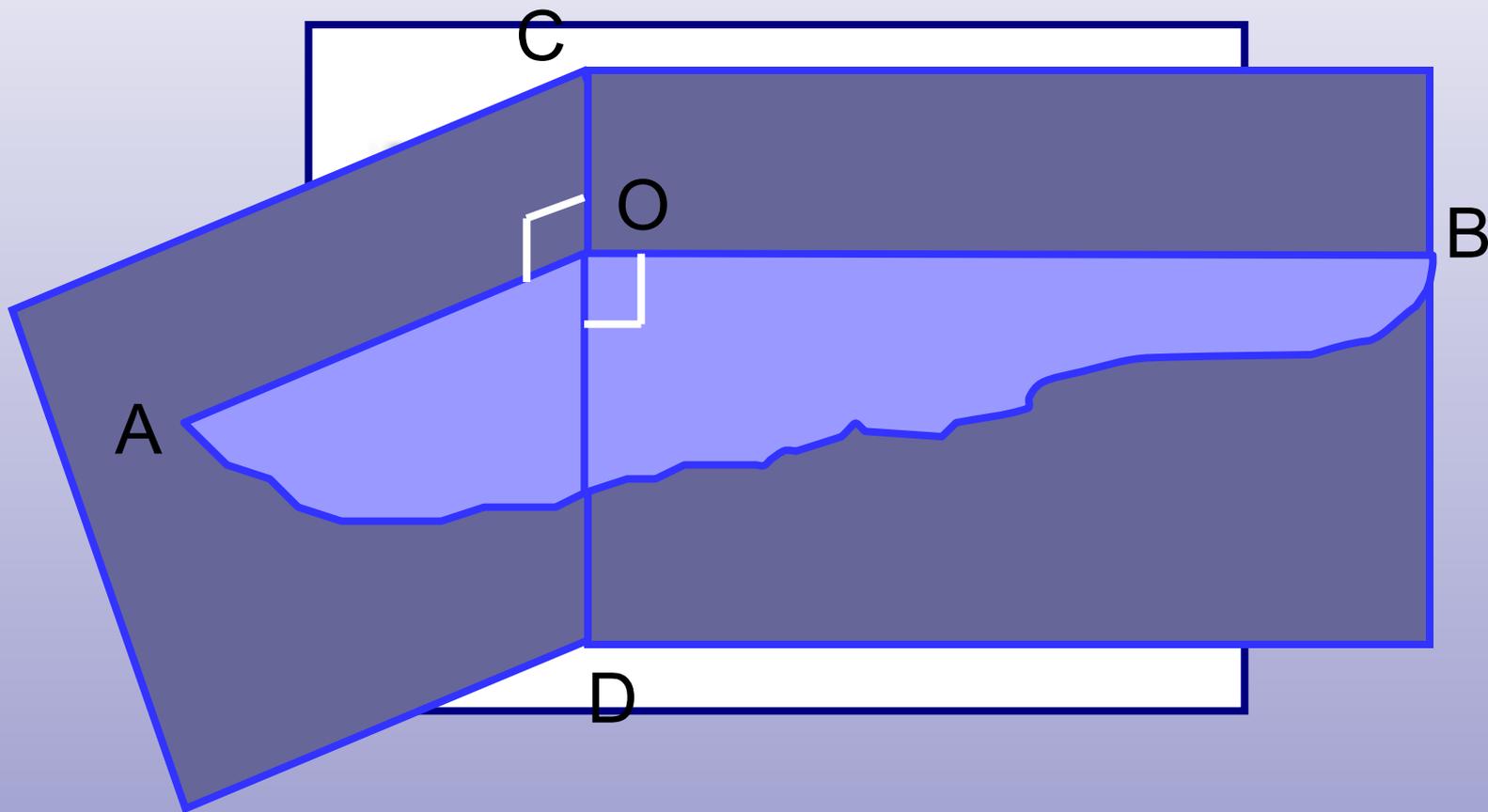
Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.



$$\angle ABMC = \angle P$$

Угол P – линейный угол двугранного угла ABMC

Линейным углом двугранного угла
называется сечение двугранного угла
плоскостью, перпендикулярной ребру.



Способ нахождения (построения) линейного угла.

1. Найти (увидеть) ребро и грани двугранного угла

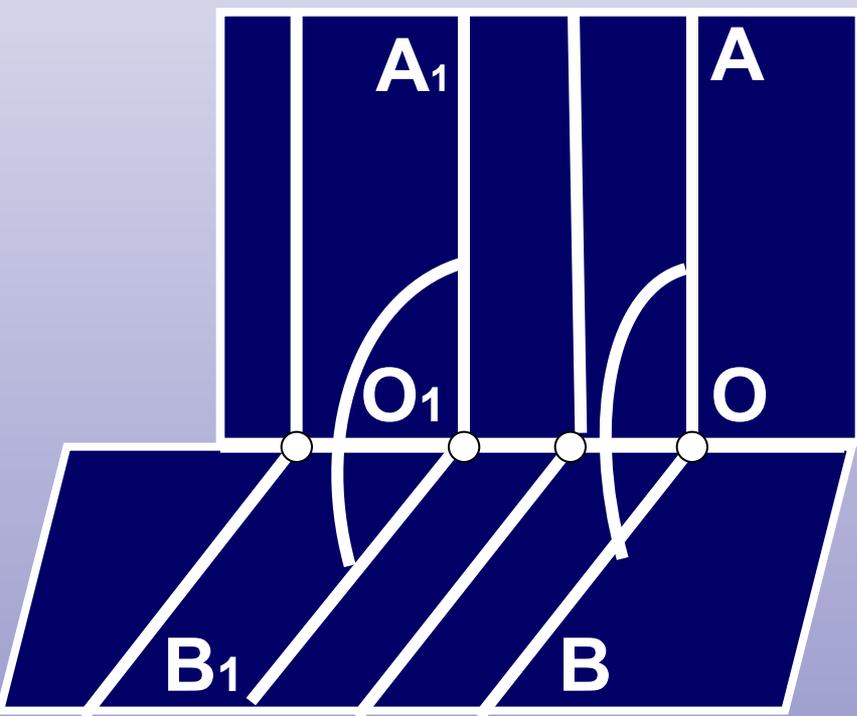
2. В гранях найти направления (прямые) перпендикулярные ребру

3. (при необходимости) заменить выбранные направления параллельными им лучами с общим началом на ребре двугранного угла

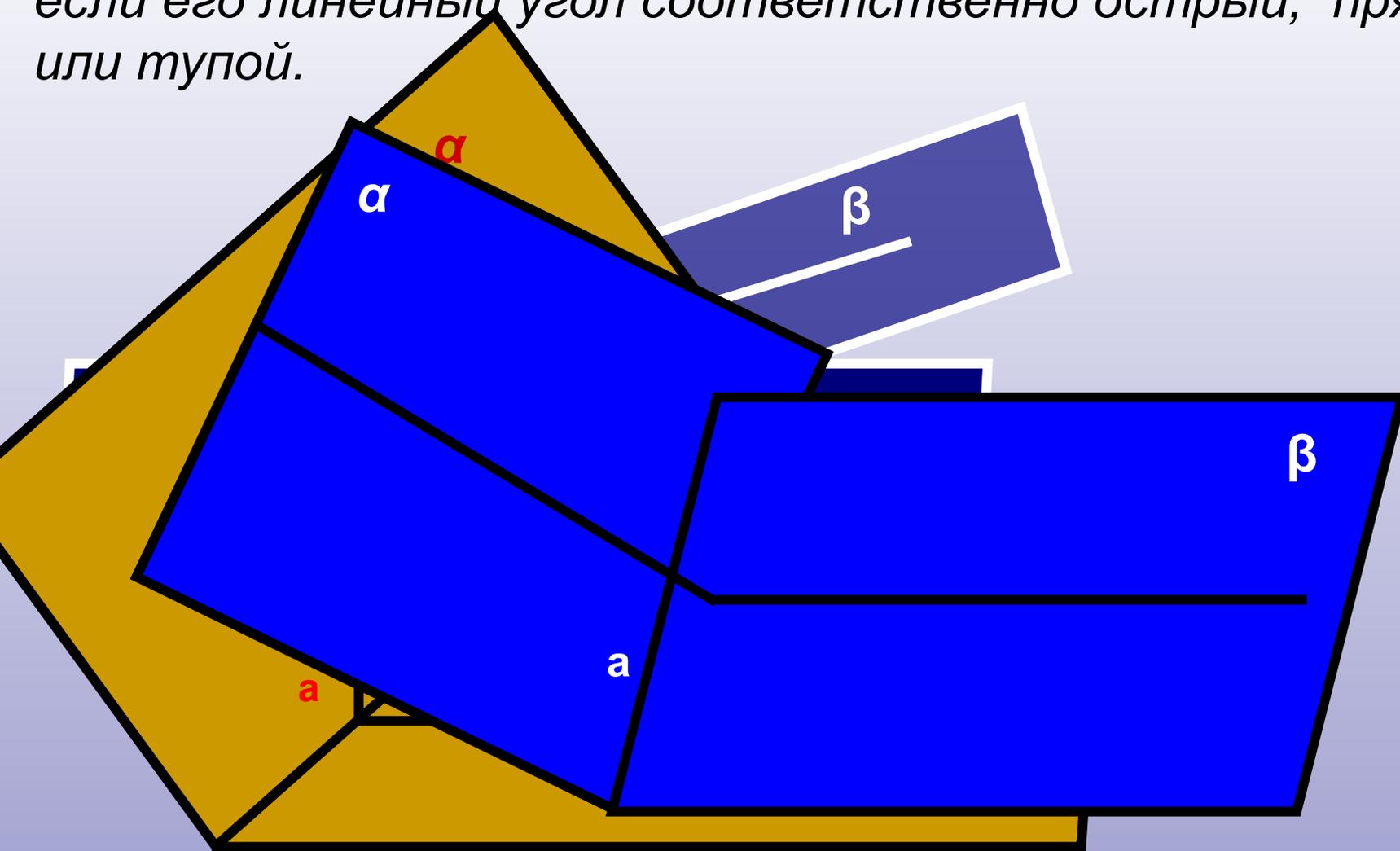
При изображении сохраняется **параллельность и отношение длин параллельных отрезков**



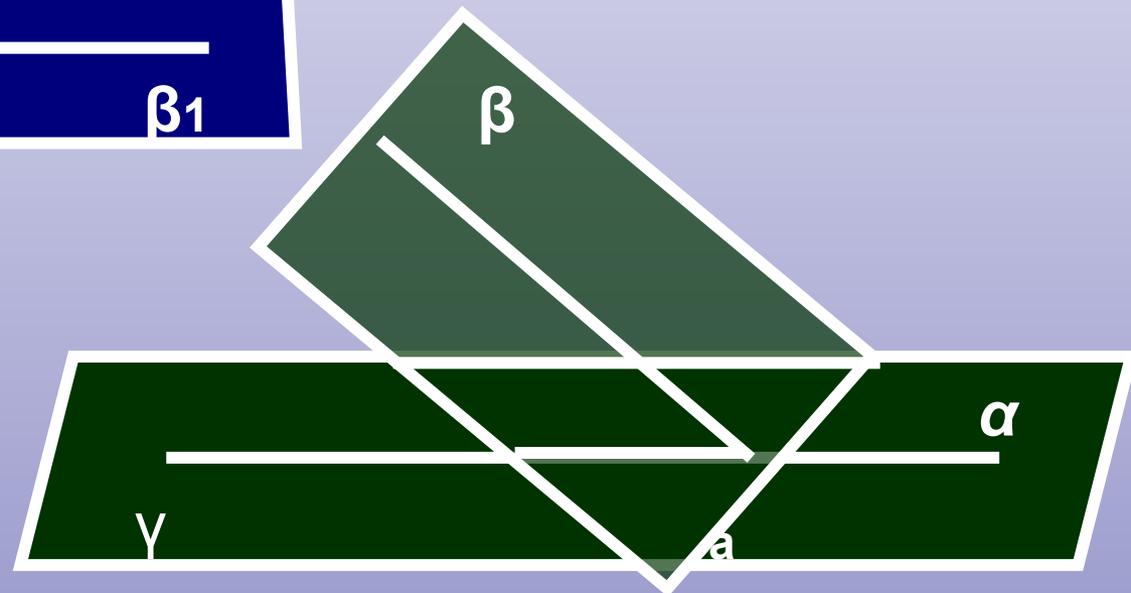
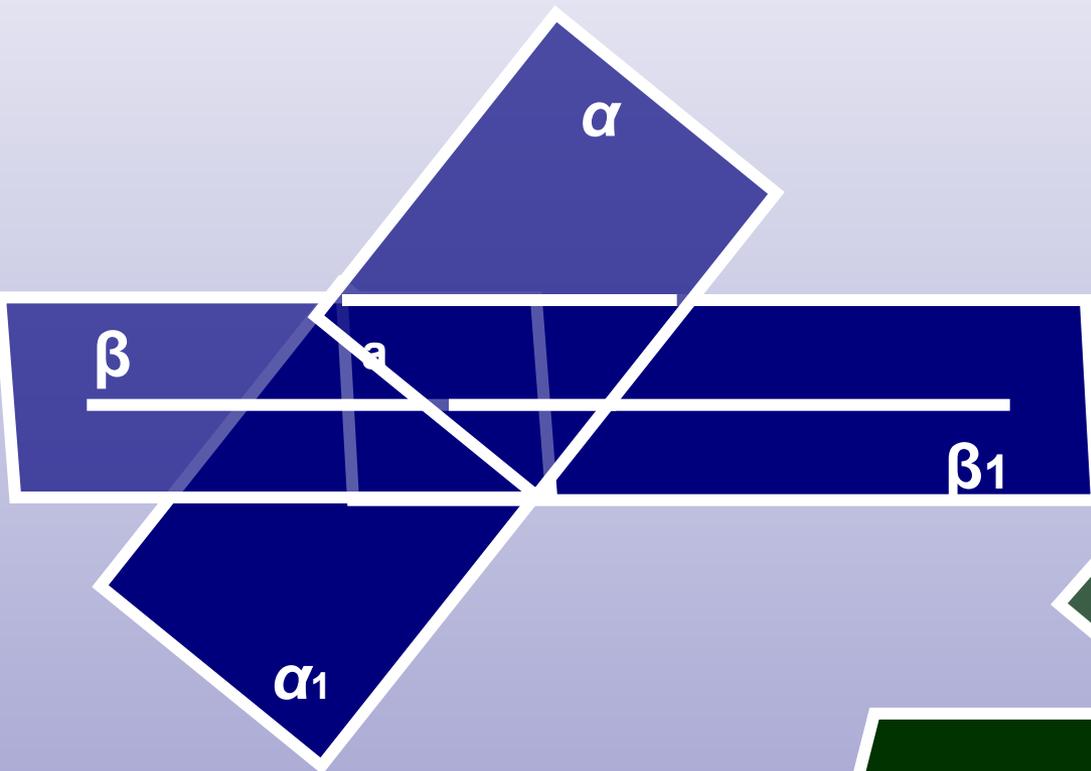
Величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.



Двугранный угол является острым , прямым или тупым, если его линейный угол соответственно острый, прямой или тупой.



Аналогично тому , как и на плоскости , в пространстве определяются смежные и вертикальные двугранные углы.

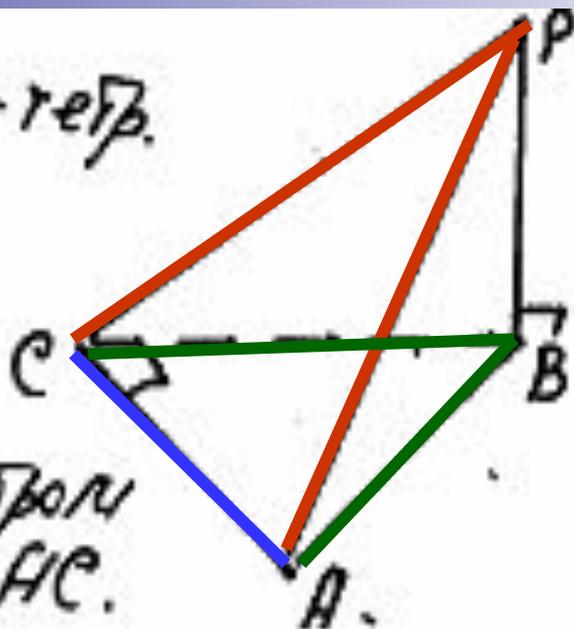


Задача 1 Дано: $РАВС$ -тетр.

$$\angle ACB = 90^\circ$$

$$PB \perp ABC.$$

Указать: лин. \angle для
двугранного ребром
 AC .



Решение

Ребро AC , грани ACP .. и ACB

1. В грани ACB прямая CB перпендикулярна ребру
 CA (по условию)

2. В грани ACP .. прямая CP перпендикулярна ребру CA
(по теореме о трех перпендикулярах)

Значит, угол PCB - линейный для двугранного
угла с ребром AC

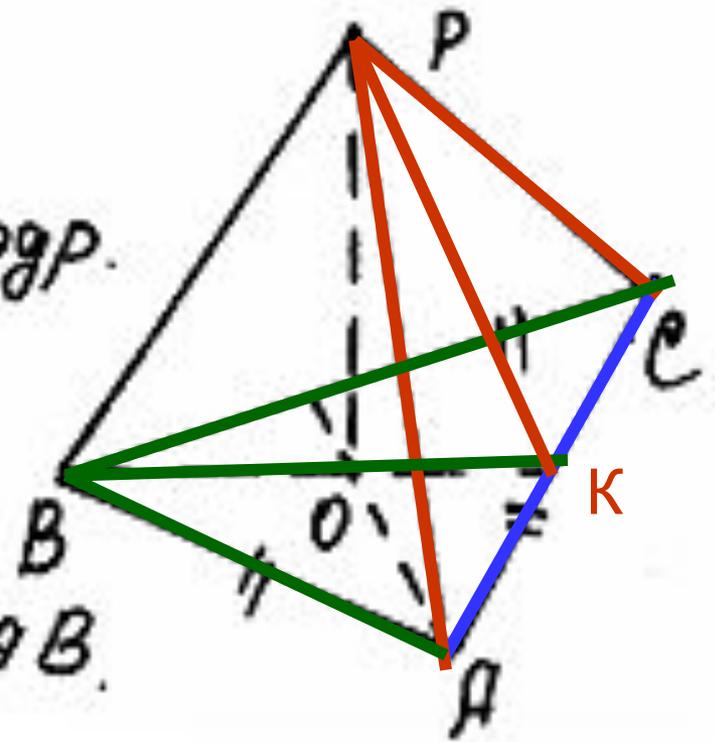
Задача 2. Дано $РABC$ -тетраэдр.

$\triangle ABC$ - правильный

O - центр $\triangle ABC$.

$PO \perp ABC$.

Указать: лин. \angle для $\angle PCAV$.



Решение

Ребро **AC**, грани **ACP** и **ACB**

1. В грани **ACB** прямая **BO** перпендикулярна ребру **CA**
(по свойству равностороннего треугольника)

2. В грани **ACP** прямая **PK** перпендикулярна ребру **CA**
(по теореме о трех перпендикулярах)

Значит, Угол **PKB** - линейный для двугранного угла с **PCAV**

Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$\angle ТМК = 90^\circ$

$МК = МТ$

$РТ \perp МКТ$

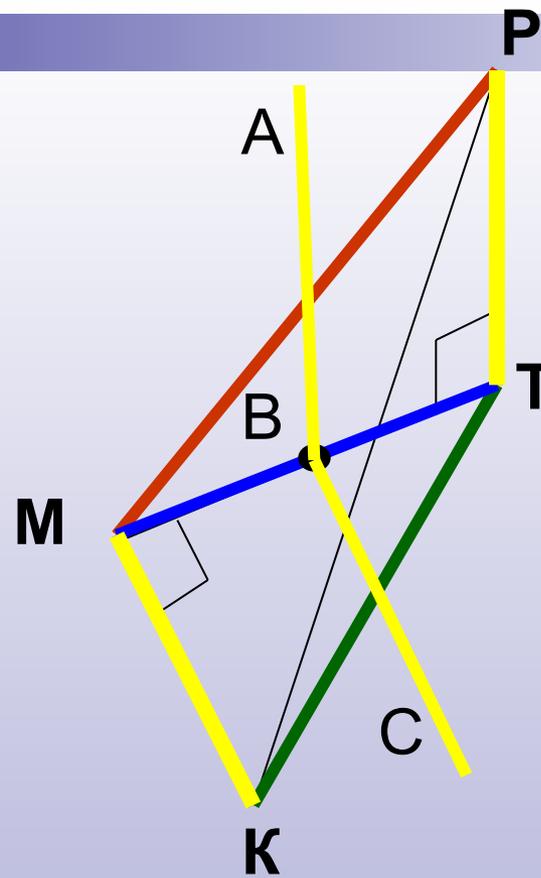
Указать:

линейные углы для
двугранных углов

а). $\angle РТМК$,

б). $\angle РМКТ$,

в). $\angle РКТМ$



А) Двугранный угол **РТМК**:

(1) ребро **MT**, грани **MTP** и **MTK**

(2) В грани **MTP** прямая **TP** перпендикулярна ребру **MT**
(по определению прямой, перпендикулярной плоскости)

В грани **MTK** прямая **MK** перпендикулярна ребру **MT**
(по условию)

Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$\angle TMK = 90^\circ$

$MK = MT$

$PT \perp MKT$

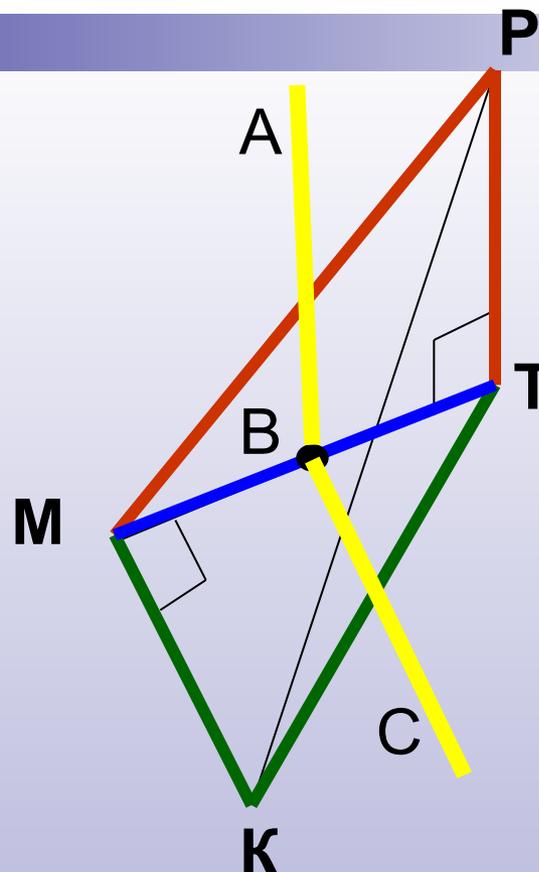
Указать:

линейные углы для
двугранных углов

а). $PTMK$,

б). $PMKT$,

в). $PKTM$



AB параллельна PT (по построению), а так как PT перпендикулярна ребру MT (по доказанному), то AB перпендикулярна ребру MT (по лемме о связи параллельности и перпендикулярности) Аналогично BC перпендикулярна ребру MT. Значит, угол ABC – искомый

Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$\angle TMK = 90^\circ$

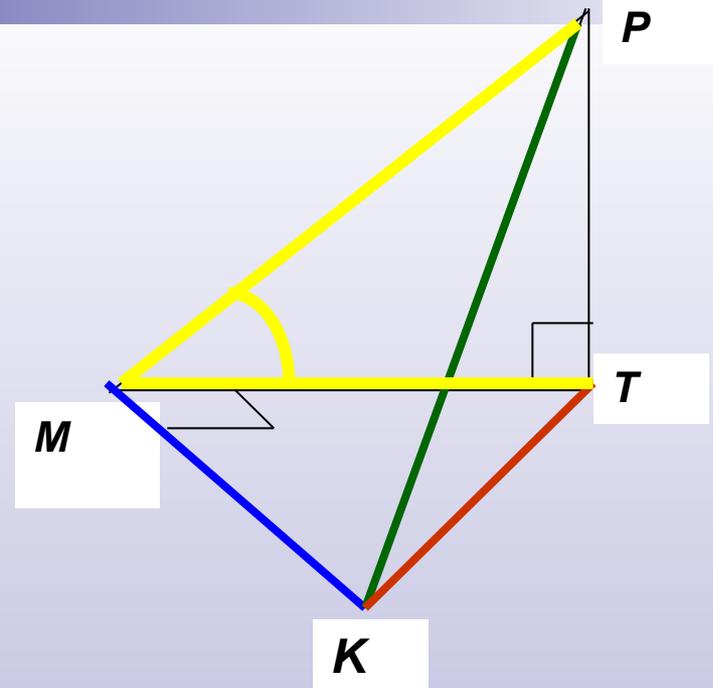
$MK = MT$

$PT \perp MKT$

Указать:

линейные углы для
двугранных углов

- а). РТМК,
- б). РМКТ,
- в). РКТМ



б) Двугранный угол **РМКТ**:

(1) ребро **МК**, грани **МКР** и **МКТ**

(2) В грани **МТК** прямая **МТ** перпендикулярна ребру **МК**
(по условию)

В грани **МКР** прямая **МР** перпендикулярна ребру **МК**
(по теореме о трех перпендикулярах)

Ответ. Угол **РМТ** - линейный для двугранного угла с РМКТ

Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$\angle TMK = 90^\circ$

$MK = MT$

$PT \perp MKT$

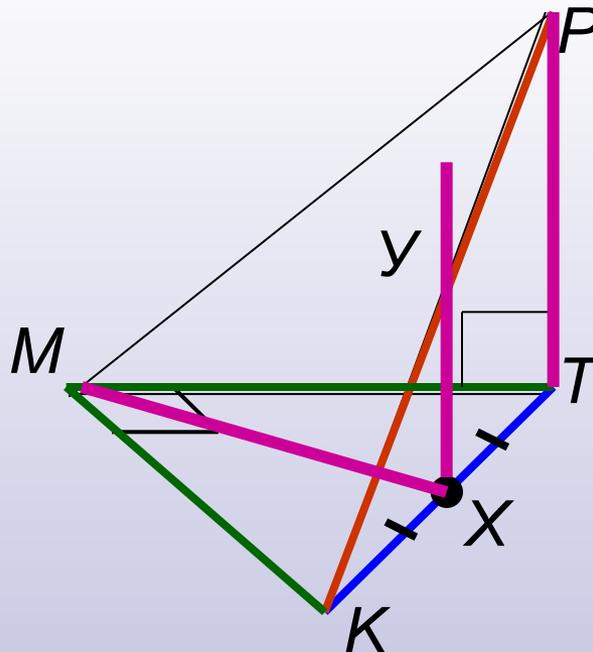
Указать:

линейные углы для
двугранных углов

а). $PTMK$,

б). $PMKT$,

в). $PKTM$



в) Двугранный угол PKM :

- (1) ребро TK , грани TKM и TKP
- (2) В грани MTK прямая MX , где X – середина KT , перпендикулярна ребру KT (по свойству равнобедренного треугольника)

В грани KPT прямая PT перпендикулярна ребру KT
(по определению прямой перпендикулярной плоскости)

Задача №3

Дано:

КМРТ – тетраэдр

$\angle ТМК = 90^\circ$

$МК = МТ$

$РТ \perp МКТ$

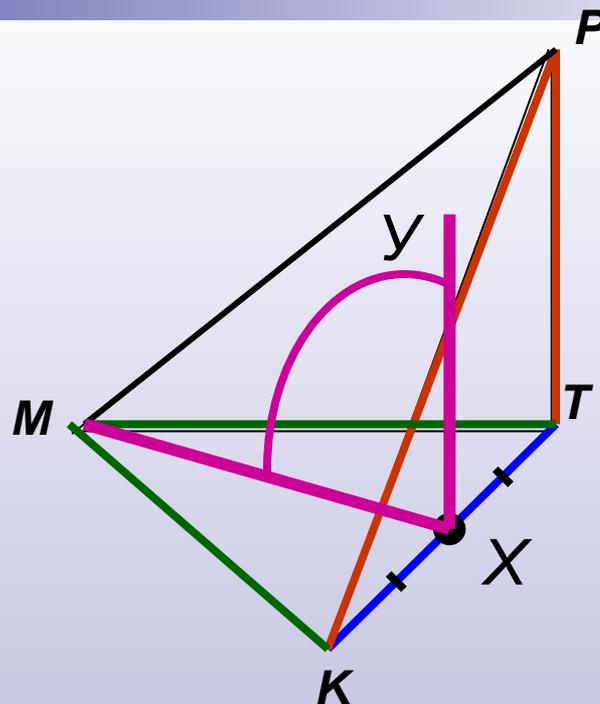
Указать:

линейные углы для
двугранных углов

а). РТМК,

б). РМКТ,

в). РКТМ

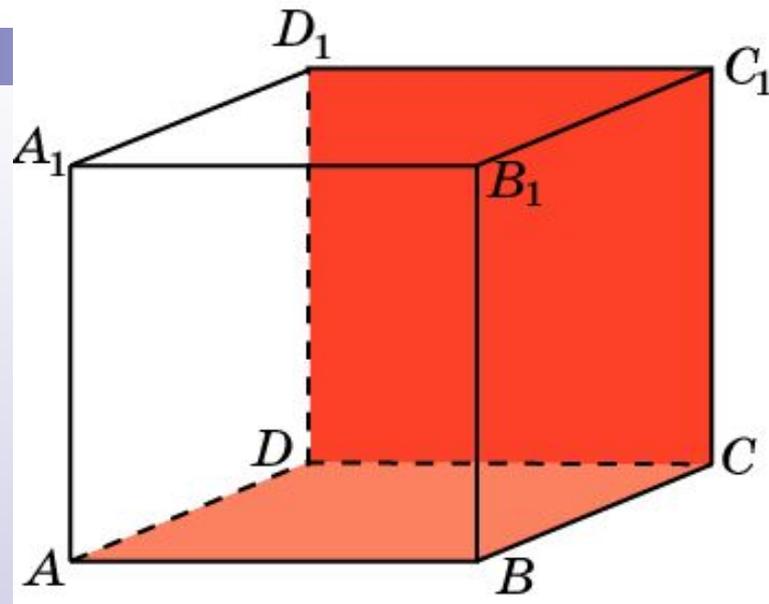


в) Двугранный угол **РКТМ**:

3) Построим прямую **УХ** параллельно прямой **РТ**, она будет лежать в плоскости **РКТ** (почему?) получим, что прямая **ХУ** перпендикулярно ребру **КТ**
(по лемме о связи параллельности и перпендикулярности)

Значит, искомый **угол УХМ**

ПОДУМАЙ!



1. В кубе $A...D1$ найдите угол между плоскостями ABC и $CDD1$.

Ответ: 90°

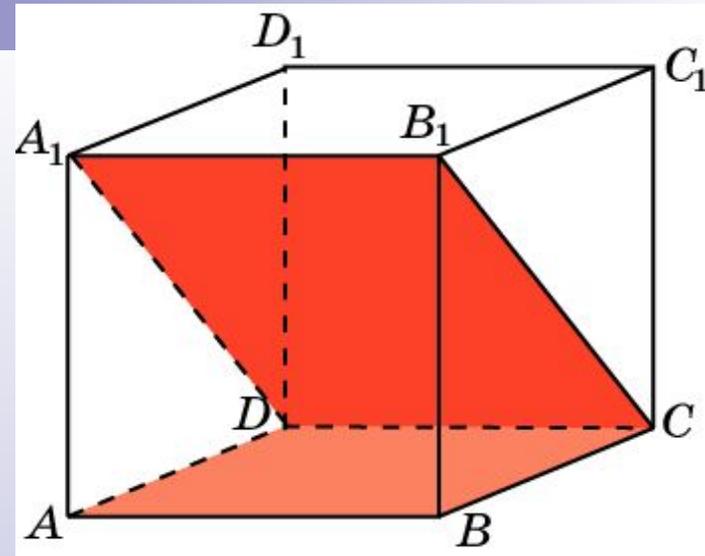
ПРАВИЛЬНО!



ПОДУМАЙ!



2. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CD_1A_1 .



ПРАВИЛЬНО!

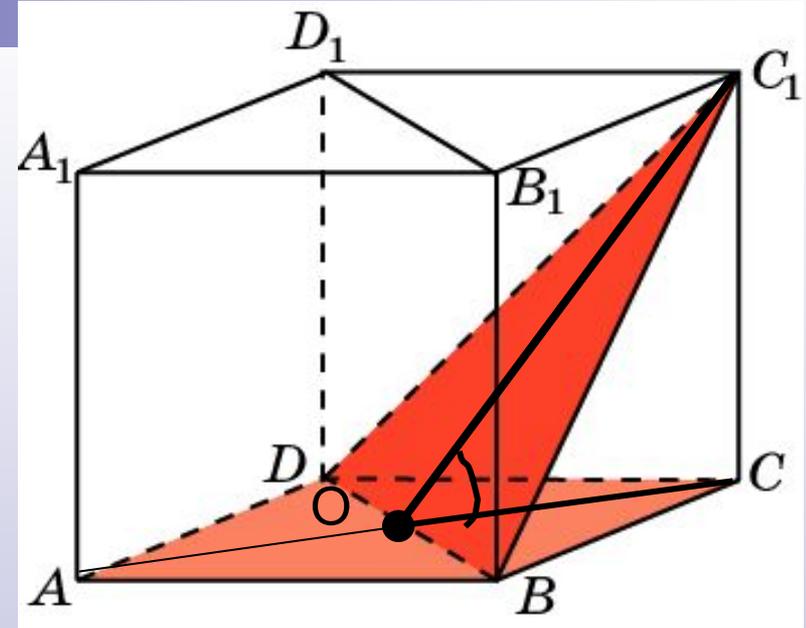
Ответ: 45°



ПОДУМАЙ!

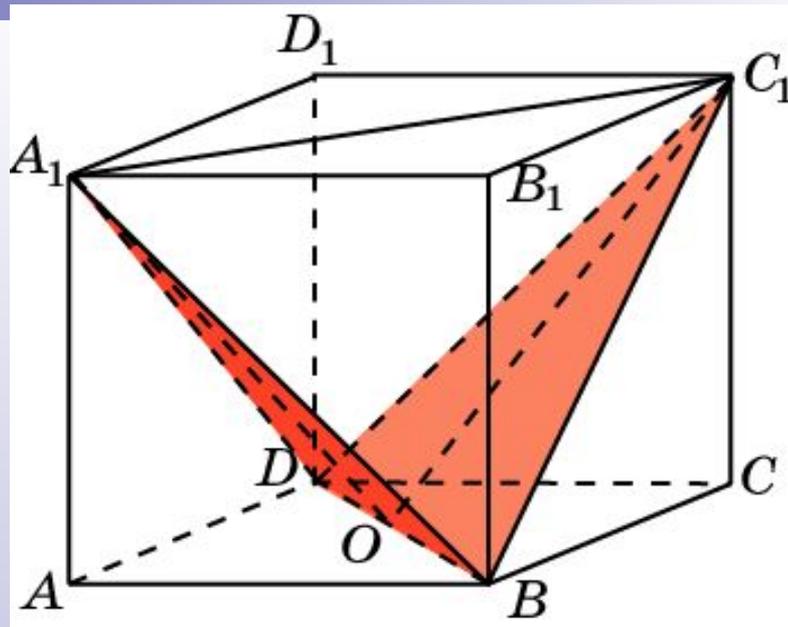


3. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и BC_1D .



Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}$.

4. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями BC_1D и BA_1D .

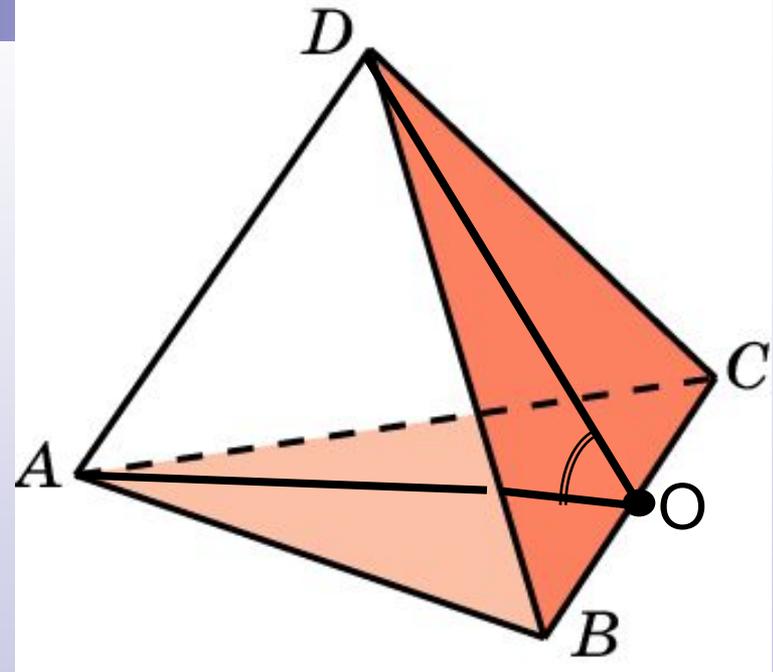


Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{3}$.

ПОДУМАЙ!

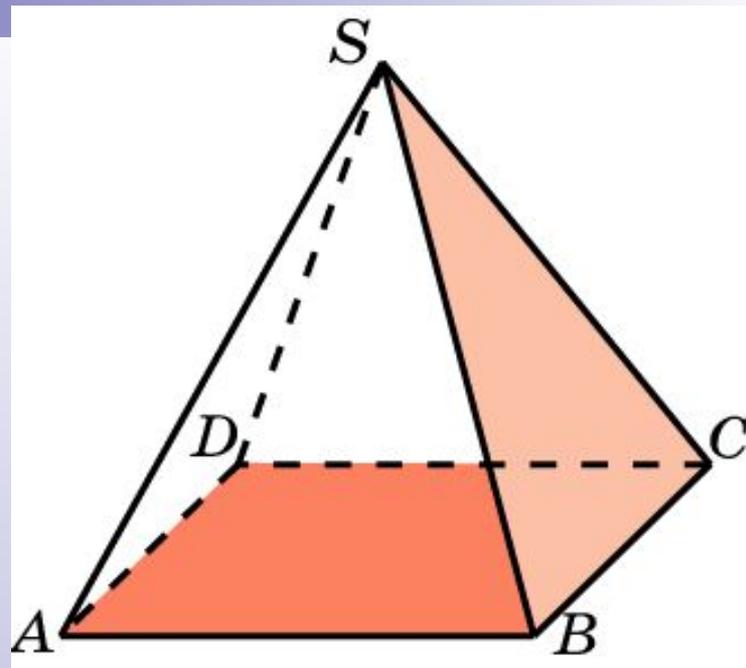


*В тетраэдре $ABCD$,
ребра которого равны 1,
найдите угол между
плоскостями ABC и BCD .*



Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{3}$.

ПОДУМАЙ



В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями SBC и ABC .